# EE728

# Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

10ο Μάθημα – 20 Μαΐου 2009

# Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- Θα εξετάσουμε μεγέθη της Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ.
- Θα επεκτείνουμε το AEP στην περίπτωση συνεχών τ.μ.
- Θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού και τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με πεπερασμένο εύρος ζώνης.
- Θα εξετάσουμε τη χωρητικότητα συστήματος από παράλληλα και ανεξάρτητα κανάλια AWGN και την τεχνική Waterfilling.
- Θα αρχίσουμε τη μελέτη του καναλιού Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC).

# Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- $\boxed{\text{Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες}}$
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

# Από κοινού και υπό συνθήκη Διαφορική Εντροπία

Οι ορισμοί είναι παρόμοιοι με αυτούς για διακριτές τ.μ.

- Από κοινού διαφορική εντροπία: $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = -\int f(x^n) \log f(x^n) dx^n$, όπου $f(x^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Υπό συνθήκη διαφορική εντροπία: $h(X|Y) = -\int f(x, y) \log f(x|y) dx dy$.

- Όπως και στην περίπτωση διακριτών τ.μ., εάν όλες οι ποσότητες είναι πεπερασμένες,

$$h(X|Y) = h(X, Y) - h(Y).$$

# Παράδειγμα 10.1 – Διαφορική Εντροπία πολυμεταβλητής Γκαουσιανής τ.μ.

- Έστω τ.μ. που ακολουθεί πολυμεταβλητή Γκαουσιανή κατανομή:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n |K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

όπου $(\cdot)^T$ υποδηλώνει αναστροφή (διανύσματος ή πίνακα), $K$ είναι ο πίνακας συσχέτισης και $|K|$ η ορίζουσα του $K$.

- Αποδεικνύεται (με χρήση του ορισμού και πράξεις – Cover Theorem 8.4.1) ότι

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h(\mathcal{N}_n(\mathbf{m}, K)) = \frac{1}{2}\log(2\pi e)^n |K| \text{bits}.$$

- Για πραγματική τ.μ. $X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mathbf{m})^2}{2\sigma^2}}$, $h(X) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$ bits.

# Σχετική Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία για συνεχείς τ.μ.

- Σχετική Εντροπία (Απόσταση Kullback-Leibler): $D(f||g) = \int f \log \frac{f}{g}$. Πεπερασμένη μόνο εφόσον το πεδίο ορισμού της $f$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $g$.

- Εάν ορίζεται από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για τις τ.μ. $X$ και $Y$, η Αμοιβαία Πληροφορία ορίζεται ως

$$I(X;Y) = D(f(x,y)||f(x)f(y)) = \int f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)f(y)} dxdy.$$

- Όπως και για τις διακριτές τ.μ., $I(X;Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X) + h(Y) - h(X,Y)$.

# Σχετική Εντροπία και Αμοιβαία Πληροφορία για συνεχείς τ.μ. (2)

- Εάν δεν ορίζεται $f(x, y)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πλέον γενικός ορισμός της Αμοιβαίας Πληροφορίας

$$I(X;Y) = \sup_{\text{όλες οι } \mathcal{P},\mathcal{Q}} I([X]_{\mathcal{P}};[Y]_{\mathcal{Q}}),$$

όπου $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$ πεπερασμένες διαμερίσεις (partitions) των $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και $[X]_{\mathcal{P}}$, $[Y]_{\mathcal{Q}}$ οι κβαντίσεις των $X$ και $Y$ ως προς τις διαμερίσεις $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$, αντίστοιχα (περισσότερες λεπτομέρειες στο βιβλίο του Cover).

# Ιδιότητες Σχετικής Εντροπίας και Αμοιβαίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ.

- $D(f||g) \geq 0$, με ισότητα όταν $f = g$ σχεδόν παντού.

  Απόδειξη: Εάν $S$ είναι το πεδίο ορισμού της $f$,

$$-D(f||g) = \int_S f \log \frac{g}{f} \stackrel{(a)}{\leq} \log \int_S f \frac{g}{f} = \log \int_S g \stackrel{(b)}{\leq} \log 1 = 0.$$

  $(a)$ γιατί; $(b)$ $S$ υποσύνολο του πεδίου ορισμού της $g$.

- $I(X;Y) \geq 0$ με $=$ εάν και μόνο εάν $X$ και $Y$ ανεξάρτητες. Γιατί;

# Ιδιότητες Σχετικής Εντροπίας και Αμοιβαίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. (2)

- $h(X|Y) \leq h(X)$ με $=$ εάν και μόνο εάν $X$ και $Y$ ανεξάρτητες.

- Κανόνας αλυσίδας για τη Διαφορική Εντροπία: $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} h(X_i|X_1, X_2, \ldots, X_{i-1})$. Αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό της Από Κοινού Διαφορικής Εντροπίας.

- $h(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \sum h(X_i)$, με $=$ εάν και μόνο εάν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες.

# Άλλες Ιδιότητες Διαφορικής Εντροπίας

- $h(X + c) = h(X)$. Προκύπτει κατ΄ ευθείαν από τον ορισμό.
  - Η διαφορική εντροπία είναι αναλλοίωτη σε μετάθεση.
  - Αντίστοιχη ιδιότητα για διακριτές τ.μ.: η εντροπία διακριτών τ.μ. εξαρτάται μόνο από την κατανομή τους και όχι από τις τιμές τους.

- $h(aX) = h(X) + \log|a|$. Για την απόδειξη δείτε π.χ. Cover Theorem 8.6.4.
  - Διαισθητικά λογικό: Η τ.μ. παίρνει, πλέον, τιμές, σε διάστημα διαφορετικού μήκους.

- $h(A\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}) + \log|\det(A)|$, όπου $\det(A)$ η ορίζουσα του $A$.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας

- Έστω τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ με μέση τιμή $\mathbf{m} = 0$ και πίνακα συσχέτισης $K = E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right]$ (δηλαδή $K_{ij} = EX_iX_j,\ 1 \le i, j \le n$).

  Για την εντροπία της $\mathbf{X}$ ισχύει

  $h(\mathbf{X}) \le \frac{1}{2}\log(2\pi e)^n|K|$, με $=$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, K)$.

