EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

1ο Μάθημα – 4 Μαρτίου 2009

Γενικές Πληροφορίες

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. `dtouba@upatras.gr`
- Γραφείο: 2ος όροφος Νέας Πτέρυγας. Τηλ: 2610-99-6468.
- Σκοπός του μαθήματος: Εμβάθυνση σε θέματα Θεωρίας Πληροφορίας, μεγαλύτερη μαθηματική αυστηρότητα, Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων.
- Ειδικότερα, στόχοι του μαθήματος είναι:
  - Να εμβαθύνει σε έννοιες/αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας που παρουσιάστηκαν στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας"
  - Να παρουσιάσει τις αποδείξεις κάποιων από αυτά τα αποτελέσματα.
  - Να επεκταθεί στα κανάλια πολλών χρηστών (Network Information Theory) και, εάν ο χρόνος το επιτρέψει, σε Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού (Rate Distortion Theory) ή/και Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov.
- Προαπαιτούμενες γνώσεις:
  - Θεωρία Πιθανοτήτων και Αρχές Συνδυαστικής
  - Γνώση της ύλης του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας" (πλην της θεωρίας κωδικοποίησης) ή διάθεση για εκμάθησή της κατά τη διάρκεια των πρώτων εβδομάδων διδασκαλίας.

Θέματα προς συζήτηση

- Παραδόσεις: Τετάρτη 3:15 - 6 μ.μ., ΕΕΤ. 3 45λεπτα παραδόσεων και 2 15λεπτα διαλείμματα.
- Ώρες γραφείου: Walk-in ή κατόπιν συνεννόησης. Προβληματικές ημέρες: Θα ανακοινωθούν σύντομα.
- Παρακαλώ γραφτείτε στο eclass (EE728) για να λαμβάνετε τις ανακοινώσεις σχετικά με το μάθημα.
- Τρόπος εξέτασης:
  - Ίδιος τρόπος εξέτασης για προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές.
  - Γραπτή τελική εξέταση, ανοιχτά βιβλία και σημειώσεις.
  - Προαιρετική Εργασία (project).
  - Βαθμός $= \max\{(\text{Τελικό διαγώνισμα} \times 0.5 + \text{project} \times 0.5), \text{Τελικό διαγώνισμα}\}$, εφόσον ο βαθμός τελικού διαγωνίσματος ισούται τουλάχιστον με 5. Αλλιώς, Βαθμός = Τελικό Διαγώνισμα.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα

- Θα χρησιμοποιηθούν διαφάνειες. Επειδή ο διδάσκων δεν έχει εντοπίσει κάποιο βιβλίο στην Ελληνική γλώσσα το οποίο να καλύπτει σε ικανοποιητικό βαθμό το αντικείμενο του μαθήματος έχει ζητηθεί να δοθεί στους φοιτητές το βιβλίο Elements of Information Theory, 2nd ed. των T. M. Cover και J. A. Thomas.
- Το μάθημα θα βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στο βιβλίο των Cover & Thomas. Έχει ζητηθεί ένα τουλάχιστον αντίτυπο (της 2ης έκδοσης) να παραμένει στη βιβλιοθήκη. Επίσης, το βιβλίο θα διατίθεται για ολιγόωρο δανεισμό από το διδάσκοντα.
- Αντιστοιχία μαθήματος – βιβλίου Cover & Thomas (2η έκδοση).
  - Εντροπία και Κωδικοποίηση Πηγής. Κεφάλαια 2, 3, 4 και 5.
  - Χωρητικότητα και Κωδικοποίηση Καναλιού. Κεφάλαια 7, 8 και 9.
  - Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων. Κεφάλαιο 15.
  - Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού. Κεφάλαιο 10.
  - Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov. Κεφάλαιο 14.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα – Άλλα βιβλία

- R. G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication. Ιστορικό βιβλίο. Καλύπτει λιγότερες πλευρές της Θεωρίας Πληροφορίας σε σχέση με το βιβλίο των Cover & Thomas, αλλά υπεισέρχεται σε μεγαλύτερο βάθος. Έπίσης, καλύπτει και μέρος της Θεωρίας Κωδικοποίησης. Απαραίτητο σε όσους επιθυμούν να εμβαθύνουν.
- D. McKay, Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, Cambridge University Press, 2003. Διατίθεται δωρεάν στο Διαδίκτυο αρκεί να μην το τυπώσετε. Δίνει αρκετά παραδείγματα. Επίσης, επικεντρώνεται αρκετά στη Θεωρία Κωδικοποίησης, καθώς και στην εξαγωγή συμπερασμάτων (inference).
- D. Tse & P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communication, Cambridge University Press, 2005. Δεν είναι βιβλίο Θεωρίας Πληροφορίας. Ωστόσο, αναφέρεται συχνά σε αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας και περιέχει ενδιαφέρουσες συζητήσεις για θέματα που άπτονται των Ασύρματων Συστημάτων Τηλεπικοινωνιών. Διατίθεται και αυτό δωρεάν στο Διαδίκτυο (σε μη εκτυπώσιμο αρχείο).
- Ένας πιο πλήρης κατάλογος βιβλιογραφίας δίνεται στο Φυλλάδιο 2.

Σύνδεσμοι σε παρόμοια μαθήματα άλλων πανεπιστημίων

- Stanford University: EE 376A/B/Stat 376A/B: Information Theory. www.stanford.edu/class/ee376a και ee376b. Ειδικά για φέτος: Επιστροφή Tom Cover στο EE376A!
- Stanford University: EE 478: Network Information Theory. http://eeclass.stanford.edu/ee478/
- University of Minnesota: EE5581: Information Theory and Coding. http://www.ece.umn.edu/users/nihar/ee5581_fall05/index.html
- UIUC: ECE 563, Information Theory, http://courses.ece.uiuc.edu/ece563/
- Brown University, AM 193/272/IT3: Information Theory I/II/III http://www.dam.brown.edu/people/yiannis/IT1/index.html, yiannis/272/index.html, yiannis/IT3/index.html
- Πολυτεχνείο Κρήτης, ΤΗΛ 412, Θεωρία Πληροφορίας και Κωδίκων, http://www.telecom.tuc.gr/courses/tel412/.

