EE728

Προχωρημένα Θέματα Θεωρίας Πληροφορίας

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

10ο Μάθημα – 19 Μαΐου 2008

Ανακεφαλαίωση προηγούμενου μαθήματος

- AEP για συνεχείς τ.μ.
- Γκαουσιανό Κανάλι και Χωρητικότητα.
- Απόδειξη του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό κανάλι.
- Χωρητικότητα καναλιού Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN).
- Χωρητικότητα συστήματος από παράλληλα και ανεξάρτητα κανάλια AWGN. Waterfilling.
- Κανάλια Προσθετικού Έγχρωμου Γκαουσιανού Θορύβου (ACGN). Χωρητικότητα.

Προεπισκόπηση σημερινού μαθήματος

- Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων.
  - Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (MAC).

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- $\boxed{\text{Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων}}$
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC)

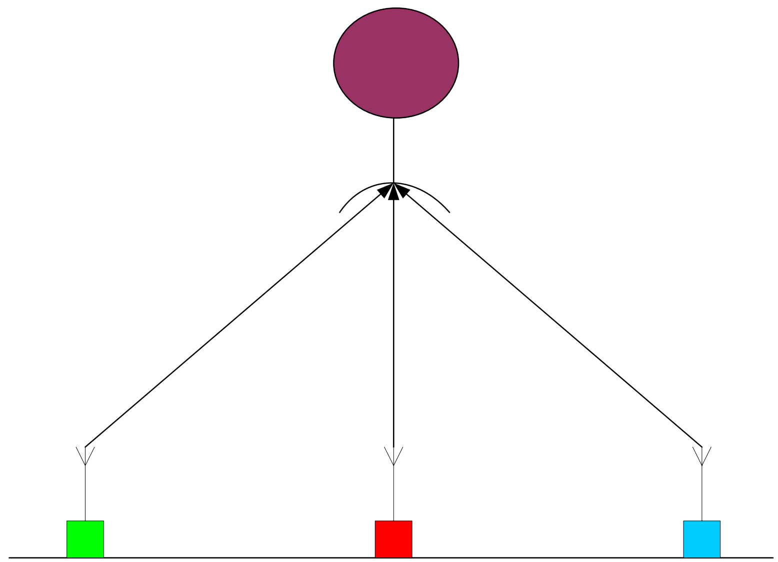
Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων (**Network Info Theory**)

- Συστήματα με περισσότερους από έναν πομπούς ή/και περισσότερους από έναν δέκτες.
- Νέα στοιχεία: Παρεμβολή (interference), συνεργασία (cooperation) και ανάδραση (feedback).
- Το γενικό πρόβλημα είναι εύκολο να μοντελοποιηθεί, αλλά πολύ δύσκολο να επιλυθεί. Η γενική λύση του προβλήματος δεν έχει βρεθεί έως σήμερα.
- Στη γενική περίπτωση αναφερόμαστε, πλέον, σε περιοχές χωρητικότητας (capacity regions), δεδομένου ότι, λόγω παρεμβολών και συνεργασίας, ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης κάθε χρήστη εξαρτάται από τους ρυθμούς μετάδοσης των άλλων χρηστών (στη γενική περίπτωση).
- Η Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών τα τελευταία χρόνια προκειμένου να σχεδιαστούν πιο αποδοτικά συστήματα επικοινωνιών.

Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel – MAC**)

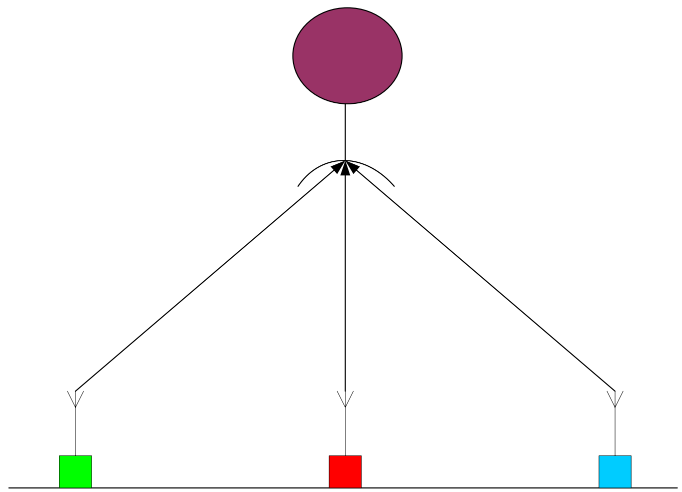
- Εισαγωγή στη Θεωρία Πληροφορίας Δικτύων
- Το Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (Multiple Access Channel – MAC)