- Επομένως, για δεδομένο πίνακα συσχέτισης, η συνεχής κατανομή που μεγιστοποιεί την εντροπία είναι η Γκαουσιανή!

- Θα μας χρησιμεύσει στον υπολογισμό της χωρητικότητας του Γκαουσιανού Καναλιού.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας (2)

- Για βαθμωτή συνεχή τ.μ. $X$ με μέση τιμή $m = 0$ και διασπορά $\sigma^2$, η κατανομή που μεγιστοποιεί την $h(X)$ είναι η $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- Δεδομένου ότι $h(X+c) = h(X)$, μπορούμε να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα και σε τ.μ. με μη μηδενική μέση τιμή.

- Μεταξύ συνεχών τ.μ. με την ίδια <u>ισχύ</u> ($=\sum_i E|X_i|^2 = E\left[\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right] = trace\{E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^T\right]\} = trace\{K\}$), οι πιο "αβέβαιες" είναι αυτές που ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(\mathbf{m}, K)$.

# Μεγιστοποίηση Διαφορικής Εντροπίας – Απόδειξη

- Έστω $g(\mathbf{x})$ οποιαδήποτε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ικανοποιεί τον περιορισμό συσχέτισης $\int g(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = K_{ij}$ για όλα τα $i, j$. Έστω, επίσης $\phi_K$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διανύσματος που ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, K)$:

$$\phi_K(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n |K|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T K^{-1} \mathbf{x}} \Rightarrow \log \phi_K(\mathbf{x}) = A - \frac{1}{2} \log_2 e \cdot \mathbf{x}^T K^{-1} \mathbf{x}$$

- Επίσης, $\int \phi_K(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = K_{ij}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} 0 \le D(g||\phi_K) &= \int g \log\left(\frac{g}{\phi_K}\right) = -h(g) - \int g \log \phi_K \\ &\overset{(a)}{=} -h(g) - \int \phi_K \log \phi_K = -h(g) + h(\phi_K). \end{aligned}$$

$(a)$ Προκύπτει από την παρατήρηση ότι η $\log \phi_K(\mathbf{x})$ είναι τετραγωνική μορφή (άθροισμα όρων της μορφής $a_{ij} x_i x_j$), και από την υπόθεση ότι $\int g(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x} = \int \phi_K(\mathbf{x}) x_i x_j d\mathbf{x}$.

# Σφάλμα Εκτίμησης συνεχούς τ.μ.

- Είδαμε ότι, όταν μια διακριτή τ.μ. $X$ εκτιμάται με βάση την παρατήρηση μιας τ.μ. $Y$, ένα φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος δίνεται από την ανισότητα **Fano**:

$$H(P_e) + P_e \log|\mathcal{X}| \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y).$$

- Για εκτίμηση συνεχών τ.μ., η πιθανότητα σφάλματος δεν έχει νόημα. Πολλές φορές, για να ποσοτικοποιηθεί η επίδοση ενός εκτιμητή χρησιμοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error) $E(X-\hat{X})^2$.

- Θα αποδείξουμε ότι $E(X-\hat{X})^2 \geq \frac{1}{2\pi e}e^{2h(X)}$, με $=$ εάν και μόνο εάν η $X$ είναι γκαουσιανή και $\hat{X} = EX$.

## Σφάλμα Εκτίμησης συνεχούς τ.μ. (συνέχεια)

$$E(X-\hat{X})^2 \geq \min_{\hat{X}} E(X-\hat{X})^2 \stackrel{(a)}{=} E(X-EX)^2$$

$$= var(X) \stackrel{(b)}{\geq} \frac{1}{2\pi e} 2^{2h(X)}.$$

$(a)$ Ο καλύτερος εκτιμητής για τη $X$ είναι η μέση τιμή της (από θεωρία εκτίμησης) $(b)$ Για δεδομένη διασπορά, η τ.μ. με τη μεγαλύτερη εντροπία είναι η Γκαουσιανή. $h(X) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2) \Rightarrow \sigma^2 \geq \frac{1}{2\pi e}2^{2h(X)}$.

- Με χρήση του ίδιου συλλογισμού μπορούμε να δείξουμε ότι, δεδομένης της τ.μ. $Y$,

$$E(X-\hat{X}(Y))^2 \geq \frac{1}{2\pi e} e^{2h(X|Y)}.$$

# **AEP** για συνεχείς τ.μ.

- Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες.
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

# **AEP** για συνεχείς τ.μ.

- Για την περίπτωση συνεχών τ.μ. το **AEP** μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση διακριτών τυχαίων μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα,

  1. $\Pr\{A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$ για $n > n_0$.
  2. $\mathsf{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \leq 2^{n(h(X)+\epsilon)}$ για όλα τα $n$.
  3. $\mathsf{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \geq (1-\epsilon)2^{n(h(X)-\epsilon)}$ για $n > n_0$.

- Παρατηρήστε ότι, για συνεχείς τ.μ., η ποσότητα που αντιστοιχεί στον αριθμό στοιχείων του τυπικού συνόλου $|A_\epsilon^{(n)}|$ είναι ο όγκος $\mathsf{Vol}(A)$ του συνόλου $A$:

$$\mathsf{Vol}(A) = \int_A dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

# **AEP** για συνεχείς τ.μ. (συνέχεια)

- Όσο μικρότερη είναι η εντροπία μιας συνεχούς τ.μ., τόσο μικρότερος είναι ο μέσος όγκος που καταλαμβάνει το σύνολο που περιέχει σχεδόν όλη την πιθανότητα (για δεδομένο $n$).

- Για $n$ σύμβολα (διαστάσεις), $\mathsf{Vol}\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \approx 2^{nh(X)}$. Επομένως, ανά διάσταση, ο "χώρος" στον οποίο περιέχονται οι τυπικές ακολουθίες έχει πλευρά μήκους $\approx 2^{h(X)}$.

# Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι

- Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες.
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

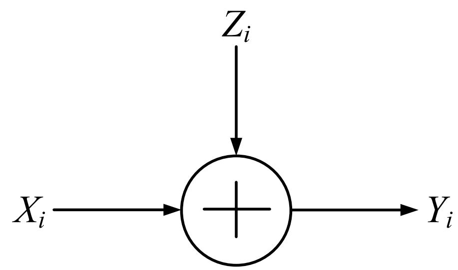
# Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή

- Κανάλι διακριτού χρόνου με συνεχές αλφάβητο.
- Δίνεται από τη σχέση

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N),$$

όπου οι τ.μ. $Z_i$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ανεξάρτητες από τις $X_i$.

