

EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
4η διάλεξη
(3η έκδοση, 22/3/2011)

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

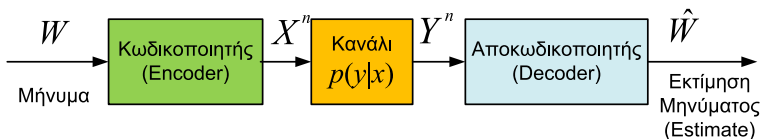
15 Μαρτίου 2011

Διακριτά κανάλια και χωρητικότητα

- 1 Διακριτά κανάλια και χωρητικότητα
 - Εισαγωγή
 - Ορισμοί και Θεωρήματα
- 2 Η Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)
 - Ασθενής Από Κοινού Τυπικότητα και Joint AEP
 - Ισχυρή Από Κοινού Τυπικότητα

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή

- Έως τώρα το ενδιαφέρον εστιάστηκε στη βέλτιστη συμπίεση της πληροφορίας που παράγει μια πηγή.
- Το δεύτερο μεγάλο κεφάλαιο της Θεωρίας Πληροφορίας ασχολείται με τη μετάδοση πληροφορίας μέσω ενός καναλιού.



- Στο σχήμα, η πηγή θέλει να μεταδώσει ένα μήνυμα W μέσω ενός καναλιού. Το κανάλι παραμορφώνει/αλλάζει το μήνυμα.

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (2)

- Πόση είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού;
- Πώς εξαρτάται η μέγιστη τιμή από τα χαρακτηριστικά του καναλιού;
- Πώς επιτυγχάνεται μετάδοση του μέγιστου αυτού ποσού πληροφορίας;

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (3)

- Στο μάθημα “Θεωρία Πληροφορίας” είδαμε ότι, για κανάλια *χωρίς μνήμη*, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης για τον οποίο η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη είναι αυθαίρετα μικρή ονομάζεται χωρητικότητα (capacity) του καναλιού C και ισούται (για κανάλι διακριτού χρόνου) με $\max_{p(x)} I(X; Y)$ (Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού – θα το αποδείξουμε σύντομα).
- Σε κανάλια με μνήμη ο χαρακτηρισμός είναι πιο σύνθετος και δεν ορίζεται πάντοτε μία μοναδική τιμή χωρητικότητας.
 - Δείτε π.χ. Gallager 4.6

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (4)

- Δεν είναι προφανές εάν η συμπίεση της πηγής πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη το κανάλι στο οποίο θα μεταδοθεί η πληροφορία ή εάν η κωδικοποίηση πηγής και η κωδικοποίηση καναλιού μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα. Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού εξασφαλίζει ότι οι δύο κωδικοποιήσεις μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.
- Επομένως, εάν για μια πηγή ισχύει $H(\mathcal{X}) < C$, η πληροφορία που παράγει η πηγή μπορεί να μεταδοθεί μέσω του καναλιού με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος.
- Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού ενοποιεί τη συμπίεση και την κωδικοποίηση καναλιού (για διακριτά κανάλια ενός χρήστη, χωρίς μνήμη).

Διακριτά κανάλια – Ορισμοί

- **Ορισμός 4.1.** Ένα διακριτό κανάλι $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ αποτελείται από δύο πεπερασμένα σύνολα \mathcal{X} και \mathcal{Y} και ένα σύνολο (μία οικογένεια) δεσμευμένων συναρτήσεων μάζας πιθανότητας $p(y|x)$, μια για κάθε $x \in \mathcal{X}$, ώστε, για κάθε x και y , $p(y|x) \geq 0$ και, για κάθε x , $\sum_y p(y|x) = 1$. Η τ.μ. X είναι η είσοδος του καναλιού και η Y η έξοδός του.

