

ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

12η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

18 Μαΐου 2010

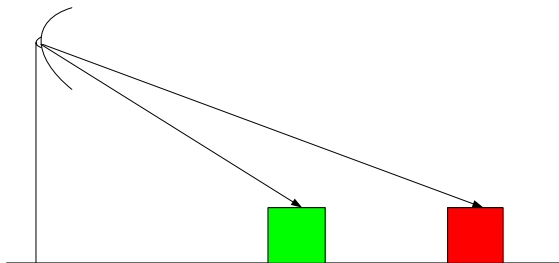
Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Το Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel - BC)
 - Εισαγωγή και Ορισμοί
 - Περιοχή Χωρητικότητας
- 2 Υποβαθμισμένο (degraded) BC
 - Ορισμός και περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση
- 3 Γκαουσιανό BC
 - Περιοχή χωρητικότητας
 - Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση

Αντιστοιχία με συγγράμματα

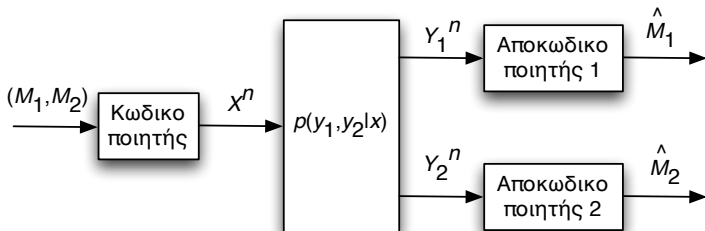
- Cover & Thomas: 15.1.3, 15.6
- Tse & Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication (δωρεάν πρόσβαση στην ιστοσελίδα του David Tse): 6.2 (για το Γκαουσιανό BC).
- El Gamal & Kim, Lecture Notes on Network Information Theory (δωρεάν πρόσβαση στην ιστοσελίδα του Young-Han Kim): Κεφάλαιο 5.

Κανάλι Ευρυεκπομπής (Broadcast Channel -- BC)



- Ένας κεντρικός σταθμός που στέλνει διαφορετική πληροφορία (στη γενική περίπτωση) σε πολλούς χρήστες. Παράδειγμα: Σταθμός βάσης προς κινητά τερματικά (downlink).
- Το γενικό BC δεν έχει επιλυθεί (ακόμα;). Γνωρίζουμε, όμως, την περιοχή χωρητικότητας για την περίπτωση του υποβαθμισμένου (degraded) BC.

Broadcast Channel -- BC -- Ορισμοί



Ορισμός Το κανάλι ευρεκπομπής (2 χρηστών) αποτελείται από ένα αλφάβητο εισόδου, \mathcal{X} , 2 αλφάβητα εξόδου \mathcal{Y}_1 και \mathcal{Y}_2 και ένα πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y_1, y_2|x)$.

BC – Ορισμοί (2)

- Το BC δεν έχει μνήμη όταν $p(y_1^n, y_2^n | x^n) = \prod_{i=1}^n p(y_{1i}, y_{2i} | x_i)$.
- Ένας κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC με ανεξάρτητη πληροφορία ανά χρήστη αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder)
 $X : (\{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}) \rightarrow \mathcal{X}^n$
και 2 αποκωδικοποιητές (decoders) $g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\}$
και $g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}$.
- Μέση πιθανότητα σφάλματος:
 $P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq W_1 \text{ ή } g_2(Y_2^n) \neq W_2\}$, όπου τα (W_1, W_2) θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο $2^{nR_1} \times 2^{nR_2}$.

Ορισμός Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \rightarrow 0$.