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**Multiple Access Channel**)



- Πολλοί χρήστες που επιθυμούν να επικοινωνήσουν με ένα κεντρικό σταθμό. Παράδειγμα: Κινητά τερματικά προς σταθμό βάσης.
- Το κανάλι πολλών χρηστών που έχει κατανοηθεί καλύτερα.

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) (2)



- Έως τώρα, η παράμετρος που επηρέαζε την επικοινωνία ήταν ο θόρυβος. Στο MAC, επιπλέον του θορύβου, η επικοινωνία επηρεάζεται από παρεμβολές (interference).
- Πόση πληροφορία μπορούμε να μεταδώσουμε για κάθε χρήστη, και πώς σχετίζονται μεταξύ τους οι χωρητικότητες των χρηστών;

Κανάλι Πολλαπλής Πρόσβασης (**MAC**) – Ορισμοί

- Για απλοποίηση, θα αναφερθούμε, κατ' αρχήν, σε MAC 2 χρηστών.
- Διακριτό MAC χωρίς μνήμη: Αποτελείται από 3 αλφάβητα $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ και $\mathcal{Y}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $p(y|x_1, x_2)$.
- Κώδικας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ για το MAC: Αποτελείται από δύο σύνολα ακεραίων $\mathcal{W}_1 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_1}\}$ και $\mathcal{W}_2 = \{1, 2, \ldots, 2^{nR_2}\}$ (σύνολα μηνυμάτων – message sets), δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης (encoding functions):

$$X_1 : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{X}_1^n, \text{ και}$$
$$X_2 : \mathcal{W}_2 \to \mathcal{X}_2^n,$$

και μια συνάρτηση αποκωδικοποίησης (decoding function)

$$g : \mathcal{Y}^n \to \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2.$$

Μετάδοση στο **MAC**

- Ο χρήστης 1 επιλέγει ένα από 2^{nR_1} μηνύματα ομοιόμορφα και στέλνει την αντίστοιχη κωδική λέξη στο κανάλι. Ομοίως, ο χρήστης 2 επιλέγει ένα από 2^{nR_2} μηνύματα ανεξάρτητα από το χρήστη 1 και εκπέμπει την αντίστοιχη κωδική λέξη.
- Μέση Πιθανότητα Σφάλματος:

$$P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{(w_1,w_2)\in\mathcal{W}_1\times\mathcal{W}_2} \Pr\{g(Y^n) \neq (w_1,w_2) | \text{εστάλη το } (w_1,w_2)\}$$

- Ένα ζεύγος ρυθμών μετάδοσης (R_1, R_2) είναι εφικτό για το MAC εάν υπάρχει ακολουθία κωδίκων $(2^{nR_1}, 2^{nR_2}, n)$ τέτοια ώστε $P_e^{(n)} \to 0$.
- Η περιοχή χωρητικότητας (capacity region) του MAC είναι το περίβλημα (closure) των εφικτών (R_1, R_2).