Διακριτά κανάλια – Ορισμοί (2)

- Ένα διακριτό κανάλι δεν έχει μνήμη (discrete memoryless channel) εάν

$$p(y_k | x^k, y^{k-1}) = p(y_k | x_k).$$

- **Ορισμός 4.2.** Έστω ότι χρησιμοποιούμε ένα διακριτό κανάλι n φορές. Ορίζουμε τη n -οστή επέκταση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη $(\mathcal{X}^n, p(y^n | x^n), \mathcal{Y}^n)$, όπου

$$p(y_k | x^k, y^{k-1}) = p(y_k | x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Μετάδοση σε διακριτά κανάλια χωρίς ανάδραση

- Προσοχή: Ακόμα και εάν το κανάλι δεν έχει μνήμη δεν ισχύει, απαραίτητα, $p(y_k|x^k) = p(y_k|x_k)$.
- Ωστόσο, εάν το κανάλι *χωρίς μνήμη* χρησιμοποιείται χωρίς ανάδραση, δηλαδή η είσοδος στο κανάλι δεν εξαρτάται από τις εξόδους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, $p(x_k|x^{k-1}, y^{k-1}) = p(x_k|x^{k-1})$ και

$$p(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i).$$

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- **Ορισμός 4.3.** “Πληροφοριακή” Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

“Information” Channel Capacity

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X; Y)$$

Παραδείγματα Διακριτών Καναλιών Χωρίς Μνήμη

(Επανάληψη από το μάθημα “Θεωρία Πληροφορίας”)

- Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel – BSC): $C = 1 - H(p)$ bits, επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφή (Binary Erasure Channel): $C = 1 - \alpha$, όπου α η πιθανότητα διαγραφής. Επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- Η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού με διαγραφή παραμένει η ίδια εάν χρησιμοποιήσουμε ανάδραση.
- Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, δηλαδή ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα, ισχύει γενικά για όλα τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.

Παράδειγμα 4.1. Product DMC

(από Y.-H. Kim & A. El Gamal, *Lecture notes on Network Information Theory*).

- Θεωρούμε δύο διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη $(\mathcal{X}_1, p(y_1|x_1), \mathcal{Y}_1)$ και $(\mathcal{X}_2, p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_2)$ με χωρητικότητες C_1 και C_2 , αντίστοιχα.
- Έστω, τώρα, το κανάλι $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y_1|x_1)p(y_2|x_2), \mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2)$ στο οποίο τα σύμβολα $x_1 \in \mathcal{X}_1$ και $x_2 \in \mathcal{X}_2$ στέλνονται ταυτόχρονα και παράλληλα και τα ληφθέντα σύμβολα ακολουθούν κατανομή $p(y_1, y_2|x_1, x_2) = p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)$.

Παράδειγμα 4.1. Product DMC (2)

- Η χωρητικότητα του καναλιού-γινομένου ισούται με

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{p(x_1, x_2)} I(X_1, X_2; Y_1; Y_2) \\
 &= \max_{p(x_1, x_2)} \{I(X_1, X_2; Y_1) + I(X_1, X_2; Y_2|Y_1)\} \\
 &= \max_{p(x_1, x_2)} \{I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_1|X_1) + \\
 &\quad I(X_2; Y_2|Y_1) + I(X_1; Y_2|X_2, Y_1)\} \\
 &\stackrel{(a), (b)}{=} \max_{p(x_1, x_2)} \{I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)\}.
 \end{aligned}$$

(a) Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες και η Y_1 είναι ανεξάρτητη της X_2 .

Επομένως, $X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow Y_1$ και

$$I(X_2; Y_1|X_1) = H(Y_1|X_1) - H(Y_1|X_1, X_2) = 0.$$

(b) Με την ίδια συλλογιστική, $(X_1, Y_1) \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2$ και

$I(X_1; Y_2|X_2, Y_1) = H(Y_2|X_2, Y_1) - H(Y_2|X_1, X_2, Y_1) = 0$. Επίσης, λόγω ανεξαρτησίας, $I(X_2; Y_2|Y_1) = I(X_2; Y_2)$.

Παράδειγμα 4.1. Product DMC (3)

- Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 C &= \max_{p(x_1, x_2)} \{I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2)\} \\
 &= \max_{p(x_1, x_2)} I(X_1; Y_1) + \max_{p(x_1, x_2)} I(X_2; Y_2) \\
 &= \max_{p(x_1)} I(X_1; Y_1) + \max_{p(x_2)} I(X_2; Y_2) = C_1 + C_2.
 \end{aligned}$$

- Το αποτέλεσμα μπορεί να γενικευτεί για $K > 2$ ανεξάρτητα κανάλια.