BC – Ορισμοί (3)

- Εάν μέρος της πληροφορίας που στέλνει ο πομπός είναι κοινή και για τους δύο δέκτες, οι ορισμοί τροποποιούνται ως εξής:
- Ένας κώδικας $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το BC αποτελείται από έναν κωδικοποιητή (encoder)

$$X : (\{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}) \rightarrow \mathcal{X}^n \text{ και } 2 \text{ αποκωδικοποιητές (decoders)}$$

$$g_1 : \mathcal{Y}_1^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_1}\} \text{ και}$$

$$g_2 : \mathcal{Y}_2^n \rightarrow \{1, 2, \dots, 2^{nR_0}\} \times \{1, 2, \dots, 2^{nR_2}\}.$$

- Μέση πιθανότητα σφάλματος:

$$P_e^{(n)} = \Pr\{g_1(Y_1^n) \neq (W_0, W_1) \text{ ή } g_2(Y_2^n) \neq (W_0, W_2)\}, \text{ όπου τα } (W_0, W_1, W_2) \text{ θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένα στο σύνολο } 2^{nR_0} \times 2^{nR_1} \times 2^{nR_2}.$$

Ορισμός Μια τριάδα ρυθμών μετάδοσης (R_0, R_1, R_2) είναι εφικτή για το BC όταν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $((2^{nR_0}, 2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ με $P_e^{(n)} \rightarrow 0$.

BC – Περιοχή Χωρητικότητας

Ορισμός Η περιοχή χωρητικότητας (capacity region) του BC είναι το κλειστό σύνολο (closure) του συνόλου όλων των εφικτών ρυθμών μετάδοσης.

Θεώρημα (Cover 15.6.1): Η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές $p(y_1|x)$ και $p(y_2|x)$.

- Όπως προαναφέρθηκε, η περιοχή χωρητικότητας του BC δεν είναι γνωστή, στη γενική περίπτωση.

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας

- Αποδεικνύεται ότι (δείτε π.χ. El Gamal & Kim) ότι η παρακάτω περιοχή επιτεύξιμων ρυθμών μετάδοσης είναι υποσύνολο της περιοχής χωρητικότητας.

Κάτω φράγμα χωρητικότητας BC (Κωδικοποίηση με υπέρθεση)

$$\begin{aligned}R_1 &< I(X; Y_1 | U), \\R_2 &< I(U; Y_2), \\R_1 + R_2 &< I(X; Y_1)\end{aligned}$$

για κάποια $p(u, x)$.

- Αποδεικνύεται ότι η περιοχή είναι κυρτή (επομένως, δεν απαιτείται timesharing).

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας – Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση

- Για δεδομένη $p(u, x) = p(u)p(x|u)$, δημιουργούμε 2^{nR_2} “κέντρα συννέφων”, $u^n(m_2)$ με χρήση της $p(u)$.
- Για κάθε κέντρο σύννεφου, $u^n(m_2)$, δημιουργούμε 2^{nR_1} υπό συνθήκη ανεξάρτητες “δορυφορικές” κωδικές λέξεις με χρήση της $p(x|u)$.
- Ο αποκωδικοποιητής 2 αποκωδικοποιεί το κέντρο του σύννεφου, $u^n(m_2)$.
- Ο αποκωδικοποιητής 1 αποκωδικοποιεί τη δορυφορική λέξη.

Κάτω φράγμα περιοχής χωρητικότητας (2)

- Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με αντιστροφή των χρηστών. Δηλαδή,

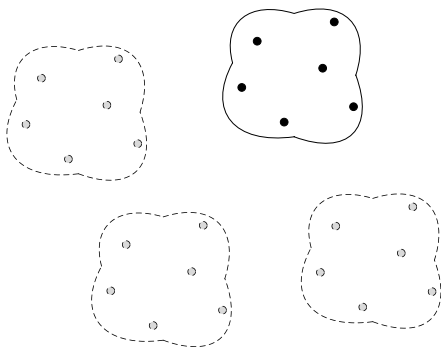
Κάτω φράγμα χωρητικότητας BC (Κωδικοποίηση με υπέρθεση)

$$\begin{aligned}R_1 &< I(U; Y_1), \\R_2 &< I(X; Y_2|U), \\R_1 + R_2 &< I(X; Y_2)\end{aligned}$$

για κάποια $p(u, x)$.

