EE728
Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
10η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

7 Μαΐου 2010

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cover & Thomas: 9.3–9.4
- Gallager: 8.3 (Ολόκληρο το Κεφάλαιο 8 για όσους ενδιαφέρονται για όλες τις λεπτομέρειες).

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument)

- Διαισθητικά, το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά κανάλια μπορεί περιγραφεί με το ακόλουθο γεωμετρικό επιχείρημα.
- Μια κωδική λέξη x^n αποτελεί ένα διάνυσμα στο $n-$διάστατο χώρο. Επομένως, η ακολουθία y^n που λαμβάνεται στο δέκτη και αντιστοιχεί στο x^n βρίσκεται μέσα σε μια $n-$διάστατη σφαίρα με κέντρο x^n και ακτίνα $\approx \sqrt{n(N+\epsilon)}$. Καθώς το n αυξάνει, η y^n βρίσκεται μέσα στη σφαίρα με ολοένα αυξανόμενη πιθανότητα (και με $\epsilon \to 0$).

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (2)

- Μάλιστα, με πιθανότητα που τείνει στο 1, το διάνυσμα βρίσκεται στο φλοιό της σφαίρας (δείτε και Φυλλάδιο 10).
- Έστω σφαίρα n διαστάσεων. Ο όγκος της δίνεται από τη σχέση $C_n r^n$. Επομένως, ο λόγος του όγκου του φλοιού πάχους $\epsilon > 0$ προς τον όγκο της σφαίρας ισούται με

$$\frac{r^n - (r-\epsilon)^n}{r^n} = 1 - \left(1 - \frac{\epsilon}{r}\right)^n \to 1 \text{ για } n \to \infty.$$

- Με χρήση του νόμου των μεγάλων αριθμών, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$ και ακολουθία $\mathbf{x} = x^n$, το διάνυσμα $\mathbf{x} + \mathbf{z}$ να βρίσκεται στο φλοιό σφαίρας n διαστάσεων πάχους ϵ με κέντρο $\mathbf{x}$ και ακτίνα $n\mathbb{E}[||\mathbf{z}||^2]$ με πιθανότητα αυθαίρετα κοντά στο 1.

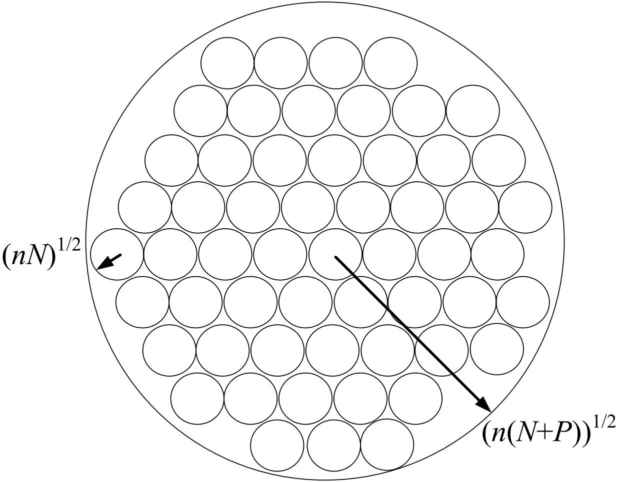
Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (3)

- Για μεγάλο n, ο χώρος όλων των πιθανών ακολουθιών στο δέκτη έχει ακτίνα περίπου ίση με $\sqrt{n(P+N)}$. Δεδομένου ότι σε κάθε x^n αντιστοιχεί μια σφαίρα ακτίνας περίπου $\sqrt{nN}$ και ότι ο όγκος μιας $n-$διάστατης σφαίρας ισούται με $C_n r^n$, ο αριθμός "σφαιρών" που αντιστοιχούν σε μηνύματα και τις οποίες μπορούμε να χωρέσουμε στο χώρο όλων των y^n προκειμένου αυτές να μην επικαλύπτονται (και, επομένως, να μη γίνονται σφάλματα εκτίμησης στο δέκτη) δεν μπορεί να υπερβεί τις

$$\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n} \Rightarrow \log\left(\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