Ύλη Μαθήματος

- Επανάληψη Βασικών Εννοιών/Αποτελεσμάτων του μαθήματος "Θεωρία Πληροφορίας" (7ου εξαμήνου).
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP). Η εντροπία είναι ο βέλτιστος ρυθμός συμπίεσης. Κωδικοποίηση σταθερού και μεταβλητού μήκους (περιληπτικά, θεωρώντας γνωστά τα περί κωδίκων που αναφέρθηκαν στη "Θεωρία Πληροφορίας").
- Χωρητικότητα Καναλιού. Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP). Θεώρημα Χωρητικότητας Καναλιού για Διακριτά Κανάλια Χωρίς Μνήμη (απόδειξη).
- Συνεχείς τ.μ. Διαφορική Εντροπία. Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού.
- Κανάλια Πολλών Χρηστών: Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC), Κανάλι Ευρυεκπομπής (BC), Κανάλι Μεταγωγής (Relay), Κανάλι Παρεμβολής (Interference).
- Εάν προλάβουμε: Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού (Rate Distortion Theory) ή/και Πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov ή/και Θεωρία Πληροφορίας και τζόγος.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

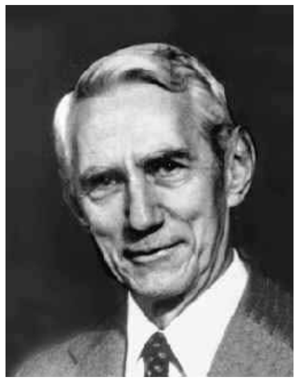
- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας
- Προεπισκόπηση μαθήματος
- Επανάληψη Βασικών Ποσοτήτων Θεωρίας Πληροφορίας (1ο μέρος): Εντροπία, Δεσμευμένη Εντροπία.

Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας

- Θεωρία Πληροφορίας: Μια γενική, και κατ΄ εξοχήν <u>μαθηματική</u> θεωρία.
- Θεμελιωτής της θεωρείται ο Claude Shannon.
- Ξεκίνησε με σκοπό να κατανοήσει τα Συστήματα Επικοινωνιών (Claude Shannon, "*A mathematical theory of communication*," The Bell System Technical Journal, 1948).
- Ωστόσο, είναι μια αρκετά γενική θεωρία με ευρύ πεδίο εφαρμογής
  - Τηλεπικοινωνίες
  - Θεωρία Πιθανοτήτων (Εκτίμηση/έλεγχος υποθέσεων)
  - Στατιστική (διεξαγωγή συμπερασμάτων)
  - Οικονομικά/Χρηματιστήριο/Τζόγος
  - Επιστήμη Υπολογιστών (Αλγοριθμική Πολυπλοκότητα)
  - Στατιστική Φυσική (Θερμοδυναμική)
  - κ.α.

Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας (2)

- Η Θεωρία Πληροφορίας απαντά σε 2 βασικά ερωτήματα της Θεωρίας Επικοινωνιών:
  1. Ποια είναι η <u>μέγιστη</u> δυνατή συμπίεση των δεδομένων μιας πηγής; $\longrightarrow$ Η εντροπία (entropy) H.
  2. Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός επικοινωνίας (rate of communication) δια μέσου ενός καναλιού; $\longrightarrow$ Η χωρητικότητα (capacity) C.
- Ωστόσο, έχει σημαντική συνεισφορά σε πολλά άλλα προβλήματα και αντικείμενα, όπως προαναφέρθηκε.



Claude Shannon, 1916-2001

Προεπισκόπηση Μαθήματος

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας
- Προεπισκόπηση μαθήματος
- Επανάληψη Βασικών Ποσοτήτων Θεωρίας Πληροφορίας (1ο μέρος): Εντροπία, Δεσμευμένη Εντροπία.

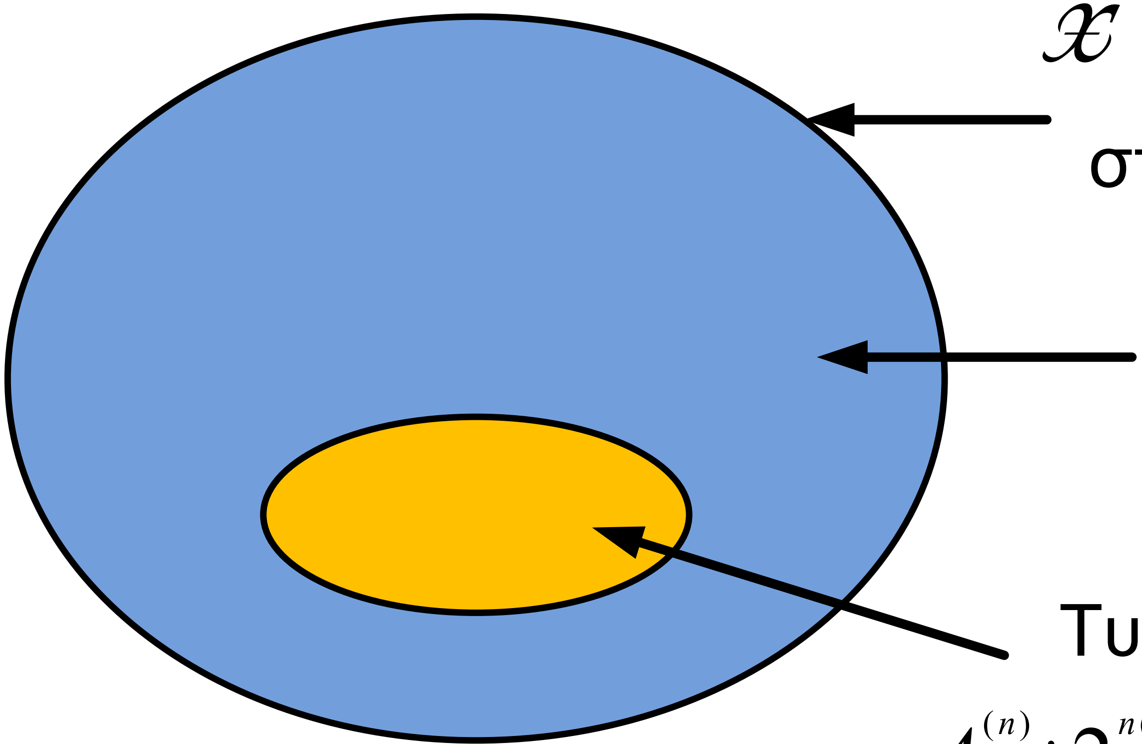
Προεπισκόπηση Μαθήματος
Εντροπία, Αμοιβαία Πληροφορία, Συμπίεση

- Μια τυχαία μεταβλητή ή, γενικότερα, μια τυχαία διαδικασία χαρακτηρίζεται από ένα όριο πολυπλοκότητας (εντροπία) κάτω από το οποίο δεν είναι δυνατόν να συμπιεστεί.
- Ιδιότητες εντροπίας, σχετικής εντροπίας, αμοιβαίας πληροφορίας (επανάληψη από το μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας")
- Ανισότητα Fano: Χρήσιμη στην απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού (2ο Θεώρημα Shannon). Συνδέει την πιθανότητα λάθους στην εκτίμηση μιας τ.μ. X με βάση παρατήρηση τ.μ. Y με τη δεσμευμένη εντροπία $H(X|Y)$.
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Asymptotic Equipartition Property – AEP). Αναφέρθηκε στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας"· θα την εξετάσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στα Προχωρημένα Θέματα.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής: Μπορούμε να συμπιέσουμε τα σύμβολα εργοδικής πηγής με απόσταση το πολύ 1 bit από την εντροπία, και σε καμία περίπτωση με λιγότερα bits από την εντροπία. Θα το αποδείξουμε (για πηγές χωρίς μνήμη).