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού

- Πίνακας μετάβασης $[p(y|x)]_{i,j}$. Σύμβολο στην είσοδο: x_i . Σύμβολο στην έξοδο: y_j .
- **Ορισμός 4.4.** Ένα διακριτό κανάλι ονομάζεται συμμετρικό όταν κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης $p(y|x)$ προκύπτει από αναδιάταξη κάθε άλλης γραμμής και το ίδιο ισχύει και για κάθε στήλη του πίνακα. Ένα διακριτό κανάλι ονομάζεται ασθενώς συμμετρικό όταν κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης $p(y|x)$ προκύπτει από αναδιάταξη κάθε άλλης γραμμής και τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε στήλης $\sum_x p(y|x)$ ισούνται μεταξύ τους.

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού (2)

- **Θεώρημα 4.5.** Για τη χωρητικότητα ασθενώς συμμετρικού καναλιού (και, επομένως, και συμμετρικού καναλιού), ισχύει

$$C = \log |\mathcal{Y}| - H(\text{οποιασδήποτε γραμμής } \mathbf{r} \text{ πίνακα μετάβασης}).$$

- **Απόδειξη:**

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &\stackrel{(a)}{=} H(Y) - H(\mathbf{r}) \\ &\leq \log |\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

- Για το (a) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης προκύπτει από αναδιάταξη κάθε άλλης γραμμής.

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού (3)

- Η ισότητα ισχύει όταν η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.
- Ομοιόμορφη κατανομή για την Y επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφα κατανεμημένης εισόδου X .

$$p(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(y|x)p(x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{x \in \mathcal{X}} p(y|x) \stackrel{(a)}{=} c \frac{1}{|\mathcal{X}|} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|}.$$

Στο (a) χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι, για (ασθενώς) συμμετρικά κανάλια, τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε στήλης ισούνται μεταξύ τους.

- Παρόλο που για συμμετρικά (και ασθενώς συμμετρικά) κανάλια η χωρητικότητα επιτυγχάνεται πάντοτε με χρήση ομοιόμορφης κατανομής εισόδου, αυτό δε σημαίνει, κατ' ανάγκη, ότι μόνο η ομοιόμορφη κατανομή επιτυγχάνει τη χωρητικότητα.
 - Παράδειγμα: Ενθόρυβη γραφομηχανή με άρτιο αριθμό πλήκτρων.

Η Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)

- 1 Διακριτά κανάλια και χωρητικότητα
 - Εισαγωγή
 - Ορισμοί και Θεωρήματα
- 2 Η Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)
 - Ασθενής Από Κοινού Τυπικότητα και Joint AEP
 - Ισχυρή Από Κοινού Τυπικότητα

Εισαγωγή

- Θα αρχίσουμε, και πάλι, από την ασθενή από κοινού τυπικότητα και, στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στην ισχυρή από κοινού τυπικότητα.

Από κοινού τυπικές ακολουθίες (Jointly Typical sequences)

- Ορισμός 4.6.** Το σύνολο $A_\epsilon^{(n)}$ από κοινού (ασθενώς) τυπικών ακολουθιών ζευγών (x, y) ως προς την κατανομή $p(x, y)$, ορίζεται ως

$$A_\epsilon^{(n)} = \left\{ (x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : \begin{aligned} & \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n) - H(X) \right| < \epsilon, \\ & \left| -\frac{1}{n} \log p(y^n) - H(Y) \right| < \epsilon, \\ & \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n, y^n) - H(X, Y) \right| < \epsilon \end{aligned} \right\},$$

περιέχει, δηλαδή, τις ακολουθίες ζευγών (ή τα ζεύγη ακολουθιών) $\{(x^n, y^n)\}$ μήκους n οι εμπειρικές εντροπίες των οποίων βρίσκονται σε απόσταση από την πραγματική τους εντροπία που δεν υπερβαίνει το ϵ .

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)

- Έστω (X^n, Y^n) ακολουθίες μήκους n οι οποίες δημιουργούνται με χρήση ανεξάρτητων και ομοίως κατανομημένων (i.i.d.) ζευγών (X_i, Y_i) , σύμφωνα με την κατανομή $p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^n p(x_i, y_i)$. Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $\Pr \left\{ (X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} \rightarrow 1$, για $n \rightarrow \infty$.
2. $\left| A_\epsilon^{(n)} \right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}$.
3. Εάν $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \sim p(x^n)p(y^n)$, δηλαδή οι \tilde{X}^n και \tilde{Y}^n είναι ανεξάρτητες και οι κατανομές τους ισούνται με τις περιθώριες κατανομές της $p(x^n, y^n)$,

$$\Pr \left\{ (\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} \leq 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}.$$