- Η κυρτή γάστρα (convex hull) της ένωσης των δύο αυτών κάτω φραγμάτων αποτελεί κάτω φράγμα της περιοχής χωρητικότητας του BC.

Superposition Coding



- Ο ένας δέκτης εκτιμά μόνο ποιο από τα “σύννεφα” έχει σταλεί.
- Ο άλλος δέκτης εκτιμά το σύννεφο και την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

Υποβαθμισμένο (degraded) BC

Ορισμός Ένα BC είναι φυσικώς υποβαθμισμένο (physically degraded) εάν $p(y_1, y_2|x) = p(y_1|x)p(y_2|y_1)$.

Ορισμός Ένα BC είναι στοχαστικώς υποβαθμισμένο (stochastically degraded) εάν οι υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές είναι οι ίδιες με αυτές ενός φυσικώς υποβαθμισμένου BC. Δηλαδή, εάν υπάρχει κατανομή $p'(y_2|y_1)$ τέτοια ώστε

$$p(y_2|x) = \sum_{y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1).$$

- Δεδομένου ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 15.6.1, η περιοχή χωρητικότητας του BC εξαρτάται μόνο από τις υπό συνθήκη περιθώριες κατανομές, η περιοχή χωρητικότητας του φυσικώς υποβαθμισμένου BC συμπίπτει με αυτήν του στοχαστικώς υποβαθμισμένου BC.

Περιοχή Χωρητικότητας degraded BC

Θεώρημα (Cover 15.6.2): Η περιοχή χωρητικότητας για την αποστολή ανεξάρτητης πληροφορίας στο υποβαθμισμένο BC είναι η κυρτή γάστρα (convex hull) του κλειστού συνόλου (closure) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

Περιοχή εφικτών ρυθμών μετάδοσης υποβαθμισμένου BC

$$\begin{aligned} R_2 &\leq I(U; Y_2), \\ R_1 &\leq I(X; Y_1 | U), \end{aligned}$$

για κάποια από κοινού κατανομή $p(u)p(x|u)p(y_1, y_2|x)$, όπου για τον αριθμό στοιχείων (cardinality) του συνόλου της βοηθητικής τ.μ. U ισχύει $|\mathcal{U}| \leq \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}_1|, |\mathcal{Y}_2|\}$.

- Αποδεικνύεται ότι η σχέση $R_1 + R_2 < I(X; Y_1)$ ικανοποιείται στο degraded BC όταν ικανοποιούνται οι άλλες δύο.

Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο degraded BC

Η βασική ιδέα:

- Ο δέκτης 1 γνωρίζει όλη την πληροφορία που γνωρίζει ο δέκτης 2. Αντίθετα, ο δέκτης 2 γνωρίζει λιγότερη πληροφορία από το δέκτη 1.
- Επομένως, ο δέκτης 1 μπορεί να αποκωδικοποιήσει την πληροφορία που προορίζεται για το δέκτη 2.
- Κωδικοποιούμε το μήνυμα W_2 που προορίζεται για το δέκτη 2 με χρήση της τ.μ. U (2^{nR_2} πιθανές κωδικές λέξεις).
- Ανάλογα με την τιμή της U , από τη σκοπιά του χρήστη 1 βλέπουμε ένα από 2^{nR_2} πιθανά κανάλια. Ανάλογα με το κανάλι και το μήνυμα W_1 επιλέγουμε την τιμή της τ.μ. $X(W_1, W_2)$ (2^{nR_1} πιθανές κωδικές λέξεις για δεδομένη $U(W_2)$, $2^{n(R_1+R_2)}$ συνολικά) → κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).