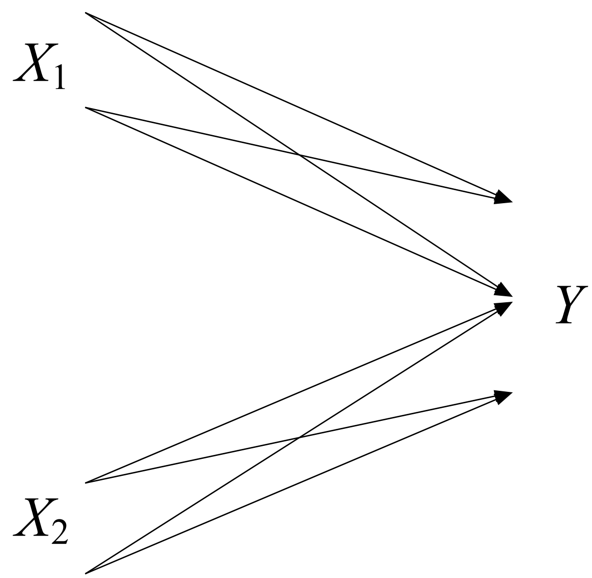
Περιοχή Χωρητικότητας **MAC**

- Θεώρημα (Cover 15.3.1): Η χωρητικότητα του MAC $(\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2, p(y|x_1, x_2), \mathcal{Y})$ είναι το περίβλημα (**closure**) της κυρτής γάστρας (**hull**) όλων των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_1 &< I(X_1; Y|X_2), \\ R_2 &< I(X_2; Y|X_1), \\ R_1 + R_2 &< I(X_1, X_2; Y) \end{aligned}$$

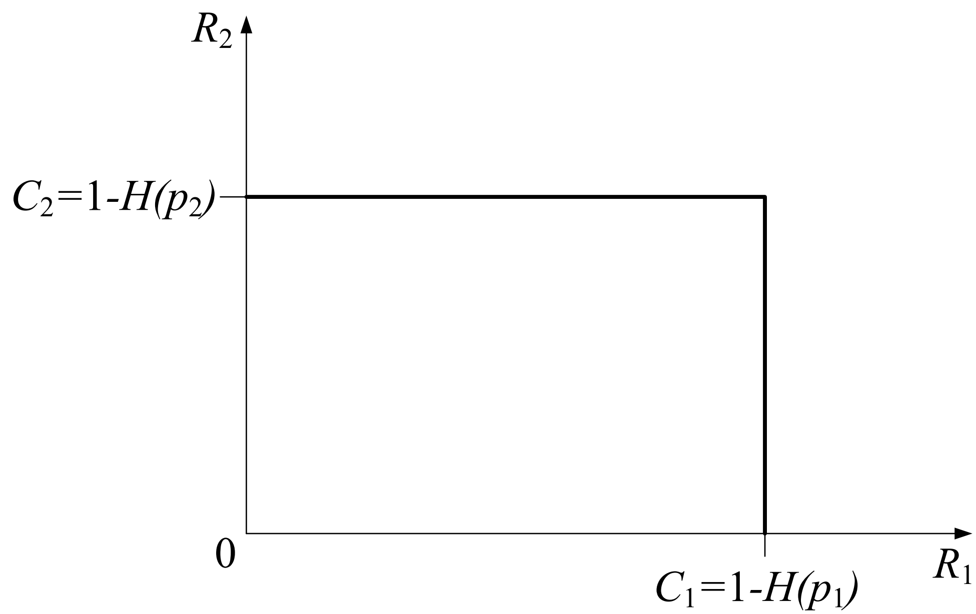
  για κάποια κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$ στο σύνολο $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$.
- Δε θα το αποδείξουμε στο μάθημα.

Παράδειγμα 10.1 - Ανεξάρτητα **BSC**



- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 = 1 - H(p_1)$ από το 1ο κανάλι, και, ταυτόχρονα, με ρυθμό $R_2 = 1 - H(p_2)$ από το 2ο κανάλι.
- Τα δύο κανάλια είναι ανεξάρτητα $\longrightarrow$ δεν εμφανίζεται παρεμβολή.

