ΕΕ728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

5ο Μάθημα – 3 Απριλίου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP) (συνέχεια). Ορισμός τυπικών ακολουθιών και ιδιότητες.

- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής. Απόδειξη για πηγές χωρίς μνήμη.

- Εισαγωγή στην Κωδικοποίηση Καναλιού
  - Διακριτά Κανάλια. Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη.
  - Πληροφοριακή Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη.

Στο σημερινό μάθημα

- Συμμετρικά Κανάλια και Χωρητικότητα.
- Από Κοινού Τυπικότητα και Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP).

Διακριτά κανάλια – Ορισμοί

- Ένα διακριτό κανάλι $(\mathcal{X}, p(y|x), \mathcal{Y})$ αποτελείται από δύο πεπερασμένα σύνολα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και ένα σύνολο δεσμευμένων συναρτήσεων μάζας πιθανότητας $p(y|x)$, μια για κάθε $x \in \mathcal{X}$, ώστε, για κάθε x και y, $p(y|x) \geq 0$ και, για κάθε x, $\sum_y p(y|x) = 1$. Η τ.μ. X είναι η είσοδος του καναλιού και η Y η έξοδός του.

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ένα διακριτό κανάλι n φορές. Ορίζουμε τη n-οστή επέκταση του διακριτού καναλιού χωρίς μνήμη $(\mathcal{X}^n, p(y^n|x^n), \mathcal{Y}^n)$, όπου
$$p(y_k|x^k, y^{k-1}) = p(y_k|x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Μετάδοση σε διακριτά κανάλια χωρίς ανάδραση

- Εάν το κανάλι χρησιμοποιείται χωρίς ανάδραση, δηλαδή η είσοδος στο κανάλι δεν εξαρτάται από τις εξόδους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, $p(x_k|x^{k-1}, y^{k-1}) = p(x_k|x^{k-1})$, και

$$p(y^n|x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_i).$$

Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη

- "Πληροφοριακή" Χωρητικότητα Διακριτού Καναλιού Χωρίς Μνήμη ("Information" Channel Capacity):

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y)$$

- Παραδείγματα διακριτών καναλιών χωρίς μνήμη (επανάληψη από το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας")
  - Δυαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel – BSC): $C = 1 - H(p)$ bits, επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
  - Δυαδικό Κανάλι με Διαγραφή (Binary Erasure Channel): $C = 1 - \alpha$, όπου α η πιθανότητα διαγραφής. Επιτυγχάνεται με ομοιομορφη κατανομή εισόδου $p(x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
  - Η χωρητικότητα του δυαδικού καναλιού με διαγραφή παραμένει η ίδια εάν χρησιμοποιήσουμε ανάδραση.
  - Θα δούμε ότι το αποτέλεσμα αυτό, δηλαδή ότι η χρήση ανάδρασης δεν αυξάνει τη χωρητικότητα, ισχύει γενικά για όλα τα διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη.

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού

- Πίνακας μετάβασης $[p(y|x)]_{i,j}$. Σύμβολο στην είσοδο: x_i. Σύμβολο στην έξοδο: y_j.

- Ένα διακριτό κανάλι ονομάζεται <u>συμμετρικό</u> όταν κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης $p(y|x)$ προκύπτει από αναδιάταξη κάθε άλλης γραμμής και το ίδιο ισχύει και για κάθε στήλη του πίνακα. Ένα διακριτό κανάλι ονομάζεται <u>ασθενώς συμμετρικό</u> όταν κάθε γραμμή του πίνακα μετάβασης $p(y|x)$ προκύπτει από αναδιάταξη κάθε άλλης γραμμής και τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε στήλης $\sum_x p(y|x)$ ισούνται μεταξύ τους.

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού (2)

- Θεώρημα: Για τη χωρητικότητα ασθενώς συμμετρικού καναλιού (και, επομένως, και συμμετρικού καναλιού), ισχύει

$$C = \log|\mathcal{Y}| - H(\text{οποιασδήποτε γραμμής } \mathbf{r} \text{ πίνακα μετάβασης}).$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - H(\mathbf{r}) \\ &\le \log|\mathcal{Y}| - H(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Χωρητικότητα Συμμετρικού Καναλιού (3)

- Η ισότητα ισχύει όταν η Y ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.