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**AEP**)

- Το ισοδύναμο του Νόμου Μεγάλων Αριθμών στη Θεωρία Πληροφορίας. Αποτελεί άμεση συνέπεια του Ασθενούς Νόμου των Μεγάλων Αριθμών.
- AEP (για ανεξάρτητες, ομοίως κατανεμημένες (i.i.d.) τ.μ.): Καθώς το n τείνει στο άπειρο, η ποσότητα $\frac{1}{n}\log\frac{1}{p(X_1,X_2,\ldots,X_n)}$ τείνει στην εντροπία H. Επομένως, $p(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to 2^{-nH}$.
- Χωρισμός ακολουθιών μήκους n σε δύο σύνολα: <u>Τυπικό</u> (η κάθε ακολουθία του οποίου έχει πιθανότητα $\sim 2^{-nH}$) και <u>μη τυπικό</u> (όλες οι υπόλοιπες ακολουθίες).
- Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων των τυπικών ακολουθιών τείνει στο 1 καθώς το n τείνει στο άπειρο, και ότι το τυπικό σύνολο περιέχει $\sim 2^{nH}$ τυπικές ακολουθίες.
- Επομένως, μπορούμε να ασχοληθούμε μόνο με τις τυπικές ακολουθίες. Καθώς το μήκος τους, n, μεγαλώνει, η πιθανότητα να εμφανιστεί μη τυπική ακολουθία τείνει στο 0.
- Θα αποδείξουμε ότι με τον τρόπο αυτό μπορούμε να περιγράψουμε τις τ.μ. X_i με μέσο μήκος που τείνει στην εντροπία H.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (**AEP**) (2)



$\mathcal{X}^n : |\mathcal{X}|^n$
στοιχεία

Μη τυπικό
σύνολο

Τυπικό σύνολο
$A_{\in}^{(n)} : 2^{n(H+\in)}$ στοιχεία

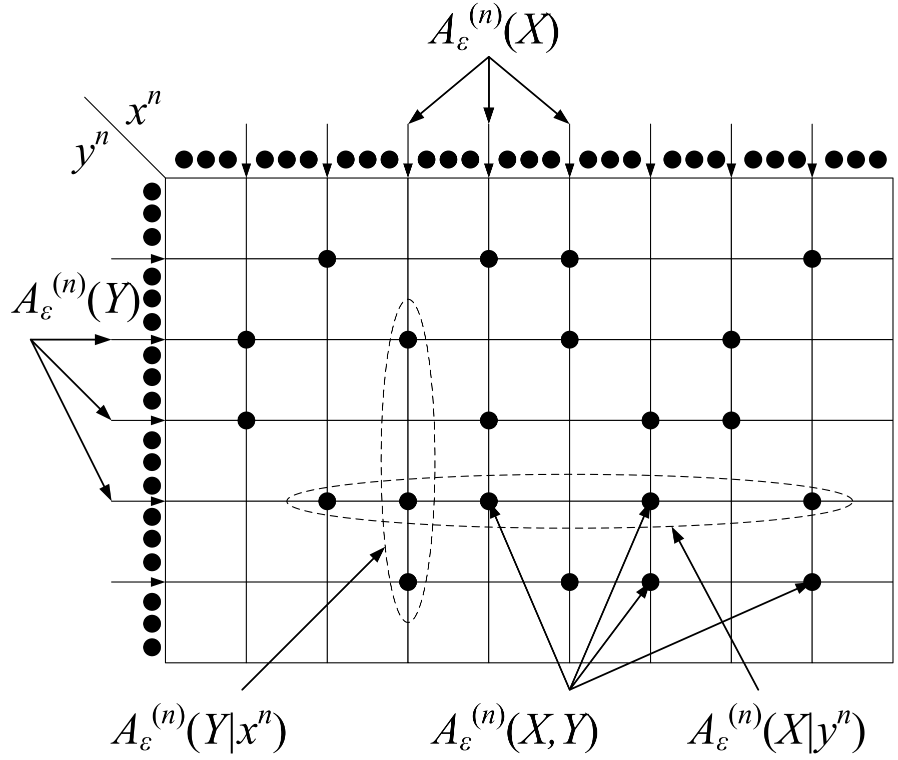
Προεπισκόπηση Μαθήματος
Χωρητικότητα Καναλιού

- "Πληροφοριακός" Ορισμός Χωρητικότητας (information capacity), συμμετρικά κανάλια, παραδείγματα (επανάληψη).
- Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (Joint AEP).
- "Λειτουργικός" Ορισμός Χωρητικότητας. Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού Shannon και απόδειξη (για διακριτά κανάλια χωρίς μνήμη).
- Χωρητικότητα καναλιού με ανάδραση.
- Θεώρημα διαχωρισμού καναλιού-πηγής.
- Συνεχείς τ.μ. και Διαφορική Εντροπία.
- Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού.
- Χωρητικότητα Παράλληλων Γκαουσιανών Καναλιών και "waterfilling".
- Χωρητικότητα Γκαουσιανού Καναλιού με ανάδραση.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Joint AEP

- Joint AEP: Έστω n ανεξάρτητα, ομοίως κατανεμημένα ζεύγη (X_i, Y_i) (οι X_i και Y_i δεν είναι, κατ' ανάγκη, ανεξάρτητες μεταξύ τους).
  - Καθώς το n τείνει στο άπειρο, $p((X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \ldots, (X_n, Y_n)) \rightarrow 2^{-nH(X,Y)}$.
- Εάν οι $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ είναι <u>ανεξάρτητες</u> με τις ίδιες <u>περιθώριες</u> κατανομές με αυτές των X_i και Y_i, αντίστοιχα, τότε η πιθανότητα η ακολουθία $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) \ldots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ να είναι τυπική τείνει στην τιμή $2^{-nI(X;Y)}$.
- Επομένως, η πιθανότητα μια ακολουθία $(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1), (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) \ldots, (\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)$ της οποίας οι $\tilde{X}_i$ και $\tilde{Y}_i$ είναι, στην πραγματικότητα, <u>ανεξάρτητες</u> να ανήκει στο τυπικό σύνολο ακολουθιών που δημιουργούνται επιλέγοντας τις τ.μ. με βάση την από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p(X, Y)$ (όχι, απαραίτητα, ίση με $p(X)p(Y)$), ισούται, κατά προσέγγιση, με $2^{-nI(X;Y)}$.
- Θα χρησιμοποιήσουμε την Ιδιότητα Από Κοινού Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης στην απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης Καναλιού του Shannon.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Joint AEP (2)