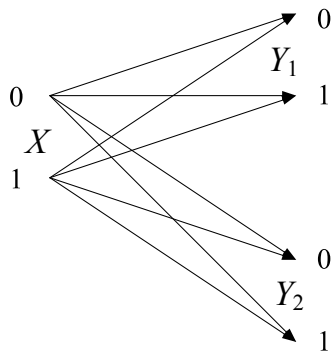
Κωδικοποίηση και αποκωδικοποίηση στο degraded BC (συνέχεια)

- Ο χρήστης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το W_2 , αλλά όχι το W_1 .
- Ο (καλύτερος) χρήστης 1 ξεκινά αποκωδικοποιώντας το W_2 . Στη συνέχεια, με βάση την τιμή της U προχωρά στην αποκωδικοποίηση του W_1 .
- Διαφορά με το MAC: η αποκωδικοποίηση ξεκινά πάντοτε από την πληροφορία του χειρότερου χρήστη. Επίσης, ο αριθμός των αποκωδικοποιήσεων διαφέρει σε κάθε δέκτη.

Degraded BC: Μετάδοση κοινής πληροφορίας

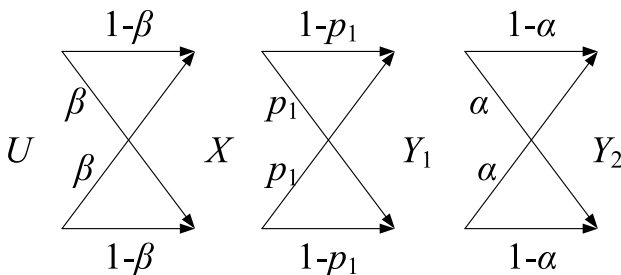
Θεώρημα (Cover 15.6.4): Εάν το ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό σε degraded BC όπου αποστέλλεται ανεξάρτητη πληροφορία, τότε, η τριάδα $(R_0, R_1, R_2 - R_0)$ είναι εφικτή όταν στέλνονται R_0 bits κοινής πληροφορίας, εφόσον $R_0 < R_2$.

Παράδειγμα 12.1 (Cover 15.6.5)



- Το κανάλι μπορεί να εκφραστεί ως degraded BC. Έστω, χωρίς απώλεια γενικότητας, ότι $p_1 < p_2 < 0.5$. Μπορούμε να εκφράσουμε το κανάλι ως διαδοχή δύο BSC, όπως φαίνεται στην επόμενη διαφάνεια.

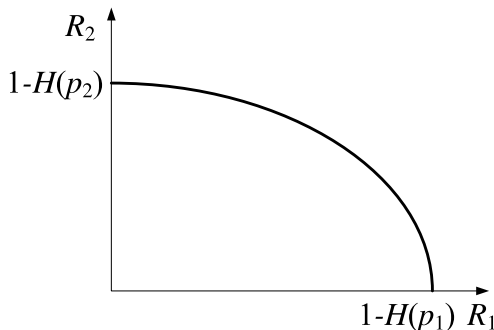
Παράδειγμα 12.1 (Cover 15.6.5) (2)



- Πρέπει να ισχύει $p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\alpha = p_2 \Rightarrow \alpha = \frac{p_2 - p_1}{1 - 2p_1}$.
- Από το Θεώρημα 15.6.2, $|\mathcal{U}| \leq 2$. Επομένως, επιλέγουμε δυαδική U . $\Pr\{X = U\} = 1 - \beta$.
- $I(U; Y_2) = H(Y_2) - H(Y_2|U)$. Η εντροπία της Y_2 μεγιστοποιείται με χρήση ομοιόμορφης U . Επομένως, $I(U; Y_2) = 1 - H(\beta * p_2)$, με $\beta * p_2 = \beta(1 - p_2) + (1 - \beta)p_2$.

Παράδειγμα 12.1 (Cover 15.6.5) (3)

- Ομοίως, $I(X; Y_1|U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X, U) = H(Y_1|U) - H(Y_1|X) = H(\beta * p_1) - H(p_1)$.
- Μεταβάλλοντας την τιμή της β , μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιοχή χωρητικότητας.