Γεωμετρικό Επιχείρημα (Sphere Packing Argument) (4)



Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Στη φύση, τα κανάλια είναι όχι μόνο συνεχών τιμών αλλά και συνεχούς χρόνου (waveform channels).
- Το Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου και πεπερασμένου εύρους ζώνης, W, δίνεται από τη σχέση

  $$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

  όπου $Z(t)$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με $f_{\max} = W$.
- Από το Θεώρημα Δειγματοληψίας Nyquist-Shannon-Kotelnikov γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε βαθυπερατό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς απώλεια πληροφορίας με χρήση τουλάχιστον $2W$ δειγμάτων του ανά δευτερόλεπτο.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (2)

- Συνεπώς, για σήματα $X(t)$ τα οποία δεν έχουν φασματικό περιεχόμενο σε συχνότητες μεγαλύτερες της W, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματά τους και, επομένως, διακριτό μοντέλο καναλιού.
- Για πληρέστερη δικαιολόγηση δείτε π.χ. Cover 9.3. Για μια εξαντλητική εξέταση του προβλήματος με όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες δείτε Gallager, Chapter 8.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (3)

- Έστω ότι παρατηρούμε το σήμα $X(t)$ εύρους ζώνης W για T s. Εάν η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) της $Z(t)$ ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$, η ισχύς του θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}2W = \mathcal{N}_0 W$. Επομένως, η διασπορά κάθε δείγματος θορύβου (από τα $2WT$, συνολικά) ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0 WT}{2WT} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$.
- Η ενέργεια ανά δείγμα ισούται με $\frac{PT}{2WT} = \frac{P}{2W}$.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα λευκού Γκαουσιανού θορύβου είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) Γκαουσιανές τ.μ.

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (4)

- Συνεπώς, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού με πεπερασμένο εύρος ζώνης ισούται με

Χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού πεπερασμένου εύρους ζώνης W

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{P}{2W}}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/δείγμα} \Rightarrow$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/s.}$$

Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (5)

Χωρητικότητα Γκαουσιανού καναλιού εύρους ζώνης W

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \text{ bits/s}$$

Παρατηρήσεις:

- Η χωρητικότητα έχει λογαριθμική εξάρτηση από την ισχύ. Επομένως, καθώς αυξάνουμε την ισχύ, το "κέρδος" που αποκομίζουμε μειώνεται.
- Ή αλλιώς: Για δεδομένη ισχύ, εάν είναι διαθέσιμα δύο Γκαουσιανά κανάλια (ταυτόχρονα) με ίδιο θόρυβο, είναι καλύτερο να μοιράσουμε την ισχύ στα κανάλια.
- Για $W \to \infty$, $C = \frac{P}{N_0} \log_2 e$ bits/s. Επομένως, για άπειρο εύρος ζώνης, η χωρητικότητα αυξάνει γραμμικά με την ισχύ.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

- Έστω k παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση πληροφορίας.
  - Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου με έγχρωμο θόρυβο (με διαφορετική, δηλαδή, πυκνότητα ισχύος σε κάθε συχνότητα). Το κανάλι σε κάθε συχνότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Γκαουσιανό. Τυπικό παράδειγμα: Συστήματα DSL.
  - Το μοντέλο παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί σε κανάλια με διαλείψεις (fading). Στην περίπτωση επίπεδων (flat) διαλείψεων το κάθε ένα από τα k κανάλια αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (2)

- Επομένως, για το κανάλι j,

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \text{και}\ Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

- Τέλος, θεωρούμε ότι η *συνολική* ισχύς που είναι διαθέσιμη για μετάδοση είναι πεπερασμένη. Δηλαδή, $\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k} X_j^2\right] \leq P$.
- Ποια είναι η χωρητικότητα του συστήματος και πώς επιτυγχάνεται;

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (3)

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα των k παράλληλων καναλιών ισούται με

$$C = \max_{f(x_1, x_2, \ldots, x_k): \sum \mathbb{E}X_i^2 \leq P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

- Αποδεικνύεται ότι, και για τα παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια, η "λειτουργική" χωρητικότητα ισούται με την "πληροφοριακή".
- Δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned}
& I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k) \\
& = h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i)
\end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (4)

$$
\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
&\overset{(a)}{\leq} \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \overset{(b)}{\leq} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),
\end{aligned}
$$

όπου $P_i = \mathbb{E}X_i^2$.