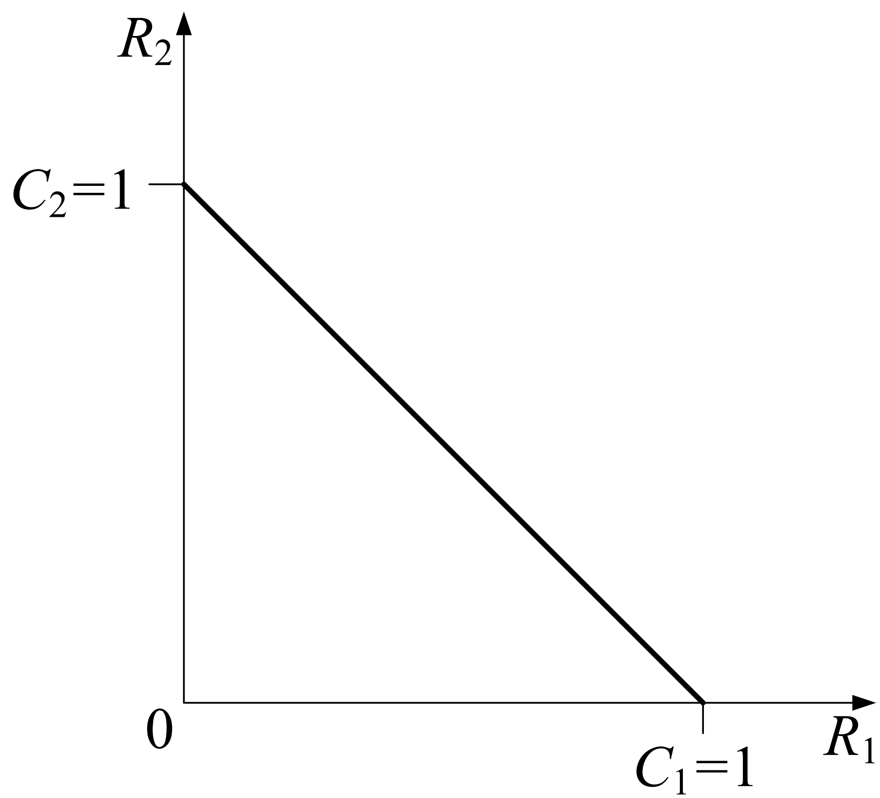
Παράδειγμα 10.1 - Ανεξάρτητα **BSC** – Περιοχή Χωρητικότητας



Παράδειγμα 10.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι

- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 X_2$.
- Όταν $X_1 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της X_2. $R_1 = 0$, δεδομένου ότι η X_1 δεν αλλάζει.
- Ομοίως, όταν $X_2 = 1$, μπορούμε να στείλουμε $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού με ομοιόμορφη κατανομή της X_1. $R_2 = 0$.
- Μπορούμε να πετύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, 1-\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$ με διαμέριση στο χρόνο (timesharing). Δηλαδή, "παγώνουμε" το X_2 για $100\lambda\,\%$ του χρόνου και μεταδίδουμε με ομοιόμορφα κατανεμημένη X_1 (αντίστροφα για το υπόλοιπο $100(1-\lambda)\,\%$).

Παράδειγμα 10.2 - Δυαδικό Πολλαπλασιαστικό Κανάλι – Περιοχή Χωρητικότητας

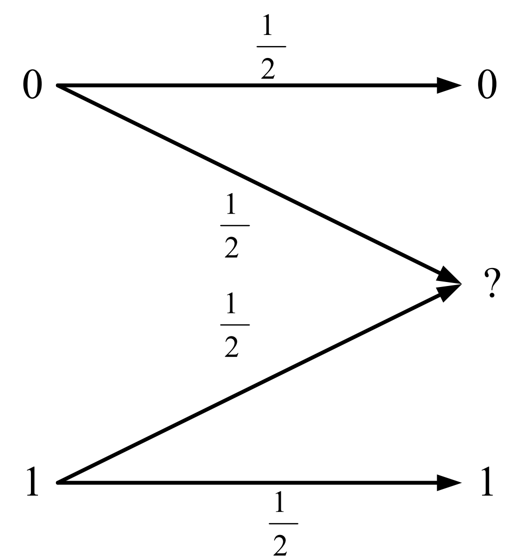


Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής

- Οι X_1 και X_2 παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1\} \times \{0,1\}$. $Y = X_1 + X_2$.
- Εάν $Y = 1$ δε γνωρίζουμε εάν η είσοδος ήταν (X_1, X_2) =(1,0) ή (0,1).
- Εάν θέσουμε $X_1 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_2 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_2).
- Εάν θέσουμε $X_2 = 1$, μπορούμε να μεταδώσουμε με $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού (με ομοιόμορφη X_1).
- