ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

9ο Μάθημα – 15 Μαΐου 2009

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Αποδείξαμε το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού (για Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη)
  - Ευθύ: Αποδείξαμε ότι, για δέκτη που χρησιμοποιεί αποκωδικοποίηση με βάση την Από Κοινού Τυπικότητα, για $n \to \infty$, η πιθανότητα να αποκωδικοποιήσουμε σε λάθος σύμβολο ή να μη μπορούμε να αποκωδικοποιήσουμε τείνει στο 0, εφόσον $R < C = \max_{p(x)} I(X;Y)$.
  - Μπορεί να αποδειχτεί και για αποκωδικοποιητή ML.
  - Αντίστροφο: Με χρήση της ανισότητας Fano δείξαμε ότι δεν υπάρχει κώδικας με $P_e^{(n)} \to 0$ που να επιτυγχάνει $R > C$.
- Η χρήση ανάδρασης (feedback) δεν αυξάνει τη χωρητικότητα διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη!
- Ο βέλτιστος αποκωδικοποιητής βασίζεται σε ανίχνευση μέγιστης πιθανοφάνειας (ML). Ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος για δεδομένο μήκος κώδικα n μπορεί να προσδιοριστεί με χρήση του Εκθέτη Σφάλματος.
- Θεώρημα Διαχωρισμού πηγής-καναλιού: Ένας βέλτιστος τρόπος να μεταδώσουμε την πληροφορία που παράγει μια πηγή μέσω ενός διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη ενός χρήστη είναι με ανεξάρτητη κωδικοποίηση πηγής και κωδικοποίηση καναλιού.

Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- Θα εξετάσουμε την περίπτωση συνεχών τ.μ. και τα αντίστοιχα μεγέθη της Θεωρίας Πληροφορίας.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Συνεχείς τ.μ. και Διαφορική Εντροπία

Διαφορική Εντροπία – Εισαγωγή

- Έως τώρα θεωρούσαμε διακριτές τ.μ. με τιμές με πεπερασμένο και διακριτό αλφάβητο.

- Τα αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας εφαρμόζονται και για συνεχείς τ.μ., με κατάλληλες τροποποιήσεις και με χρήση της διαφορικής εντροπίας (**differential entropy**).

- Γενικά, όσα ισχύουν για διακριτές τ.μ. ισχύουν (με κατάλληλες τροποποιήσεις) και για συνεχείς τ.μ. Επομένως, θα αναφερθούμε στις συνεχείς τ.μ. πιο επιγραμματικά, φροντίζοντας, όμως, να επισημαίνουμε τις διαφορές, όπου υπάρχουν.

Διαφορική Εντροπία – Ορισμός

- Η <u>Διαφορική Εντροπία</u> $h(X)$ συνεχούς τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$, εάν η f υπάρχει, ορίζεται ως

$$h(X) = -\int_S f(x) \log f(x) dx,$$

όπου S είναι το πεδίο ορισμού της τ.μ.

- Υποθέτουμε ότι η $f(x) \log f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

Παράδειγμα 9.1. – Δεν ισχύει, κατ΄ ανάγκη, $h(X) \geq 0$!

- Έστω συνεχής τ.μ. X, ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, a]$.

$$h(X) = -\int_S f(x) \log f(x) dx = -\int_0^a \frac{1}{a} \log \frac{1}{a} dx = \log a.$$

- Για $a < 1$, $h(X) < 0$.
- Ωστόσο, η ποσότητα $2^{h(X)}$ είναι πάντοτε μη αρνητική.
- Η διαφορική εντροπία διακριτής τ.μ. ισούται με $-\infty$ ($2^{-\infty} = 0$).

Παράδειγμα 9.2. – Εντροπία Γκαουσιανής τ.μ.

- Έστω συνεχής τ.μ. X η οποία ακολουθεί Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2.

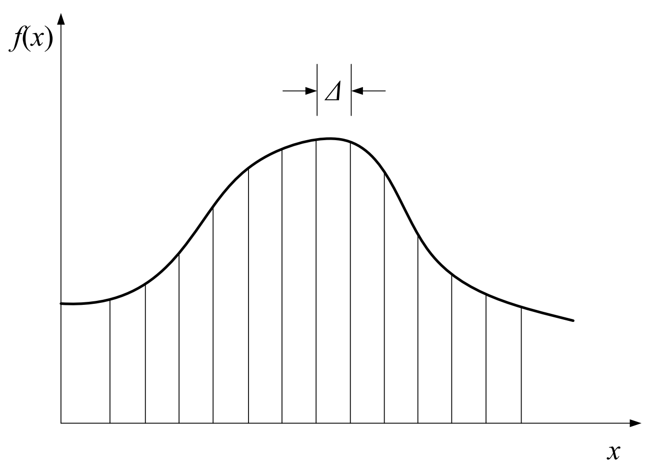
$$X \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

- Με χρήση του ορισμού της διαφορικής εντροπίας,

$$\begin{aligned} h(X) &= -\int_S f(x) \ln f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right) \right] dx = \frac{EX^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2}\ln e + \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{2}\ln 2\pi e\sigma^2 \text{ nats} = \frac{1}{2}\log 2\pi e\sigma^2 \text{ bits} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ.

- Έστω συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$. Χωρίζουμε την $f(X)$ σε κομμάτια πλάτους Δ, όπως φαίνεται στο Σχήμα.



- Για κάθε διάστημα πλάτους Δ υπάρχει x_i τέτοιο ώστε $f(x_i)\Delta = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx$.
- Θεωρούμε τη διακριτή αναπαράσταση, X^{Δ}, της συνεχούς τ.μ. X:

$$X^{\Delta} = x_i, \quad \text{όταν } i\Delta \leq X < (i+1)\Delta.$$

Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ. (2)

- $p_i \triangleq \Pr\{X^\Delta = x_i\} = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} f(x)dx = f(x_i)\Delta.$

- Επομένως, για την εντροπία της (διακριτής) X^Δ ισχύει

$$\begin{aligned} H(X^\Delta) &= -\sum_{-\infty}^{\infty} p_i \log p_i = -\sum_{-\infty}^{\infty} (f(x_i)\Delta) \log (f(x_i)\Delta) = \\ &= -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log \Delta \\ &= -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \log \Delta. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 9.3. – Εντροπία διακριτής αναπαράστασης συνεχούς τ.μ. (3)

$$H(X^{\Delta}) = -\sum_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\Delta \log f(x_i) - \log \Delta.$$

- Όταν $\Delta \to 0$, $H(X^{\Delta}) \to h(X) - \log \Delta$, εφόσον η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.
- Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\log \Delta$ είναι ανάλογη του αριθμού n των bits που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση (κβαντισμό) της συνεχούς τ.μ. X. Επομένως, $H(X^{\Delta}) \approx h(X) + n$.
- Η ακριβής (μη κβαντισμένη) τιμή συνεχούς τ.μ. απαιτεί άπειρα bits για την περιγραφή της (διαισθητικά λογικό).