- Η ισότητα στο (a) ισχύει όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες (και, επομένως, οι X_i, δεδομένου ότι οι Z_i είναι ανεξάρτητες). Η ισότητα στο (b) ισχύει για Γκαουσιανές X_i.
- Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε

$$
(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{bmatrix}\right).
$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (5)

- Απομένει να βρούμε την κατανομή ισχύος (δηλαδή τα $P_i : \sum_i P_i \leq P$) η οποία μεγιστοποιεί την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.
- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \text{μεγιστοποίησε την ποσότητα} \quad & \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right) \\ \text{με τον περιορισμό} \quad & \sum_i P_i = P \end{aligned}$$

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (6)

- Με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (βλ. π.χ. Cover 9.4) αποδεικνύεται ότι η λύση δίνεται από την

$$P_i = (\nu - N_i)^+,$$

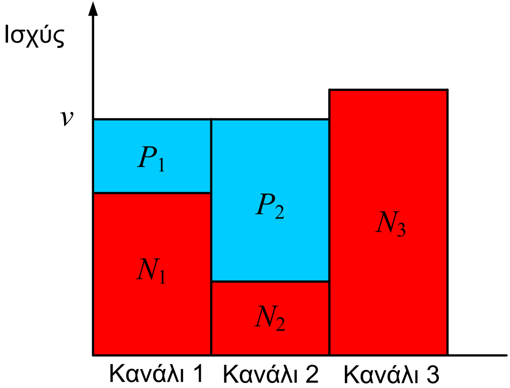
όπου

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{εάν} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad x < 0 \end{cases}$$

και $\sum_i (\nu - N_i)^+ = P$.

Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – Waterfilling

- Η κατανομή ισχύος ονομάζεται waterfilling (ή waterpouring) γιατί η διαθέσιμη ισχύς χρησιμοποιείται για να "γεμίσει" δοχεία με ύψος πάτου ανάλογο της ισχύος του θορύβου.



Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – Waterfilling (2)

- Στην πράξη, ο αλγόριθμος waterfilling, μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής (βλ. και Cioffi `http://www.stanford.edu/group/cioffi/book/chap4.pdf`).
  1. Έστω ότι K^* είναι ο αριθμός των καναλιών που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση (όπου, δηλαδή, $P_i > 0$). Αρχικά υποθέτουμε ότι όλα τα κανάλια είναι "ενεργά" και τα κατατάσσουμε ως προς το θόρυβο. Το κανάλι 1 έχει τη μικρότερη διασπορά θορύβου ($N_i \leq N_j$ για $i < j$).
  2. Επομένως, $K^* = K$, $P_i = (\nu - N_i)$, και $P = \sum_{i=1}^{K} P_i = K\nu - \sum_{i=1}^{K} N_i$.
  3. Λύνουμε ως προς τον άγνωστο ν.
  4. Θεωρούμε το κανάλι K^* με το μεγαλύτερο θόρυβο.
     - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} \leq 0$, και τα K^* κανάλια χρησιμοποιούνται (εκτός, πιθανώς, από κάποια με $P_i = 0$) και η βέλτιστη κατανομή δίνεται από τα $P_i = \nu - N_i, i = 1, \ldots, K^*$.
     - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} < 0$, το κανάλι K^* δε χρησιμοποιείται και το αφαιρούμε. Θέτουμε $K^* = K^* - 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα 3.