EE728
Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας
4η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

17 Μαρτίου 2010

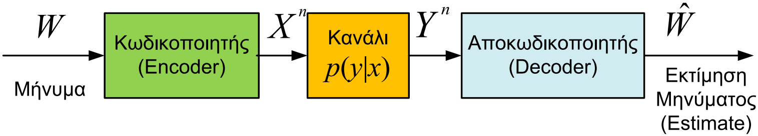
Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cover & Thomas: 7.1
- Gallager: 4.1 – 4.2

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή

- Έως τώρα το ενδιαφέρον εστιάστηκε στη βέλτιστη συμπίεση της πληροφορίας που παράγει μια πηγή.
- Το δεύτερο μεγάλο κεφάλαιο της Θεωρίας Πληροφορίας ασχολείται με τη μετάδοση πληροφορίας μέσω ενός καναλιού.



- Στο σχήμα, η πηγή θέλει να μεταδώσει ένα μήνυμα W μέσω ενός καναλιού. Το κανάλι παραμορφώνει/αλλάζει το μήνυμα.

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (2)

- Πόση είναι η μέγιστη πληροφορία που μπορεί να μεταδοθεί ανά χρήση του καναλιού;
- Πώς αυτή εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του καναλιού;
- Πώς επιτυγχάνεται μετάδοση του μέγιστου αυτού ποσού πληροφορίας;

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (3)

- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" είδαμε ότι, για κανάλια χωρίς μνήμη, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης ονομάζεται χωρητικότητα (capacity) του καναλιού C και ισούται (για κανάλι διακριτού χρόνου) με $\max_{p(x)} I(X;Y)$ (Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού – θα το αποδείξουμε σύντομα).
- Σε κανάλια με μνήμη ο χαρακτηρισμός είναι πιο σύνθετος και δεν ορίζεται πάντοτε μια μοναδική τιμή χωρητικότητας.
  - Δείτε π.χ. Gallager 4.6

Διακριτά Κανάλια – Εισαγωγή (4)

- Δεν είναι προφανές εάν η συμπίεση της πηγής πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη το κανάλι στο οποίο θα μεταδοθεί η πληροφορία ή εάν η κωδικοποίηση πηγής και η κωδικοποίηση καναλιού μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα. Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού εξασφαλίζει ότι οι δύο κωδικοποιήσεις μπορούν να γίνουν ανεξάρτητα στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.
- Επομένως, εάν για μια πηγή ισχύει $H(\mathcal{X}) < C$, η πληροφορία που παράγει η πηγή μπορεί να μεταδοθεί μέσω του καναλιού με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος.
- Το Θεώρημα Διαχωρισμού Πηγής-Καναλιού ενοποιεί τη συμπίεση και την κωδικοποίηση καναλιού (για διακριτά κανάλια ενός χρήστη, χωρίς μνήμη).

Διακριτά κανάλια – Ορισμοί

Ορισμός Ένα διακριτό κανάλι $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ αποτελείται από δύο πεπερασμένα σύνολα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και ένα σύνολο δεσμευμένων συναρτήσεων μάζας πιθανότητας $p(y|x)$, μια για κάθε $x \in \mathcal{X}$, ώστε, για κάθε x και y, $p(y|x) \geq 0$ και, για κάθε x, $\sum_y p(y|x) = 1$. Η τ.μ. X είναι η είσοδος του καναλιού και η Y η έξοδός του.

Ορισμός Έστω ότι χρησιμοποιούμε ένα διακριτό κανάλι n φορές. Ορίζουμε τη n-οστή επέκταση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη $(\mathcal{X}^n, p(y^n|x^n), \mathcal{Y}^n)$, όπου

$$p(y_k|x^k, y^{k-1}) = p(y_k|x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Μετάδοση σε διακριτά κανάλια χωρίς ανάδραση

- Εάν το κανάλι *χωρίς μνήμη* χρησιμοποιείται χωρίς ανάδραση, δηλαδή η είσοδος στο κανάλι δεν εξαρτάται από τις εξόδους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, $p(x_k|x^{k-1}, y^{k-1}) = p(x_k|x^{k-1})$, και

$$p(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i).$$

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

Ορισμός "Πληροφοριακή" Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

``Information'' Channel Capacity

$$C \triangleq \max_{p(x)} I(X;Y)$$

Παραδείγματα Διακριτών Καναλιών Χωρίς Μνήμη

(Επανάληψη από το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας")

- Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel -- BSC): $C = 1 - H(p)$ bits, επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφή (Binary Erasure Channel): $C = 1 - \alpha$, όπου α η πιθανότητα διαγραφής. Επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- Η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού με διαγραφή παραμένει η ίδια εάν χρησιμοποιήσουμε ανάδραση.
- Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, δηλαδή ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα, ισχύει γενικά για όλα τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.