Επίσης, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$,

$$\Pr \left\{ (\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} \geq (1 - \epsilon)2^{-n(I(X;Y)+3\epsilon)}.$$

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις

$$1. \Pr \left\{ (X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} \rightarrow 1, \text{ για } n \rightarrow \infty.$$

Από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, $-\frac{1}{n} \log p(X^n) \rightarrow -\mathbb{E}[\log p(X)] = H(X)$ κατά πιθανότητα. Επομένως, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε, για όλα τα $n > n_1$,

$\Pr \left\{ \left| -\frac{1}{n} \log p(X^n) - H(X) \right| \geq \epsilon \right\} < \frac{\epsilon}{3}$. Παρομοίως, υπάρχουν n_2 και n_3 τέτοια ώστε, $\Pr \left\{ \left| -\frac{1}{n} \log p(Y^n) - H(Y) \right| \geq \epsilon \right\} < \frac{\epsilon}{3}$ και $\Pr \left\{ \left| -\frac{1}{n} \log p(X^n, Y^n) - H(X, Y) \right| \geq \epsilon \right\} < \frac{\epsilon}{3}$, αντίστοιχα. Επομένως, για $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$, η πιθανότητα το (X^n, Y^n) να μην είναι τυπικό είναι μικρότερη από ϵ , και, συνεπώς,

$$\Pr \left\{ (X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} > 1 - \epsilon, \text{ για } n > \max\{n_1, n_2, n_3\}.$$

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις (2)

$$2. \left| A_\epsilon^{(n)} \right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}.$$

Παρόμοια με την αντίστοιχη απόδειξη για το AEP,

$$1 = \sum p(x^n, y^n) \geq \sum_{(x^n, y^n) \in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n, y^n) \geq \left| A_\epsilon^{(n)} \right| 2^{-n(H(X,Y)+\epsilon)}.$$

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις (3)

3. Έστω ανεξάρτητες ακολουθίες τ.μ. \tilde{X}^n και \tilde{Y}^n που έχουν προκύψει από κατανομές $p(\tilde{x}^n)$ και $p(\tilde{y}^n)$ που ισούνται με τις περιθώριες κατανομές της $p(x^n, y^n)$, $p(x^n)$ και $p(y^n)$, αντίστοιχα. Επομένως,

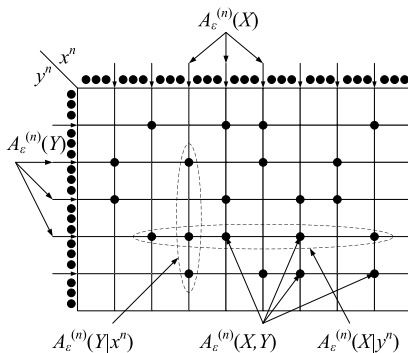
$$\begin{aligned} \Pr \left\{ (\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} &= \sum_{(x^n, y^n) \in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n) p(y^n) \\ &\leq 2^{n(H(X, Y) + \epsilon)} 2^{-n(H(X) - \epsilon)} 2^{-n(H(Y) - \epsilon)} \\ &= 2^{-n(I(X; Y) - 3\epsilon)}. \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο (βλ. π.χ. Cover Theorem 7.6.1) μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\Pr \left\{ (\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)} \right\} \geq (1 - \epsilon) 2^{-n(I(X; Y) + 3\epsilon)}$$

για $n > n_0$.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (2)



Στο σχήμα δίνεται ένα παράδειγμα από κοινού τυπικού συνόλου. Υπάρχουν περίπου $2^{nH(X)}$ τυπικές ακολουθίες τ.μ. X και περίπου $2^{nH(Y)}$ τυπικές ακολουθίες τ.μ. Y . Ωστόσο, οι από κοινού τυπικές ακολουθίες είναι περίπου $2^{nH(X,Y)}$, δηλαδή, υπάρχουν ζεύγη τυπικών X^n με τυπικά Y^n τα οποία δεν είναι από κοινού τυπικά.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (3)