- Ομοιόμορφη κατανομή για την Y επιτυγχάνεται με χρήση ομοιόμορφα κατανεμημένης εισόδου X.

$$p(y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(y|x)p(x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{x \in \mathcal{X}} p(y|x) \stackrel{(a)}{=} c\frac{1}{|\mathcal{X}|} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|}.$$

Στο (a) χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι, για (ασθενώς) συμμετρικά κανάλια, τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε στήλης ισούνται μεταξύ τους.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**Joint AEP**)

- Διακριτά Κανάλια και Χωρητικότητα – Συνέχεια.
- Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP)

Από κοινού τυπικές ακολουθίες (**Jointly Typical sequences**)

- Ορισμός: Το σύνολο από κοινού (ασθενώς) τυπικών ακολουθιών $A_\epsilon^{(n)}$ ως προς την κατανομή $p(x, y)$, ορίζεται ως

$$
\begin{aligned}
A_\epsilon^{(n)} = \Big\{(x^n, y^n) \in \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n : & \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n) - H(X) \right| < \epsilon, \\
& \left| -\frac{1}{n} \log p(y^n) - H(Y) \right| < \epsilon, \\
& \left| -\frac{1}{n} \log p(x^n, y^n) - H(X, Y) \right| < \epsilon \Big\},
\end{aligned}
$$

περιέχει, δηλαδή, τα ζεύγη ακολουθιών $\{(x^n, y^n)\}$ μήκους n οι εμπειρικές εντροπίες των οποίων βρίσκονται σε απόσταση από την πραγματική τους εντροπία που δεν υπερβαίνει το ϵ.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**Joint AEP**)

- Έστω (X^n, Y^n) ακολουθίες μήκους n οι οποίες δημιουργούνται με χρήση ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων ζευγών (X_i, Y_i), σύμφωνα με την κατανομή $p(x^n, y^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, y_i)$. Ισχύουν οι ιδιότητες:

  1. $\Pr\{(X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}\} \to 1$, για $n \to \infty$.
  2. $\left| A_\epsilon^{(n)} \right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}$.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**Joint AEP**) – συνέχεια

3. Εάν $(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \sim p(x^n)p(y^n)$, δηλαδή οι $\tilde{X}^n$ και $\tilde{Y}^n$ είναι <u>ανεξάρτητες</u> και οι κατανομές τους ισούνται με τις περιθώριες κατανομές της $p(x^n, y^n)$,

$$\Pr\left\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right\} \leq 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}.$$

Επίσης, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε, για $n > n_0$,

$$\Pr\left\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right\} \geq (1-\epsilon)2^{-n(I(X;Y)+3\epsilon)}.$$

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις

1. $\Pr\{(X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}\} \to 1$, για $n \to \infty$.

   Από τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών, $-\frac{1}{n}\log p(X^n) \to -E[\log p(X)] = H(X)$ κατά πιθανότητα. Επομένως, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε, για όλα τα $n > n_1$, $\Pr\left\{\left|-\frac{1}{n}\log p(X^n) - H(X)\right| \geq \epsilon\right\} < \frac{\epsilon}{3}$. Παρομοίως, υπάρχουν n_2 και n_3 τέτοια ωστε, $\Pr\left\{\left|-\frac{1}{n}\log p(Y^n) - H(Y)\right| \geq \epsilon\right\} < \frac{\epsilon}{3}$ και $\Pr\left\{\left|-\frac{1}{n}\log p(X^n, Y^n) - H(X, Y)\right| \geq \epsilon\right\} < \frac{\epsilon}{3}$, αντίστοιχα. Επομένως, για $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$, η πιθανότητα το (X^n, Y^n) να μην είναι τυπικό είναι μικρότερη από ϵ, και, συνεπώς, $\Pr\{(X^n, Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}\} > 1 - \epsilon$, για $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις (2)

2. $\left|A_\epsilon^{(n)}\right| \leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)}$.

   Παρόμοια με την αντίστοιχη απόδειξη για το AEP,

$$1 = \sum p(x^n, y^n) \geq \sum_{(x^n,y^n)\in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n, y^n) \geq \left|A_\epsilon^{(n)}\right| 2^{-n(H(X,Y)+\epsilon)}.$$

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης – Αποδείξεις (3)

3. Έστω ανεξάρτητες ακολουθίες τ.μ. $\tilde{X}^n$ και $\tilde{Y}^n$ και ότι οι από κοινού κατανομές $p(\tilde{x}^n)$ και $p(\tilde{y}^n)$ ισούνται με τις περιθώριες κατανομές της $p(x^n, y^n)$, $p(x^n)$ και $p(y^n)$, αντίστοιχα. Επομένως,