Από Κοινού Τυπικές Ακολουθίες

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Συνεχείς τ.μ. και Γκαουσιανό Κανάλι

- Προκειμένου να χαρακτηρίσουμε την πληροφορία, να συμπιέσουμε και να μεταδώσουμε συνεχείς τ.μ. (ή σε κανάλια με συνεχείς τιμές) ορίζουμε τη Διαφορική Εντροπία.
- Γενικά, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με την περίπτωση διακριτών τ.μ., αλλά και με κάποιες διαφορές.
- Το Γκαουσιανό Κανάλι αποτελεί ένα πολύ καλό μοντέλο για κανάλια που απαντούν στη φύση. Η έκφραση για τη χωρητικότητα του Γκαουσιανού καναλιού αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας.
- Θα εξετάσουμε το Γκαουσιανό Κανάλι με μεγαλύτερη λεπτομέρεια απ΄ ό,τι στο μάθημα "Θεωρία Πληροφορίας"
- Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού για Γκαουσιανά Κανάλια με πηγές που υπόκεινται σε περιορισμό ισχύος.

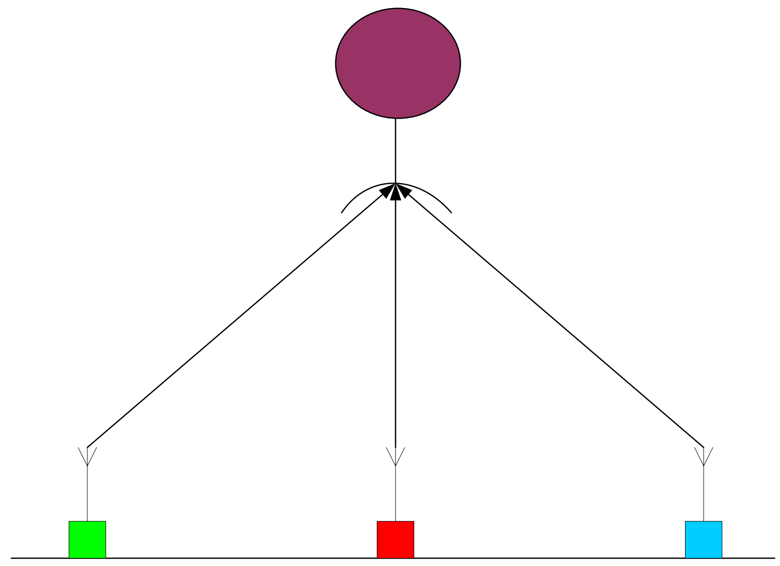
Προεπισκόπηση Μαθήματος
Συνεχείς τ.μ. και Γκαουσιανό Κανάλι (συνέχεια)

- Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ένας πομπός έχει στη διάθεσή του περισσότερα από ένα ανεξάρτητα Γκαουσιανά κανάλια με διαφορετικό λόγο σήματος προς θόρυβο και δεδομένη διαθέσιμη ισχύ με την οποία μπορεί να μεταδώσει.
- Θα αποδείξουμε ότι είναι βέλτιστο να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερο μέρος της διαθέσιμης ισχύος στα κανάλια με μεγάλο λόγο σήματος προς θόρυβο. Δηλαδή, πρέπει να μεταδώσουμε με μεγαλύτερο ρυθμό στα "καλά" κανάλια και με μικρότερο (σε κάποιες περιπτώσεις ακόμα και μηδενικό) στα "κακά".
- Η κατανομή αυτή της ισχύος ("waterfilling") βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα συστήματα DSL, καθώς και σε ασύρματα συστήματα που μεταδίδουν σε κανάλια με διαλείψεις (fading).
- Θα εξετάσουμε, επίσης, την περίπτωση Γκαουσιανών καναλιών με έγχρωμο θόρυβο και τη χωρητικότητά τους.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων (**Network Info Theory**)

- Συστήματα με περισσότερους από έναν πομπούς ή/και περισσότερους από έναν δέκτες.
- Νέα στοιχεία: Παρεμβολή (interference), συνεργασία (cooperation) και ανάδραση (feedback).
- Το γενικό πρόβλημα είναι εύκολο να μοντελοποιηθεί, αλλά πολύ δύσκολο να επιλυθεί. Η γενική λύση του προβλήματος δεν έχει βρεθεί έως σήμερα.
- Στη γενική περίπτωση αναφερόμαστε, πλέον, σε <u>περιοχές χωρητικότητας</u> (capacity regions), δεδομένου ότι, λόγω παρεμβολών και συνεργασίας, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης κάθε χρήστη εξαρτάται από τους ρυθμούς μετάδοσης των άλλων χρηστών (στη γενική περίπτωση).

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel**)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.
- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα από τα άλλα.

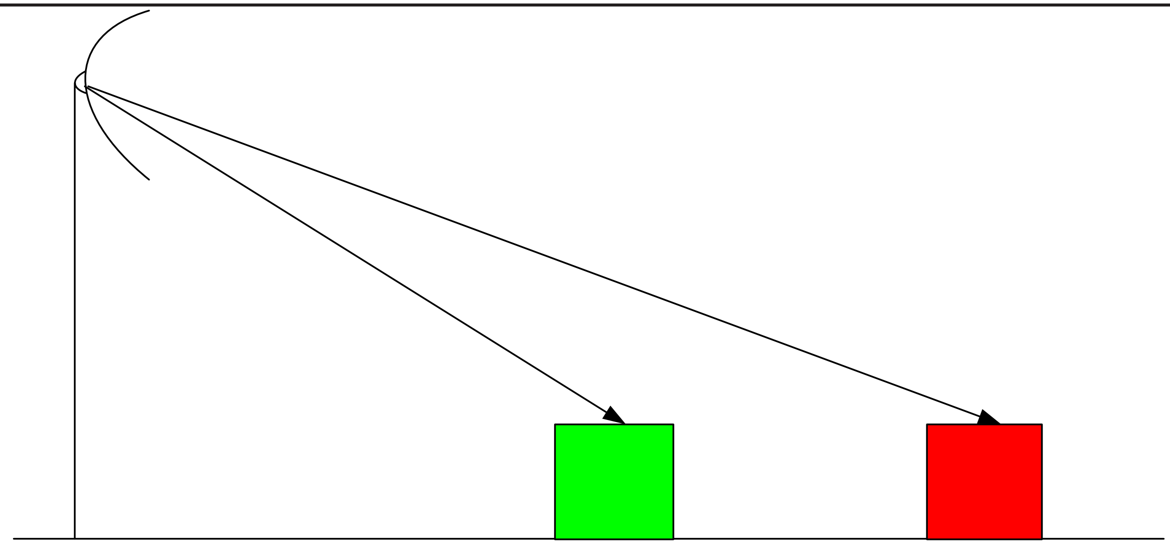
Προεπισκόπηση Μαθήματος
Γκαουσιανό Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης

- Για Γκαουσιανό MAC 2 χρηστών (δηλαδή MAC με Γκαουσιανό θόρυβο στο δέκτη) με περιορισμούς ισχύος P_1 και P_2 και διασπορά θορύβου N στο δέκτη η περιοχή χωρητικότητας δίνεται από τη λύση του παρακάτω συνόλου ανισοτήτων:

$$R_1 < C\left(\frac{P_1}{N}\right), R_2 < C\left(\frac{P_2}{N}\right) \text{ και } R_1 + R_2 < C\left(\frac{P_1 + P_2}{N}\right),$$

  όπου $C(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$.
- Η πολυπλεξία στο χρόνο (TDM) δεν είναι βέλτιστη στη γενική περίπτωση! Το βέλτιστο είναι όλοι οι χρήστες να εκπέμπουν ταυτόχρονα.
- Θα δούμε, επίσης, ότι, καθώς ο αριθμός των χρηστών αυξάνει, το άθροισμα των ρυθμών μετάδοσής τους τείνει στο άπειρο.
  - Παρόλο που η είσοδος νέων χρηστών δημιουργεί επιπρόσθετη παρεμβολή, η ισχύς που "φέρνει" κάθε νέος χρήστης οδηγεί σε αύξηση της συνολικής χωρητικότητας (στο <u>Γκαουσιανό</u> κανάλι).

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κανάλι Ευρυεκπομπής (**Broadcast Channel**)



- Ένας κεντρικός σταθμός που επιθυμεί να στείλει (διαφορετική) πληροφορία σε περισσότερους από έναν χρήστες.
- Δεν έχει κατανοηθεί πλήρως, εκτός από ειδικές περιπτώσεις (π.χ. Γκαουσιανός θόρυβος στους δέκτες).

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Γκαουσιανό Κανάλι Ευρυεκπομής

- Έστω Γκαουσιανό BC 2 χρηστών. Ο δέκτης εκπέμπει με ισχύ P και στέλνει διαφορετικά (και ανεξάρτητα) μηνύματα στους χρήστες. Έστω, επίσης, ότι για τις ισχείς (διασπορές) θορύβου των χρηστών, $N_1 < N_2$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του Γκαουσιανού BC δίνεται από τη λύση των ανισοτήτων

$$R_1 < C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right), R_2 < C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P + N_2}\right),$$

όπου $0 \leq \alpha \leq 1$, ανάλογα με την επιθυμητή αναλογία ρυθμών μετάδοσης.

- Θα δούμε ότι ο (αδύναμος) χρήστης 2 αποκωδικοποιεί μόνο το μήνυμα που προορίζεται για αυτόν, ενώ ο (ισχυρός) χρήστης 1 αποκωδικοποιεί και τα δύο μηνύματα.
- Όπως και για το MAC, η πολυπλεξία στο χρόνο δεν είναι πάντοτε η βέλτιστη στρατηγική χρήσης του καναλιού.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κανάλι Μεταγωγής (**Relay Channel**)

$$\begin{tikzcd}
 & Y_1{:}X_1 \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y
\end{tikzcd}$$

- Ένας πομπός και ένας δέκτης, με ενδιάμεσους μεταγωγούς οι οποίοι υποβοηθούν την επικοινωνία (και δε στέλνουν/λαμβάνουν δικά τους μηνύματα).
- Στη γενική περίπτωση, οι μεταγωγοί δεν εκπέμπουν το ίδιο σήμα με αυτό που λαμβάνουν.

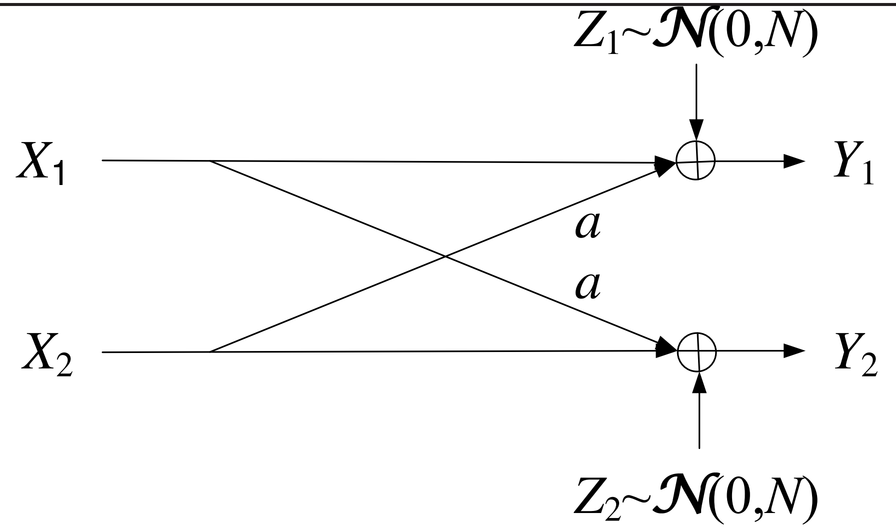
Προεπισκόπηση Μαθήματος
Γκαουσιανό Κανάλι Μεταγωγής

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει με ισχύ P ενώ ο μεταγωγός εκπέμπει με ισχύ P_1. Η ισχύς θορύβου στο δέκτη του μεταγωγού ισούται με N_1, ενώ στον τελικό δέκτη με N_2.
- Αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση

$$C = \max_{0 \le \alpha \le 1} \min \left\{ C\left(\frac{P + P_1 + 2\sqrt{(1-\alpha)PP_1}}{N_1 + N_2} \right), C\left(\frac{\alpha P}{N_1} \right) \right\}.$$