- Από την 3η ιδιότητα, η πιθανότητα ένα ζεύγος ακολουθιών (X^n, Y^n) το οποίο επιλέγεται τυχαία και του οποίου οι συνιστώσες είναι (μεμονωμένα) τυπικές να είναι και από κοινού τυπικό, ισούται περίπου με $2^{-nI(X;Y)}$.
- Επομένως, στο σχήμα της προηγούμενης διαφάνειας, κατά μέσο όρο πρέπει να θεωρήσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ ζεύγη μεμονωμένα τυπικών X^n και Y^n έως ότου εμφανιστεί ένα τυπικό ζεύγος.
- Ισοδύναμα, εάν θεωρήσουμε μια ακολουθία Y^n η οποία αποτελεί την έξοδο καναλιού με είσοδο X^n , υπάρχουν περίπου $2^{nH(X|Y)}$ υπό συνθήκη τυπικές ακολουθίες X^n . Η πιθανότητα να διαλέξουμε μια ακολουθία X'^n η οποία είναι τυπική με την Y^n αλλά δεν είναι η ακολουθία X^n η οποία μεταδόθηκε ισούται, περίπου, με $2^{nH(X|Y)} / 2^{nH(X)} = 2^{-nI(X;Y)}$. Επομένως, και πάλι, κατά μέσο όρο πρέπει να θεωρήσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ ακολουθίες X^n έως ότου εμφανιστεί ακολουθία που αποτελεί τυπικό ζεύγος με την Y^n .

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (4)

- Συνεπώς, διαισθητικά, μπορούμε να μεταδώσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ διακριτές ακολουθίες στο κανάλι χωρίς να υπάρξει σύγχυση.
- Θα αποδείξουμε ότι είναι εφικτή η μετάδοση έως και $2^{nI(X;Y)}$ διακριτών ακολουθιών με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος για $n \rightarrow \infty$. Θα δούμε, επίσης, ότι εάν προσπαθήσουμε να μεταδώσουμε περισσότερες από $2^{nI(X;Y)}$ διακριτές ακολουθίες, η πιθανότητα σφάλματος τείνει στο 1.

Το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού

- 1 Διακριτά κανάλια και χωρητικότητα
 - Εισαγωγή
 - Ορισμοί και Θεωρήματα

- 2 Η Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)
 - Ασθενής Από Κοινού Τυπικότητα και Joint AEP
 - Ισχυρή Από Κοινού Τυπικότητα

Από Κοινού Ισχυρώς Τυπικές Ακολουθίες

- Οι ισχυρώς τυπικές ακολουθίες δύο τ.μ. ορίζονται αντίστοιχα με τις ισχυρώς τυπικές ακολουθίες μίας τ.μ.
- **Ορισμός 4.7.** Έστω i.i.d. ακολουθία ζευγών τ.μ. που παίρνουν τιμές σε πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Στη γενική περίπτωση, οι τ.μ. που αποτελούν το ζεύγος είναι εξαρτημένες: $(X, Y) \sim p(x, y)$. Το σύνολο $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y)$ των από κοινού ισχυρώς ϵ -τυπικών ακολουθιών (x^n, y^n) ορίζεται ως

$$\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y) \triangleq \{(x^n, y^n) : |\pi(x, y|x^n, y^n) - p(x, y)| \leq \epsilon p(x, y) \text{ για όλα τα } (x, y) \in (\mathcal{X}, \mathcal{Y})\},$$

όπου $\pi(x, y|x^n, y^n)$ είναι ο από κοινού τύπος (η από κοινού εμπειρική πιθανότητα) του ζεύγους (x, y) .

Ιδιότητες Ισχυρώς Τυπικών Ακολουθιών

- Έστω $p(x^n, y^n) \sim \prod_{i=1}^n p_{X,Y}(x_i, y_i)$. Εάν $(x^n, y^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y)$,
 1. $x^n \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X)$ και $y^n \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(Y)$.
 2. $p(x^n, y^n) \doteq 2^{-nH(X,Y)}$. ($a_n \doteq 2^{nb}$ εάν υπάρχει $\delta(\epsilon)$ τέτοιο ώστε $2^{n(b-\delta(\epsilon))} \leq a_n \leq 2^{n(b+\delta(\epsilon))}$)
 3. $p(x^n) \doteq 2^{-nH(X)}$ και $p(y^n) \doteq 2^{-nH(Y)}$.
 4. $p(x^n|y^n) \doteq 2^{-nH(X|Y)}$ και $p(y^n|x^n) \doteq 2^{-nH(Y|X)}$.
- Για αρκούντως μεγάλο n ,

$$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y)| \doteq 2^{nH(X,Y)}.$$

Ιδιότητες Ισχυρώς Τυπικών Ακολουθιών (2)

- **Ορισμός 4.8.** Το σύνολο $\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(Y|x^n)$ των ακολουθιών Y^n που είναι υπό συνθήκη ισχυρώς ϵ -τυπικές με την ακολουθία x^n ορίζεται ως

$$\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(Y|x^n) \triangleq \left\{ y^n : (x^n, y^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y) \right\}.$$

- Αποδεικνύεται ότι

$$|\mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(Y|x^n)| \leq 2^{n(H(Y|X) + \delta(\epsilon))},$$

όπου $\delta(\epsilon) = \epsilon \cdot H(Y|X)$.

Ιδιότητες Ισχυρώς Τυπικών Ακολουθιών (3)

- **Λήμμα 4.9.** (υπό συνθήκη τυπικότητας) Έστω $x^n \in \mathcal{T}_{\epsilon'}^{(n)}(X)$ και $Y^n \sim \prod_{i=1}^n p_{Y|X}(y_i|x_i)$. Για οποιοδήποτε $\epsilon > \epsilon'$,

$$\Pr \left\{ (x^n, Y^n) \in \mathcal{T}_{\epsilon}^{(n)}(X, Y) \right\} \rightarrow 1 \text{ για } n \rightarrow \infty.$$

- Επομένως, για όλες τις ακολουθίες $x^n \in \mathcal{T}_{\epsilon'}^{(n)}(X)$,

$$|\mathcal{T}_{\epsilon}^{(n)}(Y|x^n)| \geq (1 - \epsilon)2^{n(H(Y|X) - \delta(\epsilon))},$$

για αρκούντως μεγάλο n .

- Αποδεικνύεται, επίσης, μια πιο ισχυρή ιδιότητα (δείτε π.χ. Y.-H. Kim & A. El Gamal, *Lecture notes on Network Information Theory*): Για κάθε $x^n \in \mathcal{T}_{\epsilon}^{(n)}(X)$ και για αρκούντως μεγάλο n ,

$$|\mathcal{T}_{\epsilon}^{(n)}(Y|x^n)| \geq 2^{n(H(Y|X) - \delta'(\epsilon))},$$

για κάποιο $\delta'(\epsilon)$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$.

Γενίκευση για περισσότερες τ.μ.

- Όλα τα παραπάνω γενικεύονται για περισσότερες τ.μ.
- Θα αναφερθούμε μόνο στο Λήμμα Από Κοινού Τυπικότητας (Joint Typicality Lemma).
- Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε, για παράδειγμα, Y.-H. Kim & A. El Gamal, *Lecture Notes on Network Information Theory*.

Λήμμα Από Κοινού Τυπικότητας

- **Λήμμα 4.10. (Από Κοινού Τυπικότητας)**

Έστω $(X, Y, Z) \sim p(x, y, z)$. Υπάρχει $\delta(\epsilon) \rightarrow 0$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

1. Εάν $(x^n, y^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y)$ και η \tilde{Z}^n ακολουθεί κατανομή $\prod_{i=1}^n p_{Z|X}(\tilde{z}_i|x_i)$ (αντί για $\prod_{i=1}^n p_{Z|X,Y}(\tilde{z}_i|x_i, y_i)$),
 - (α) $\Pr \left\{ (x^n, y^n, \tilde{Z}^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y, Z) \right\} \leq 2^{-n(I(Y;Z|X) - \delta(\epsilon))}$ και
 - (β) για αρκούντως μεγάλο n , $\Pr \left\{ (x^n, y^n, \tilde{Z}^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y, Z) \right\} \geq (1 - \epsilon)2^{-n(I(Y;Z|X) + \delta(\epsilon))}$.
2. Εάν $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \sim p(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ και η ακολουθία $\tilde{Z}^n \sim \prod_{i=1}^n p_{Z|X}(\tilde{z}_i|\tilde{x}_i)$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητη από την \tilde{Y}^n δεδομένης της \tilde{X}^n ,

$$\Pr \left\{ (\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n, \tilde{Z}^n) \in \mathcal{T}_\epsilon^{(n)}(X, Y, Z) \right\} \leq 2^{-n(I(Y;Z|X) - \delta(\epsilon))}.$$