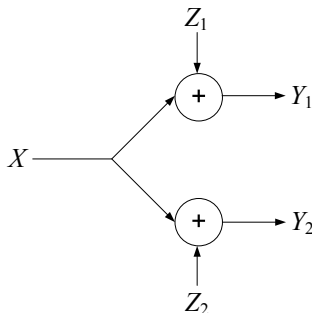
Γκαουσιανό BC

- Θεωρούμε το κανάλι 2 χρηστών

$$Y_1 = X + Z_1,$$

$$Y_2 = X + Z_2,$$

όπου $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2)$, $N_2 \geq N_1$.



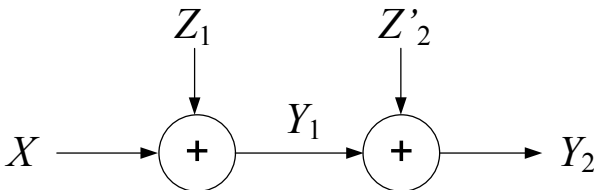
Γκαουσιανό BC (2)

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι το Γκαουσιανό BC είναι ισοδύναμο με το degraded BC

$$Y_1 = X + Z_1,$$

$$Y_2 = Y_1 + Z'_2,$$

με $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, N_1)$ και $Z'_2 \sim \mathcal{N}(0, N_2 - N_1)$.



Περιοχή Χωρητικότητας Γκαουσιανού BC

- Για το Γκαουσιανό Κανάλι 2 χρηστών, οι ανισότητες που ορίζουν την περιοχή χωρητικότητας παίρνουν τη μορφή

Περιοχή χωρητικότητας Γκαουσιανού BC

$$R_1 < C \left(\frac{\alpha P}{N_1} \right) \text{ και}$$
$$R_2 < C \left(\frac{(1 - \alpha)P}{\alpha P + N_2} \right),$$

$$\text{με } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό BC

Κωδικοποίηση:

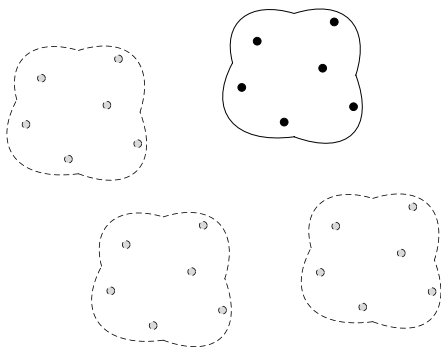
- Ο πομπός δημιουργεί 2 βιβλία κωδίκων: Ένα με ισχύ αP και ρυθμό μετάδοσης R_1 και ένα με ισχύ $(1 - \alpha)P$ και ρυθμό R_2 (το ζεύγος (R_1, R_2) πρέπει να βρίσκεται μέσα στην περιοχή χωρητικότητας).
- Στην ειδική περίπτωση του Γκαουσιανού BC, οι κωδικές λέξεις για κάθε χρήστη δημιουργούνται *ανεξάρτητα*.
- Πλεονέκτημα Γκαουσιανού BC: Όπως και στο MAC, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε καλούς κώδικες που έχουν σχεδιαστεί για το κανάλι AWGN.
- Αν w_1 και w_2 είναι τα μηνύματα που στέλνονται στο χρήστη 1 και 2, αντίστοιχα, ο πομπός στέλνει στο κανάλι το *άθροισμα* των κωδικών λέξεων $\mathbf{X}_1(w_1) + \mathbf{X}_2(w_2)$.

Κωδικοποίηση και Αποκωδικοποίηση στο Γκαουσιανό BC (2)

Αποκωδικοποίηση:

- Ο (χειρότερος) δέκτης 2 βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα \mathbf{Y}_2 (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας). Το μήνυμα του δέκτη 1 αποτελεί θόρυβο για το δέκτη 2.
- Ο (καλύτερος) δέκτης 1 αρχίζει βρίσκοντας την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_2$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο ληφθέν σήμα \mathbf{Y}_2 . Μπορεί να ανιχνεύσει τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ γιατί έχει χαμηλότερο θόρυβο από το δέκτη 2. Στη συνέχεια, αφαιρεί τη $\hat{\mathbf{X}}_2$ από το ληφθέν σήμα \mathbf{Y}_1 και βρίσκει την κωδική λέξη $\hat{\mathbf{X}}_1$ η οποία βρίσκεται πιο κοντά στο σήμα $\mathbf{Y}_1 - \hat{\mathbf{X}}_2$ (ή αποκωδικοποιεί με χρήση από κοινού τυπικότητας).
- Στο Γκαουσιανό BC (και, γενικά, στο degraded BC) κάθε δέκτης γνωρίζει την πληροφορία των δεκτών που είναι χειρότεροι από αυτόν.

Superposition Coding για το Γκαουσιανό BC

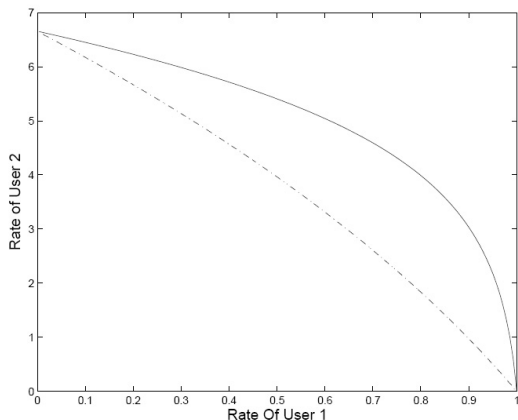


- Ο κακός δέκτης εκτιμά μόνο ποιο από τα “σύννεφα” έχει σταλεί.
- Ο καλός δέκτης εκτιμά το σύννεφο και, στη συνέχεια, την κωδική λέξη μέσα στο σύννεφο.

FDMA/TDMA downlink

- Ποια είναι η απόδοση ορθογώνιων τρόπων πολύπλεξης στο Γκαουσιανό BC;
- Αποδεικνύεται ότι η μετάδοση με FDMA/TDMA είναι υποβέλτιστη, εκτός από 2 περιπτώσεις:
 1. Τα ακραία σημεία της περιοχής χωρητικότητας όπου μεταδίδεται πληροφορία μόνο σε ένα χρήστη
 2. Στην περίπτωση που ο θόρυβος είναι ο ίδιος και στους 2 δέκτες.
- Η διαφορά στην απόδοση μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η διαφορά μεταξύ των ισχύων θορύβου των χρηστών.

FDMA/TDMA downlink (2)



Ανακεφαλαίωση MAC και BC

- Multiple Access Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή και, στη γενική περίπτωση, μια ένωση πενταγώνων.
 - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με ταυτόχρονη μετάδοση των χρηστών.
 - Στο δέκτη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαδοχική αποκωδικοποίηση: οι χρήστες αποκωδικοποιούνται σειριακά και το αποκωδικοποιημένο σήμα αφαιρείται (onion peeling). Η σειρά αποκωδικοποίησης εξαρτάται από το σημείο της περιοχής χωρητικότητας στο οποίο γίνεται η μετάδοση.

Ανακεφαλαίωση MAC και BC (2)

- Broadcast Channel: Η περιοχή χωρητικότητας είναι κυρτή.
 - Μετάδοση επάνω στο όριο της περιοχής χωρητικότητας επιτυγχάνεται με κωδικοποίηση υπέρθεσης (superposition coding).
 - Ο κάθε δέκτης αποκωδικοποιεί την πληροφορία που προορίζεται για όλους τους χειρότερους δέκτες και εφαρμόζει οπιοn peeling πριν αποκωδικοποιήσει τη δική του πληροφορία.
- Τόσο στο Γκαουσιανό MAC όσο και στο Γκαουσιανό BC, μετάδοση με ορθογώνια πολυπλεξία (FDMA/TDMA) είναι, στη γενική περίπτωση, υποβέλτιστη.