- Εάν ο μεταγωγός αναμεταδίδει το σήμα που λαμβάνει, $C = C(P/(N_1 + N_2))$.
- Εάν $P_1/N_2 \ge P/N_1$, δηλαδή ο λόγος σήματος προς θόρυβο στον τελικό δέκτη είναι μεγαλύτερος από το λόγο σήματος προς θόρυβο στο δέκτη του μεταγωγού, αποδεικνύεται ότι $\alpha = 1$ και $C = C(P/N_1)$. Επομένως, το κανάλι μετά το μεταγωγό "φαίνεται" αθόρυβο. Προσοχή: ο μεταγωγός δε στέλνει το ίδιο σήμα με αυτό που λαμβάνει.
- Ο τρόπος μετάδοσης δεν είναι προφανής, αλλά είναι πολύ ενδιαφέρων. Περισσότερες λεπτομέρειες σε μεταγενέστερη διάλεξη.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κανάλι Παρεμβολής (**Interference Channel**)

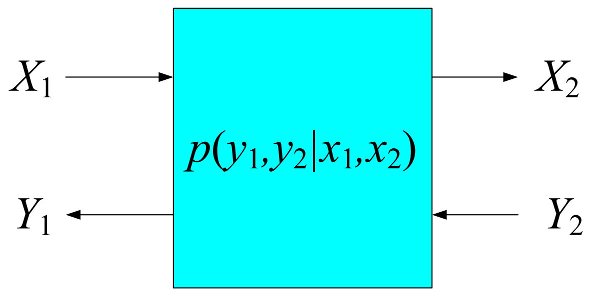


- K πομποί και K δέκτες με διαφωνία (crosstalk). Ο κάθε πομπός θέλει να στείλει πληροφορία στον αντίστοιχο δέκτη χωρίς να ενδιαφέρεται για την επικοινωνία των άλλων ζευγών. Στο σχήμα, $K = 2$.
- Παράδειγμα: Συνεστραμμένα ζεύγη χαλκού που βρίσκονται στο ίδιο πλέγμα (bundle) καλωδίων.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Γκαουσιανό Κανάλι Παρεμβολής

- Η περιοχή χωρητικότητας για το Κανάλι Παρεμβολής δεν έχει βρεθεί έως σήμερα, ακόμα και όταν ο θόρυβος είναι Γκαουσιανός.
- Για την περίπτωση ισχυρής παρεμβολής αποδεικνύεται ότι η χωρητικότητα ισούται με την περίπτωση όπου δεν υπάρχει παρεμβολή.
- Η ιδέα: Εάν $C(a^2P/(P+N)) \geq C(P/N)$, όπου a ο συντελεστής παρεμβολής, ο δέκτης 2 μπορεί να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 1, εφόσον, βέβαια, γνωρίζει το βιβλίο κωδίκων (codebook) που χρησιμοποιεί ο 1.
- Επομένως, μπορεί να αφαιρέσει την παρεμβολή από το λαμβανόμενο σήμα και, στη συνέχεια, να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 2 που προορίζεται για αυτόν.
- Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το δέκτη 1.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης (**Two-way Channel**)

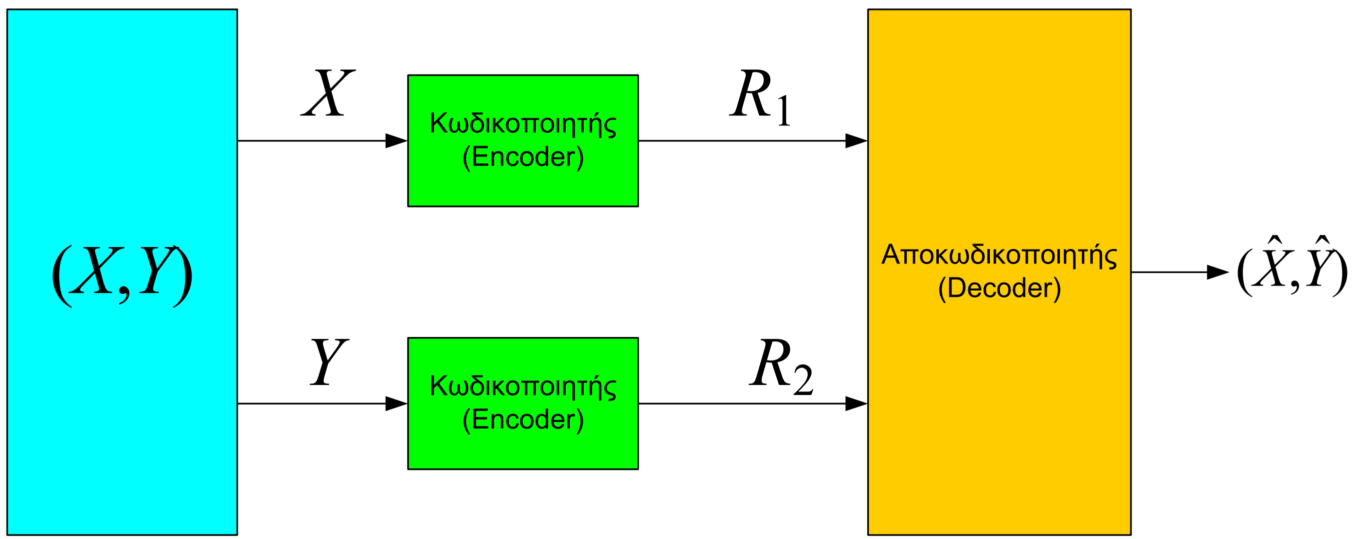


- Δύο σταθμοί οι οποίοι επικοινωνούν μέσω δύο διαύλων.
- Παρόμοιο με το Κανάλι Παρεμβολής, με τη διαφορά ότι ο πομπός 1 συνδέεται με το δέκτη 1 (και ο πομπός 2 συνδέεται με το δέκτη 2).
- Επομένως, ο πομπός 1 μπορεί να χρησιμοποιήσει πληροφορία από σύμβολα που έχουν ληφθεί από το δέκτη 1 πριν εκπέμψει $\longrightarrow$ ανάδραση (feedback).
- Η περιοχή χωρητικότητας του Καναλιού Διπλής Κατεύθυνσης δεν είναι γνωστή στη γενική περίπτωση.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Γκαουσιανό Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης

- Η περιοχή χωρητικότητας στην περίπτωση Γκαουσιανού θορύβου είναι γνωστή.
- Έστω ότι ο πομπός 1 και ο πομπός 2 μεταδίδουν με ρυθμό $R_1 < C(P_1/N_1)$ και $R_2 < C(P_2/N_2)$, αντίστοιχα, όπου N_1 (N_2) ο θόρυβος που προστίθεται στο σήμα του πομπού 1 (2).
- Ο δέκτης 2 γνωρίζει το σήμα που εξέπεμψε ο πομπός 2 και, επομένως, μπορεί να το αφαιρέσει από το σήμα που λαμβάνει. Συνεπώς, απομένει να αποκωδικοποιήσει το μήνυμα του πομπού 1 παρουσία γκαουσιανού θορύβου.
- Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για το δέκτη 1.
- Επομένως, το Γκαουσιανό Κανάλι Διπλής Κατεύθυνσης διαχωρίζεται σε δύο ανεξάρτητα Γκαουσιανά Κανάλια.
- Στη γενική περίπτωση (μη Γκαουσιανού Θορύβου) οι ρυθμοί μετάδοσης των δύο χρηστών δεν είναι ανεξάρτητοι.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κατανεμημένη Συμπίεση (**Distributed Data Compression**)



Έστω ότι η X και η Y συμπιέζονται ξεχωριστά (π.χ. σε διαφορετικά σημεία) με σκοπό ένας χρήστης να μπορεί να αποκωδικοποιήσει και τις δύο. Ποιος είναι ο ελάχιστος συνολικός ρυθμός $R = R_x + R_y$ που απαιτείται για να μεταδοθεί η πληροφορία και των 2 πηγών;

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Κατανεμημένη Συμπίεση (**Distributed Data Compression**)

- Γνωρίζουμε ότι για να μεταδώσουμε μια πηγή X (χωρίς απώλειες) χρειαζόμαστε ρυθμό τουλάχιστον $H(X)$.
- Για να μεταδώσουμε από κοινού 2 πηγές X και Y (με χρήση κοινού κωδικοποιητή), απαιτείται ρυθμός $R > H(X,Y)$.
- Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής (Slepian-Wolf): Αρκεί $R > H(X,Y)$! (καθώς, επίσης, και $R_x > H(X|Y)$ και $R_y > H(Y|X)$).
- Όπως θα δούμε, μόνο ο δέκτης (και όχι οι πομποί) χρειάζεται να γνωρίζει τις τυπικές ακολουθίες.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού (**Rate Distortion Theory**)

- Σε μερικές περιπτώσεις (π.χ. συνεχείς τ.μ.) δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί τέλεια συμπίεση με περιγραφή πεπερασμένου μήκους.
- Μέτρο παραμόρφωσης: Η απόσταση μιας τ.μ. από την αναπαράστασή της.
- Η Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού απαντά στο ερώτημα:
  - Δεδομένων της κατανομής μιας τ.μ. και ενός μέτρου παραμόρφωσης, ποια είναι η ελάχιστη μέση παραμόρφωση για δεδομένο ρυθμό; Ή, ισοδύναμα,
  - Δεδομένων της κατανομής μιας τ.μ. και ενός μέτρου παραμόρφωσης, ποιο είναι το ελάχιστο μήκος περιγραφής που απαιτείται προκειμένου η παραμόρφωση να μην υπερβεί μια δεδομένη τιμή;
- Ενδιαφέρον αποτέλεσμα: Είναι καλύτερα τ.μ. να περιγραφούν από κοινού παρά ξεχωριστά, ακόμα και όταν είναι ανεξάρτητες!
- Γεωμετρική ερμηνεία: Είναι πιο αποδοτικό να κατανέμουμε δεδομένα σημεία σε χώρους μεγαλύτερων διαστάσεων.
- Η Θεωρία Παραμόρφωσης Ρυθμού μπορεί να εφαρμοστεί και σε διακριτές τ.μ.

Προεπισκόπηση Μαθήματος
Πολυπλοκότητα κατά **Kolmogorov**

- Είδαμε ότι η εντροπία των ακολουθιών που παράγει μια πηγή εξαρτάται από την κατανομή τους.
- Kolmogorov: Αλγοριθμική πολυπλοκότητα (ή πολυπλοκότητα περιγραφής) ενός αντικειμένου: Το μήκος του συντομότερου προγράμματος υπολογιστή το οποίο περιγράφει το αντικείμενο.
- Δεν απαιτείται η χρήση της κατανομής του αντικειμένου!
- Αποδεικνύεται ότι η πολυπλοκότητα κατά Kolmogorov μιας ακολουθίας ισούται, κατά προσέγγιση, με την εντροπία της.
- Σημαντική παρατήρηση (Kolmogorov): Η αλγοριθμική πολυπλοκότητα δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο υπολογιστή στον οποίο "τρέχει" το πρόγραμμα (εκτός από μια σταθερά).

Επανάληψη Βασικών Ποσοτήτων Θεωρίας Πληροφορίας (1ο μέρος) Εντροπία, Δεσμευμένη Εντροπία

- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας
- Προεπισκόπηση μαθήματος
- Επανάληψη Βασικών Ποσοτήτων Θεωρίας Πληροφορίας (1ο μέρος):

  Εντροπία, Δεσμευμένη Εντροπία.

Τι εννοούμε με τον όρο "κωδικοποίηση";

- Η αναπαράσταση ενός σήματος/μηνύματος από κάποιο άλλο.
- Μια απεικόνιση από ένα σήμα/μήνυμα σε ένα άλλο.
- Ενδέχεται να μην είναι αντιστρέψιμη (κωδικοποίηση με απώλειες).
- Σε τι χρησιμεύει η κωδικοποίηση;
  1. Συμπίεση. (Κωδικοποίηση πηγής)
  2. Μετάδοση μέσω καναλιού (Κωδικοποίηση καναλιού)
  3. Μετατροπή σήματος/μηνύματος σε μορφή την οποία μπορούμε να επεξεργαστούμε.
  4. Προστασία δεδομένων και πνευματικής ιδιοκτησίας (Κρυπτογραφία, Υδατογράφηση).

Εντροπία διακριτής τ.μ.

- Θεωρούμε διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση μάζας πιθανότητας (pmf) $p(x)$.

$$H(X) = E_p\left[\log \frac{1}{p(X)}\right] = \sum_x p(x) \log \frac{1}{p(x)} = -\sum_x p(x) \log p(x).$$

- $\log \frac{1}{p(x)}$: Η πληροφορία που περιέχεται στο ενδεχόμενο $X = x$.
- Η $H(X)$ δεν εξαρτάται από τις τιμές της X, παρά μόνο από την κατανομή της.
- $H(X)$: Το όριο συμπίεσης.
  - Το <u>μέσο</u> μήκος της συντομότερης περιγραφής της X
  - Η <u>μέση</u> πληροφορία που περιέχεται στη X.
  - Η <u>μέση</u> αβεβαιότητα που έχουμε για τη X (πριν μας αποκαλυφθεί η τιμή της).
- Μονάδα μέτρησης: bit ($\log \to \log_2$). Σπανιότερα, nat ($\log \to \ln$).
- $H_b(X) = \log_b a H_a(X)$.
- Από εδώ και στο εξής $\log$ υπονοεί $\log_2$ (αν και δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποια μονάδα χρησιμοποιούμε).