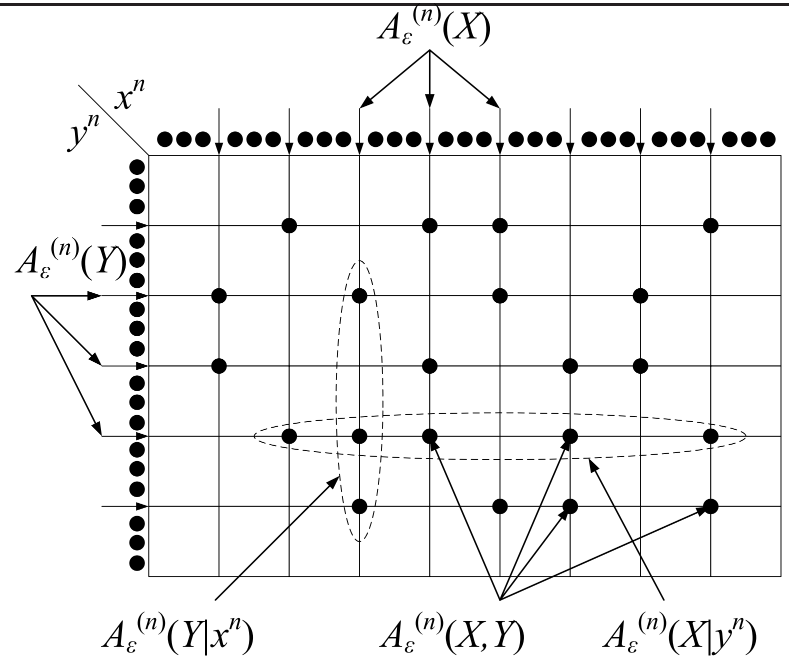
$$\begin{aligned}
\Pr\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\} &= \sum_{(x^n, y^n) \in A_\epsilon^{(n)}} p(x^n)p(y^n) \\
&\leq 2^{n(H(X,Y)+\epsilon)} 2^{-n(H(X)-\epsilon)} 2^{-n(H(Y)-\epsilon)} \\
&= 2^{-n(I(X;Y)-3\epsilon)}.
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο (βλ. π.χ. Cover Theorem 7.6.1) μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\Pr\left\{(\tilde{X}^n, \tilde{Y}^n) \in A_\epsilon^{(n)}\right\} \geq (1-\epsilon)2^{-n(I(X;Y)+3\epsilon)}$$

για $n > n_0$.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (συνέχεια)



Στο σχήμα δίνεται ένα παράδειγμα από κοινού τυπικού συνόλου. Υπάρχουν περίπου $2^{nH(X)}$ τυπικές ακολουθίες τ.μ. X και περίπου $2^{nH(Y)}$ τυπικές ακολουθίες τ.μ. Y. Ωστόσο, οι από κοινού τυπικές ακολουθίες είναι περίπου $2^{nH(X,Y)}$, δηλαδή, υπάρχουν ζεύγη τυπικών X^n με τυπικά Y^n τα οποία δεν είναι από κοινού τυπικά.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (συνέχεια)

- Από την 3η ιδιότητα, η πιθανότητα ένα ζεύγος (X^n, Y^n) που επιλέγεται τυχαία να είναι και <u>από κοινού</u> τυπικό, ισούται περίπου με $2^{-nI(X;Y)}$.

- Επομένως, στο σχήμα της προηγούμενης διαφάνειας, κατά μέσο όρο πρέπει να θεωρήσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ ζεύγη έως ότου εμφανιστεί ένα τυπικό ζεύγος.

- Ισοδύναμα, εάν θεωρήσουμε μια ακολουθία Y^n η οποία αποτελεί την έξοδο καναλιού με είσοδο X^n, υπάρχουν περίπου $2^{nH(X|Y)}$ υπό συνθήκη τυπικές ακολουθίες X^n. Η πιθανότητα να διαλέξουμε μια ακολουθία X'^n η οποία είναι τυπική με την Y^n αλλά δεν είναι η ακολουθία X^n η οποία μεταδόθηκε ισούται, περίπου, με $2^{nH(X|Y)}/2^{nH(X)} = 2^{-nI(X;Y)}$. Επομένως, και πάλι, κατά μέσο όρο πρέπει να θεωρήσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ ακολουθίες X^n έως ότου εμφανιστεί ακολουθία που αποτελεί τυπικό ζεύγος με την Y^n.

Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (συνέχεια)

- Συνεπώς, διαισθητικά, μπορούμε να μεταδώσουμε περίπου $2^{nI(X;Y)}$ διακριτές ακολουθίες στο κανάλι χωρίς να υπάρξει σύγχυση.

- Θα αποδείξουμε ότι είναι εφικτή η μετάδοση έως και $2^{nI(X;Y)}$ διακριτών ακολουθιών με αυθαίρετα μικρή πιθανότητα σφάλματος για $n \to \infty$. Θα αποδείξουμε, επίσης, ότι εάν προσπαθήσουμε να μεταδώσουμε περισσότερες από $2^{nI(X;Y)}$ διακριτές ακολουθίες, η πιθανότητα σφάλματος τείνει στο 1.