- Αποτελεί πολύ καλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για συστήματα επικοινωνιών.



# Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή (2)

- Ποια είναι η χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού; Εξαρτάται από τις υποθέσεις!

- Εάν η διασπορά του θορύβου ισούται με 0, η έξοδος του καναλιού ισούται με την είσοδό του. Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε με άπειρο ρυθμό (χρησιμοποιώντας συνεχές η άπειρο διακριτό αλφάβητο για τη $X$).

- Το ίδιο ισχύει εάν ο θόρυβος έχει πεπερασμένη διασπορά, αλλά δεν υπάρχει περιορισμός πλάτους ή ισχύος της εισόδου. Μπορούμε πάντα να χρησιμοποιήσουμε είσοδο τέτοιου πλάτους ώστε να μπορούμε να ανακτήσουμε το μεταδοθέν σήμα στην έξοδο με πιθανότητα σφάλματος που τείνει στο 0.

- Στην πράξη, ο θόρυβος $Z$ έχει μη μηδενική διασπορά (ισχύ). Επίσης, υπάρχει περιορισμός ως προς τη διαθέσιμη ισχύ της $X$.

# Το Γκαουσιανό Κανάλι – Εισαγωγή (3)

- Στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας" είδαμε ότι, για την περίπτωση πεπερασμένης ισχύος $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq P$, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right) \text{ bits/χρήση καναλιού.}$$

# Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (power contraint) $P$ ορίζεται ως

$$C = \max_{f_X(x): EX^2 \leq P} I(X;Y).$$

- Θα επαναλάβουμε τον υπολογισμό της πληροφοριακής χωρητικότητας Γκαουσιανού καναλιού που παρουσιάστηκε στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας".

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= h(Y) - h(Y|X) = h(Y) - h(X+Z|X) \\ &= h(Y) - h(Z|X) \overset{(a)}{=} h(Y) - h(Z) = h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N. \end{aligned}$$

$(a)$ η $Z$ (θόρυβος) είναι ανεξάρτητη της $X$.

# Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (2)

- Για τη διασπορά της $Y$, και δεδομένου ότι $EZ = 0$, ισχύει

$$EY^2 = E(X+Z)^2 = EX^2 + 2EXEZ + EZ^2 = P + N.$$

- Επομένως, $h(Y) \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N)$, με $=$ όταν η $Y$ ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς,

$$I(X;Y) = h(Y) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N \leq \frac{1}{2}\log 2\pi e(P+N) - \frac{1}{2}\log 2\pi e N \Rightarrow$$
$$C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right).$$

# Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με περιορισμό ισχύος (3)

- $X = Y - N$. Από τη Θεωρία Πιθανοτήτων, ο γραμμικός συνδυασμός δύο Γκαουσιανών τ.μ. ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή. Συνεπώς, όταν η $Y$ ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή, το ίδιο ισχύει και για τη $X$.
- Άρα, η πληροφοριακή χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού επιτυγχάνεται με χρήση Γκαουσιανής εισόδου.
- Απομένει να αποδείξουμε ότι η "πληροφοριακή" χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού ισούται με τη "λειτουργική" του χωρητικότητα.

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι

- Σημείωση: Η απόδειξη του ευθέος είναι παρόμοια με αυτή για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη και δίνεται στο Κεφάλαιο 9.1 του Cover. Θα επισημάνουμε μόνο τις διαφορές.

- Όπως και για το διακριτό κανάλι χωρίς μνήμη, κατασκευάζονται κωδικές λέξεις μήκους $n$. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \le nP,\ w = 1, 2, \ldots, M$, όπου $M$ ο αριθμός των μηνυμάτων (και ίσος με $2^{nR}$).

- Εάν κατασκευάσουμε τα σύμβολα των κωδικών λέξεων με βάση Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, P - \epsilon)$, για μεγάλο $n$, $\frac{1}{n} \sum X_i^2 \to P - \epsilon$ και, επομένως, ο περιορισμός ικανοποιείται με πιθανότητα που τείνει στο 1.

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (2)

- Μετά την κατασκευή του τυχαίου κώδικα, αυτός αποκαλύπτεται τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη. Θεωρούμε ότι η αποκωδικοποίηση στο δέκτη γίνεται με χρήση από κοινού τυπικότητας.

- Σε σύγκριση με τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη, υπάρχει ένα επιπλέον ενδεχόμενο που συμβάλλει στην πιθανότητα σφάλματος: Το ενδεχόμενο η κωδική λέξη που έχει αποσταλεί να μην ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος. Ωστόσο, για μεγάλα $n$ η πιθανότητα αυτή μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. Συνεπώς, και η συνολική πιθανότητα σφάλματος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή, όπως και στην περίπτωση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη.

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο)

- Και για το αντίστροφο, η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή για το αντίστροφο του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.

- Θεωρούμε ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, δηλαδή ότι $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w) \leq P$.

- Επιπλέον, θεωρούμε ότι η κατανομή των $2^{nR}$ μηνυμάτων είναι ομοιόμορφη και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Fano.

$$H(W|\hat{W}) \leq H(P_e^{(n)})+P_e^{(n)} \log|\mathcal{X}| = 1+nP_e^{(n)}R = n\left(\frac{1}{n} + P_e^{(n)}R\right) = n\epsilon_n,$$

όπου $\epsilon_n \to 0$ καθώς $P_e^{(n)} \to 0$.

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (2)

- Όπως και στην περίπτωση διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη, $I(X^n;Y^n) \leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i;Y_i)$.

$$I(X^n;Y^n) = h(Y^n) - h(Y^n|X^n) = h(Y^n) - h(Z^n) \leq \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - h(Z^n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h(Y_i) - \sum_{i=1}^{n} h(Z_i) = \sum_{i=1}^{n} I(X_i, Y_i).$$

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (3)

$$H(W|\hat{W}) \leq H(P_e^{(n)}) + P_e^{(n)} \log |\mathcal{X}| = 1 + nP_e^{(n)}R = n\left(\frac{1}{n} + P_e^{(n)}R\right) = n\epsilon_n,$$

- Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} nR = H(W) = I(W;\hat{W}) + H(W|\hat{W}) &\overset{(a)}{\leq} I(W;\hat{W}) + n\epsilon_n \overset{(b)}{\leq} I(X^n;Y^n) + n\epsilon_n \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} I(X_i, Y_i) + n\epsilon_n. \end{aligned}$$

$(a)$ Ανισότητα Fano, $(b)$ Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων

# Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι (αντίστροφο) (4)

- Ορίζουμε $P_i = \frac{1}{2^{nR}} \sum_w x_i^2(w)$, δηλαδή τη μέση ισχύ του $i-$οστού συμβόλου των κωδικών λέξεων. Επομένως, $EY_i^2 = P_i + N$, και $h(Y) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi e(P_i + N)$.
- Δεδομένου ότι οι κωδικές λέξεις ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος, $\frac{1}{n} \sum_i P_i \leq P$. Επομένως,

$$nR \leq \sum_i I(X_i; Y_i) + n\epsilon_n \leq \sum_i \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P_i}{N}\right) + n\epsilon_n \Rightarrow$$

$$R \leq \sum_i \frac{1}{n} I(X_i; Y_i) + \epsilon_n \overset{(a)}{\leq} \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{N}\right) \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N}\right).$$

$(a)$ από την ανισότητα Jensen.

- Συνεπώς, για $P_e^{(n)} \to 0$, $R \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{N}\right)$ και δεν υπάρχει κώδικας που να ικανοποιεί τον περιορισμό ισχύος και να επιτυγχάνει $R > C$.

# Γεωμετρικό Επιχείρημα (**Sphere Packing Argument**)

- Διαισθητικά, το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά κανάλια μπορεί περιγραφεί με το ακόλουθο γεωμετρικό επιχείρημα.

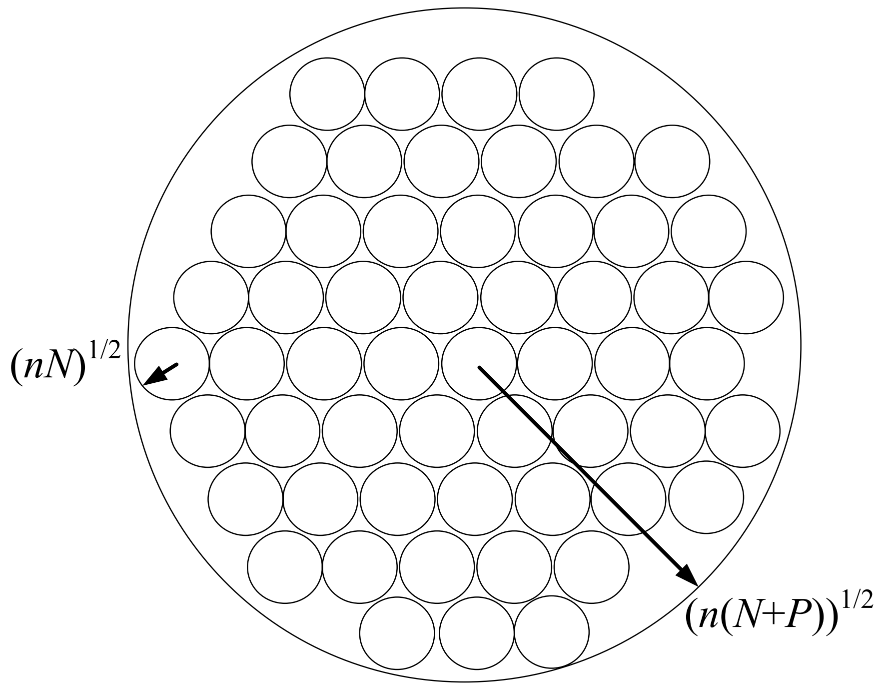
- Μια κωδική λέξη $x^n$ αποτελεί ένα διάνυσμα στο $n-$διάστατο χώρο. Επομένως, η ακολουθία $y^n$ που λαμβάνεται στο δέκτη και αντιστοιχεί στο $x^n$ βρίσκεται μέσα σε μια $n-$διάστατη σφαίρα με κέντρο $x^n$ και ακτίνα $\approx \sqrt{n(N+\epsilon)}$. Καθώς το $n$ αυξάνει, η $y^n$ βρίσκεται μέσα στη σφαίρα με ολοένα αυξανόμενη πιθανότητα (και με $\epsilon \to 0$).

# Γεωμετρικό Επιχείρημα (**Sphere Packing Argument**) (2)

- Για μεγάλο $n$, ο χώρος όλων των πιθανών ακολουθιών στο δέκτη έχει ακτίνα περίπου ίση με $\sqrt{n(P+N)}$. Δεδομένου ότι σε κάθε $x^n$ αντιστοιχεί μια σφαίρα ακτίνας περίπου $\sqrt{nN}$ και ότι ο όγκος μιας $n-$διάστατης σφαίρας ισούται με $C_n r^n$, ο αριθμός "σφαιρών" που αντιστοιχούν σε μηνύματα και τις οποίες μπορούμε να χωρέσουμε στο χώρο όλων των $y^n$ προκειμένου αυτές να μην επικαλύπτονται (και, επομένως, να μη γίνονται σφάλματα εκτίμησης στο δέκτη) δεν μπορεί να υπερβεί τις

$$\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n} \Rightarrow \log\left(\frac{C_n\left(\sqrt{n(P+N)}\right)^n}{C_n\left(\sqrt{nN}\right)^n}\right) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right).$$

# Γεωμετρικό Επιχείρημα (**Sphere Packing Argument**) (3)



# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες.
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης

- Στη φύση, τα κανάλια είναι όχι μόνο συνεχών τιμών αλλά και συνεχούς χρόνου (**waveform channels**).

- Το Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου και πεπερασμένου εύρους ζώνης, $W$, δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t),$$

  όπου $Z(t)$ είναι λευκός Γκαουσιανός θόρυβος και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου με $f_{\max} = W$.