Από κοινού και υπό συνθήκη εντροπία

- Από κοινού (συνδυασμένη) εντροπία (joint entropy) 2 τ.μ. με από κοινού pmf $p(x, y)$:

$$H(X,Y) = E_p\left[\log\frac{1}{p(X,Y)}\right]$$
$$= \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{1}{p(x,y)} = -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x,y).$$

- Δεσμευμένη εντροπία (conditional entropy) της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y:

$$H(X|Y) = E_p\left[\log\frac{1}{p(X|Y)}\right] = \sum_x \sum_y p(x,y)\log\frac{1}{p(x|y)}$$
$$= -\sum_x \sum_y p(x,y)\log p(x|y) = -\sum_x \sum_y p(y)p(x|y)\log p(x|y)$$
$$= -\sum_y p(y)\sum_x p(x|y)\log p(x|y) = \sum_y H(X|Y=y).$$

Ιδιότητες Εντροπίας διακριτής τ.μ.

- $H(X) \geq 0$.
- Η εντροπία είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας $p(x)$. Θα το αποδείξουμε.
- $H(X) \leq \log|\mathcal{X}|$, όπου $|\mathcal{X}|$ το μέγεθος του αλφαβήτου της X. Το μέγιστο επιτυγχάνεται από την ομοιόμορφη κατανομή: $p(X_i) = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$ για όλα τα $X_i \in \mathcal{X}$. Αποδείχθηκε στη "Θεωρία Πληροφορίας".
- $H(X,Y) = H(Y,X)$ (εύκολο, π.χ. με χρήση του ορισμού, δεδομένου ότι $p(x,y) = p(y,x)$).
- Κανόνας αλυσίδας: $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + \ldots + H(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$. Απόδειξη με χρήση ορισμού και κανόνα Bayes.
- Για <u>ανεξάρτητες</u> τ.μ., $H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$.
- Επίσης, εάν οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες, $H(X|Y) = H(X)$ και $H(Y|X) = H(Y)$.
- Γενικά, $H(X|Y) \neq H(Y|X)$.

Ρυθμός Εντροπίας διακριτής πηγής

- Ρυθμός εντροπίας διακριτής πηγής (τυχαίας διαδικασίας):

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ bits/σύμβολο},$$

  εφόσον το όριο συγκλίνει.
- Το όριο συγκλίνει πάντα όταν η πηγή είναι στάσιμη. Στην περίπτωση αυτή, συγκλίνει και η ποσότητα

$$H'(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} H(X_n|X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

  και $H(\mathcal{X}) = H'(\mathcal{X})$.
- Εάν οι τ.μ. είναι ανεξάρτητες, $H(\mathcal{X}) = H'(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$.
- Εάν, επιπλέον, οι τ.μ. είναι και ομοίως κατανεμημένες, $H(\mathcal{X}) = H'(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n H(X_i) = H(X_i) = H(X_1)$.
- Για στάσιμες πηγές, ο ρυθμός εντροπίας ποσοτικοποιεί το μέσο ποσό νέας πληροφορίας κάθε φορά που παίρνουμε ένα νέο δείγμα (το ποσό πληροφορίας των innovations για όσους έχουν ασχοληθεί με θεωρία εκτίμησης).

Παράδειγμα 1.1 (**Cover** σελ. 74)

- Έστω ακολουθία δυαδικών τ.μ. όπου η $p_i = \Pr\{X_i = 1\}$ δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από το i ως εξής:

$$p_i = \begin{cases} 0.5 & \text{εάν} \quad 2k < \log\log i \leq 2k+1 \\ 0 & \text{εάν} \quad 2k+1 < \log\log i \leq 2k+2, \end{cases}$$

  για $k = 0, 1, 2, \ldots$.

- Επομένως, κομμάτια όπου $H(X_i) = 1$ ακολουθούνται από εκθετικά αυξανόμενα κομμάτια όπου $H(X_i) = 0$ κ.ο.κ. Συνεπώς, ο μέσος όρος της $H(X_i)$ μεταβάλλεται συνεχώς και δε συγκλίνει.
- Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι δυνατό να οριστεί ρυθμός εντροπίας $H(\mathcal{X})$.

Ανακεφαλαίωση μαθήματος

- Θέματα που θα καλύψουμε στο μάθημα
  - Συμπίεση, AEP και Θεώρημα Κωδικοποίησης Πηγής.
  - Χωρητικότητα Καναλιού, Joint AEP και Θεώρημα Κωδικοποίησης Καναλιού.
  - Συνεχείς τ.μ., Γκαουσιανό Κανάλι.
  - Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων
  - Άλλα θέματα (εάν προλάβουμε).
- Επανάληψη Βασικών Ποσοτήτων Θεωρίας Πληροφορίας και ιδιοτήτων τους
  - Εντροπία (διακριτής τ.μ.)
  - Δεσμευμένη Εντροπία
  - Από κοινού Εντροπία

Προεπισκόπηση επόμενου μαθήματος

- Συνέχεια Επανάληψης
  - Σχετική Εντροπία
  - Αμοιβαία Πληροφορία.
  - Κυρτές συναρτήσεις και ανισότητα Jensen.
  - Ιδιότητες Εντροπίας, Σχετικής Εντροπίας και Αμοιβαίας Πληροφορίας.
  - Η $I(X;Y)$ είναι κοίλη ($\cap$) συνάρτηση της $p(x)$ για δεδομένη $p(y|x)$.
  - Η $I(X;Y)$ είναι κυρτή ($\cup$) συνάρτηση της $p(y|x)$ για δεδομένη $p(x)$.
- Ανισότητα Επεξεργασίας Δεδομένων: Δεν υπάρχει τρόπος επεξεργασίας που να μπορεί να αυξήσει την πληροφορία που περιέχεται σε μια τ.μ. Αντίθετα, ενδέχεται να τη μειώσει.
- Ανισότητα Fano. Δίνει φράγμα για την πιθανότητα σφάλματος στην εκτίμηση τ.μ. με βάση παρατήρηση άλλης τ.μ. Θα τη χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στην Κωδικοποίηση Καναλιού.
- Ιδιότητα Ασυμπτωτικής Ισοδιαμέρισης (AEP): Η "καρδιά" της συμπίεσης (και της Θεωρίας Πληροφορίας).