- Από το Θεώρημα Δειγματοληψίας **Shannon-Nyquist** γνωρίζουμε ότι οποιοδήποτε βαθυπερατό σήμα μπορεί να αναπαρασταθεί χωρίς απώλεια πληροφορίας με χρήση τουλάχιστον $2W$ δειγμάτων του ανά δευτερόλεπτο.

# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (2)

- Επομένως, για σήματα $X(t)$ τα οποία δεν έχουν φασματικό περιεχόμενο σε συχνότητες μεγαλύτερες της $W$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα δείγματά τους και, επομένως, διακριτό μοντέλο καναλιού.

- Για πληρέστερη δικαιολόγηση δείτε π.χ. Cover 9.3. Για μια εξαντλητική εξέταση του προβλήματος με όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες δείτε Gallager, Chapter 8.

# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (3)

- Έστω ότι παρατηρούμε το σήμα $X(t)$ εύρους ζώνης $W$ για $T$ s. Εάν η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (PSD) της $Z(t)$ ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}$, η ισχύς του θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}2W = \mathcal{N}_0 W$. Επομένως, η διασπορά κάθε δείγματος θορύβου (από τα $2WT$,συνολικά) ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0 WT}{2WT} = \frac{\mathcal{N}_0}{2}$.

- Η ενέργεια ανά δείγμα ισούται με $\frac{PT}{2WT} = \frac{P}{2W}$.

- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα λευκού Γκαουσιανού θορύβου είναι ανεξάρτητες και ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) Γκαουσιανές τ.μ.

# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (4)

- Συνεπώς, η χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού με περιορισμένο εύρος ζώνης ισούται με

$$C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\frac{P}{2W}}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{ bits/δείγμα} \Rightarrow$$

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{bits/s.}$$

# Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης (5)

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{\mathcal{N}_0 W}\right) \text{bits/s}$$

Παρατηρήσεις:

- Η χωρητικότητα έχει λογαριθμική εξάρτηση από την ισχύ. Επομένως, καθώς αυξάνουμε την ισχύ, το "κέρδος" που αποκομίζουμε μειώνεται.
- Ή αλλιώς: Για δεδομένη ισχύ, εάν είναι διαθέσιμα δύο Γκαουσιανά κανάλια (ταυτόχρονα) με ίδιο θόρυβο, είναι καλύτερο να μοιράσουμε την ισχύ στα κανάλια.
- Για $W \to \infty$, $C = \frac{P}{\mathcal{N}_0} \log_2 e$ bits/s. Επομένως, για άπειρο εύρος ζώνης, η χωρητικότητα αυξάνει γραμμικά με την ισχύ.

# Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια

- Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες.
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- **Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια**
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια

- Έστω $k$ παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μετάδοση πληροφορίας.
  - Για παράδειγμα, μπορεί να έχουμε Γκαουσιανό κανάλι συνεχούς χρόνου με έγχρωμο θόρυβο (με διαφορετική, δηλαδή, πυκνότητα ισχύος σε κάθε συχνότητα). Το κανάλι σε κάθε συχνότητα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Γκαουσιανό. Τυπικό παράδειγμα: Συστήματα DSL.
  - Το μοντέλο παράλληλων Γκαουσιανών καναλιών μπορεί, επίσης, να εφαρμοστεί σε κανάλια με διαλείψεις (fading). Στην περίπτωση επίπεδων (flat) διαλείψεων το κάθε ένα από τα $k$ κανάλια αντιστοιχεί σε μια χρονική στιγμή.

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (2)

- Επομένως, για το κανάλι $j$,

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \text{και } Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j).$$

- Τέλος, θεωρούμε ότι η συνολική ισχύς που είναι διαθέσιμη για μετάδοση είναι πεπερασμένη. Δηλαδή, $E\left[\sum_{j=1}^{k} X_j^2\right] \le P$.

- Ποια είναι η χωρητικότητα του συστήματος και πώς επιτυγχάνεται;

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (3)

- Η "πληροφοριακή" χωρητικότητα των $k$ παράλληλων καναλιών ισούται με

$$C = \max_{f(x_1,x_2,\ldots,x_k):\sum EX_i^2 \le P} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k).$$

- Αποδεικνύεται ότι, και για τα παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια, η "λειτουργική" χωρητικότητα ισούται με την "πληροφοριακή".
- Δεδομένου ότι οι $Z_i$ είναι ανεξάρτητες,

$$\begin{aligned} I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Y_1, \ldots, Y_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k | X_1, \ldots, X_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - h(Z_1, \ldots, Z_k) \\ &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \end{aligned}$$

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (4)

$$
\begin{aligned}
I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) &= h(Y_1, \ldots, Y_k) - \sum_i h(Z_i) \\
&\overset{(a)}{\leq} \sum_i h(Y_i) - h(Z_i) \overset{(b)}{\leq} \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right),
\end{aligned}
$$

όπου $P_i = EX_i^2$.

- Η ισότητα στο $(a)$ ισχύει όταν οι $Y_i$ είναι ανεξάρτητες (και, επομένως, οι $X_i$, δεδομένου ότι οι $Z_i$ είναι ανεξάρτητες). Η ισότητα στο $(b)$ ισχύει για Γκαουσιανές $X_i$.
- Επομένως, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} P_i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{bmatrix}\right)$.

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (5)

- Απομένει να βρούμε την κατανομή ισχύος (δηλαδή τα $P_i : \sum_i P_i \leq P$) η οποία μεγιστοποιεί την $I(X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.

- Πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \text{μεγιστοποίησε την ποσότητα} \quad & \sum_i \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P_i}{N_i}\right) \\ \text{με τον περιορισμό} \quad & \sum_i P_i = P \end{aligned}$$

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια (6)

- Με χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange (βλ. π.χ. Cover 9.4.) ότι η λύση δίνεται από την

$$P_i = (\nu - N_i)^+,$$

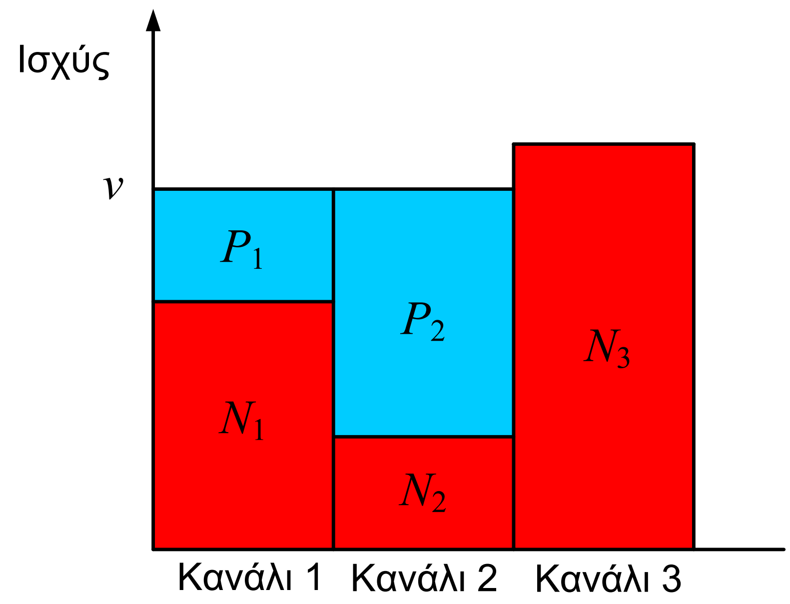
όπου

$$(x)^+ = \begin{cases} x & \text{εάν} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad x < 0 \end{cases}$$

και $\sum_i (\nu - N_i)^+ = P$.

# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling**

- Η κατανομή ισχύος ονομάζεται waterfilling (ή waterpouring) γιατί η διαθέσιμη ισχύς χρησιμοποιείται για να "γεμίσει" δοχεία με ύψος πάτου ανάλογο της ισχύος του θορύβου.



# Παράλληλα Γκαουσιανά Κανάλια – **Waterfilling** (2)

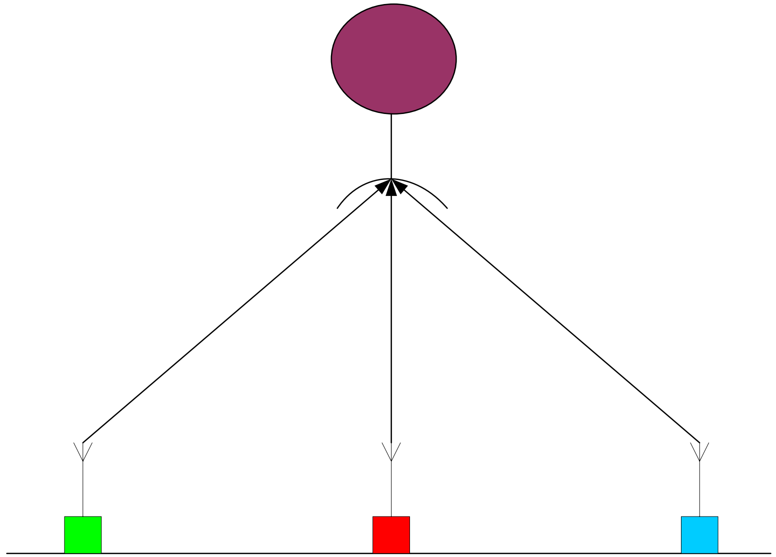
- Στην πράξη, ο αλγόριθμος waterfilling, μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής (βλ. και Cioffi `http://www.stanford.edu/group/cioffi/book/chap4.pdf`).

1. Έστω ότι $K^*$ είναι ο αριθμός των καναλιών που χρησιμοποιούνται για τη μετάδοση (όπου, δηλαδή, $P_i > 0$). Αρχικά υποθέτουμε ότι όλα τα κανάλια είναι "ενεργά" και τα κατατάσσουμε ως προς το θόρυβο. Το κανάλι 1 έχει τη μικρότερη διασπορά θορύβου ($N_i \leq N_j$ για $i < j$).
2. Επομένως, $K^* = K$, $P_i = (\nu - N_i)$, και $P = \sum_{i=1}^{K} P_i = K\nu - \sum_{i=1}^{K} N_i$.
3. Λύνουμε ως προς τον άγνωστο $\nu$.
4. Θεωρούμε το κανάλι $K^*$ με το μεγαλύτερο θόρυβο.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} \leq 0$, και τα $K^*$ κανάλια χρησιμοποιούνται (εκτός, πιθανώς, από κάποια με $P_i = 0$) και η βέλτιστη κατανομή δίνεται από τα $P_i = \nu - N_i$, $i = 1, \ldots, K^*$.
   - Εάν $P_{K^*} = \nu - N_{K^*} < 0$, το κανάλι $K^*$ δε χρησιμοποιείται και το αφαιρούμε. Θέτουμε $K^* = K^* - 1$ και επιστρέφουμε στο βήμα 3.

# Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel – MAC**) – Εισαγωγή

- Ποσότητες Θεωρίας Πληροφορίας για συνεχείς τ.μ. Ιδιότητες
- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι. Θεώρημα Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.
- Γκαουσιανό κανάλι με πεπερασμένο εύρος ζώνης
- Παράλληλα Γκαουσιανά κανάλια.
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC) – Εισαγωγή

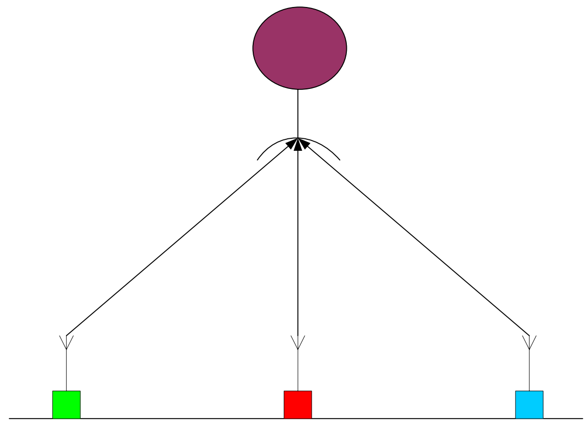
# Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel**)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.

- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα.

# Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) (2)



- Έως τώρα, η παράμετρος που επηρέαζε την επικοινωνία ήταν ο θόρυβος. Στο MAC, επιπλέον του θορύβου, η επικοινωνία επηρεάζεται από παρεμβολές (interference).

- Πόση πληροφορία μπορούμε να μεταδώσουμε για κάθε χρήστη, και πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι χωρητικότητες των χρηστών;

# Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) – Ορισμοί

- Για απλοποίηση, θα αναφερθούμε, κατ΄ αρχήν, σε MAC 2 χρηστών.
- Διακριτό MAC χωρίς μνήμη: Αποτελείται από 3 αλφάβητα $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ και $\mathcal{Y}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y|x_1, x_2)$.
- Κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το MAC: Αποτελείται από δύο σύνολα ακεραίων $\mathcal{W}_1 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $\mathcal{W}_2 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$ (σύνολα μηνυμάτων – message sets), δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης (encoding functions):

$$X_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{X}_1^n \text{ και}$$
$$X_2 : \mathcal{W}_2 \to \mathcal{X}_2^n,$$

και μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης (decoding function)

$$g : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

# Μετάδοση στο **MAC**

- Ο χρήστης 1 επιλέγει ένα από $2^{nR_1}$ μηνύματα <u>ομοιόμορφα</u> και στέλνει την αντίστοιχη κωδική λέξη στο κανάλι. Ομοίως, ο χρήστης 2 επιλέγει ένα από $2^{nR_2}$ μηνύματα <u>ανεξάρτητα</u> από το χρήστη 1 και εκπέμπει την αντίστοιχη κωδική λέξη.
- <u>Μέση Πιθανότητα Σφάλματος</u>:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(w_1,w_2)\in\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2} \Pr\{g(Y^n) \neq (w_1, w_2) | \text{εστάλη το } (w_1, w_2)\}$$

- Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης $(R_1, R_2)$ είναι <u>εφικτό</u> για το MAC εάν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ τέτοια ώστε $P_e^{(n)} \to 0$.
- Η <u>περιοχή χωρητικότητας</u> (**capacity region**) του MAC είναι το περίβλημα (**closure**) των εφικτών $(R_1, R_2)$.

# Περιοχή Χωρητικότητας **MAC**

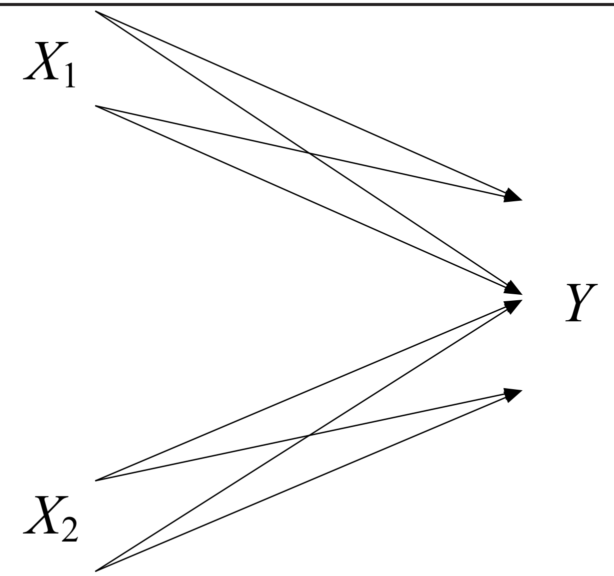
- Θεώρημα (Cover 15.3.1): Η χωρητικότητα του MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ είναι το περίβλημα (closure) της κυρτής γάστρας (hull) όλων των $(R_1, R_2)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1; Y|X_2), \\ R_2 &< I(X_2; Y|X_1), \\ R_1 + R_2 &< I(X_1, X_2; Y) \end{aligned}$$

  για κάποια κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.

- Δε θα το αποδείξουμε στο μάθημα.

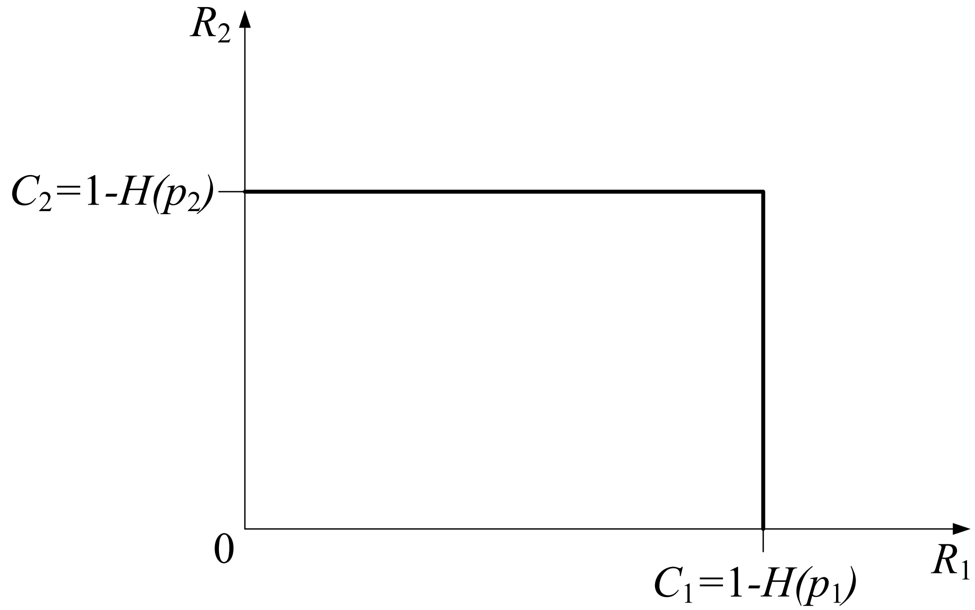
# Παράδειγμα 10.2 - Ανεξάρτητα **BSC**




- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 = 1 - H(p_1)$ από το 1ο κανάλι, και, ταυτόχρονα, με ρυθμό $R_2 = 1 - H(p_2)$ από το 2ο κανάλι.

- Τα δύο κανάλια είναι ανεξάρτητα $\longrightarrow$ δεν εμφανίζεται παρεμβολή.

# Παράδειγμα 10.2 - Ανεξάρτητα **BSC** – Περιοχή Χωρητικότητας



## Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι

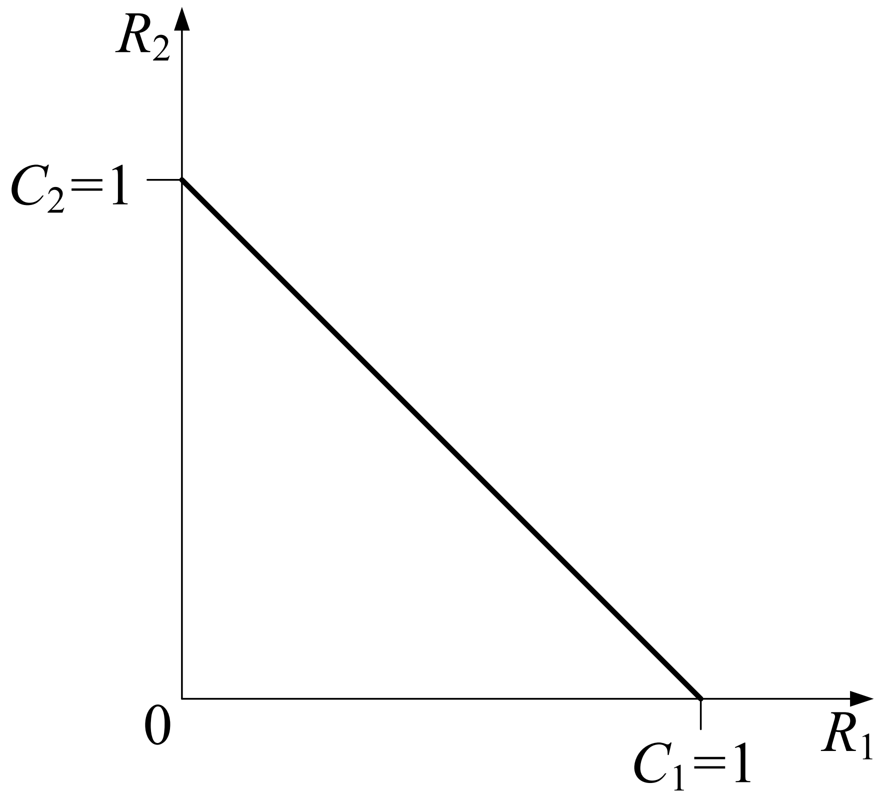
- Οι $X_1$ και $X_2$ παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 X_2$.

- Όταν $X_1 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της $X_2$. $R_1 = 0$, δεδομένου ότι η $X_1$ δεν αλλάζει.

- Ομοίως, όταν $X_2 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της $X_1$. $R_2 = 0$.

- Μπορούμε να πετύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, 1-\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ με διαμέριση στο χρόνο (**timesharing**). Δηλαδή, "παγώνουμε" το $X_2$ για $100\lambda$ % του χρόνου και μεταδίδουμε με ομοιόμορφα κατανεμημένη $X_1$ (αντίστροφα για το υπόλοιπο $100(1-\lambda)$ %).

# Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι – Περιοχή Χωρητικότητας

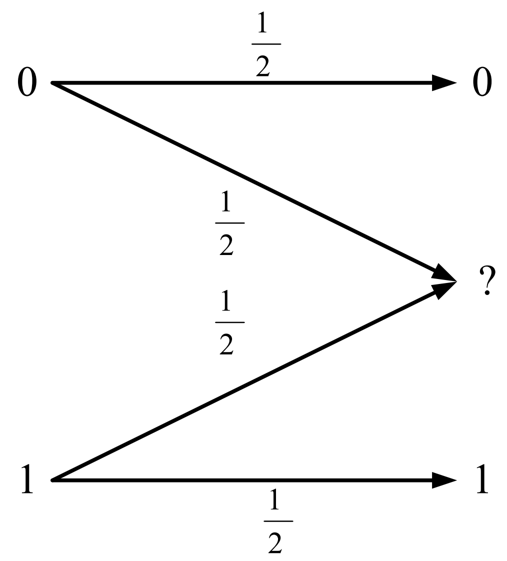


# Παράδειγμα 10.4 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής

- Οι $X_1$ και $X_2$ παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 + X_2$.
- Εάν $Y = 1$ δε γνωρίζουμε εάν η είσοδος ήταν $(X_1, X_2) =$(1,0) ή (0,1).
- Εάν θέσουμε $X_1 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη $X_2$).
- Εάν θέσουμε $X_2 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη $X_1$).
- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 + R_2 > 1$ bit/χρήση καναλιού;

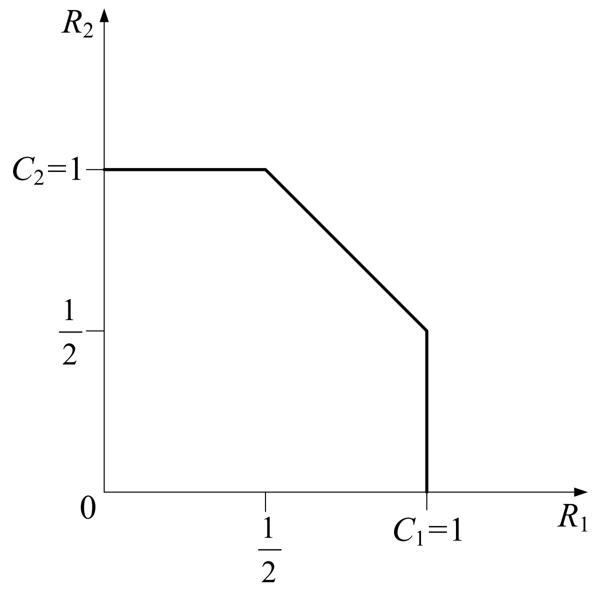
# Παράδειγμα 10.4 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής (2)

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη $X_1$. Επομένως, $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού.
- Από τη σκοπιά της $X_2$ το κανάλι είναι δυαδικό κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής $p = 1/2$.




- Επομένως, μπορούμε να στείλουμε επιπλέον 1/2 bits της $X_2$!

# Παράδειγμα 10.4 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής – Περιοχή Χωρητικότητας




- Μπορούμε, επίσης, να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(R_1, R_2) = (0.5 + \lambda, 1 - \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 0.5$ με timesharing.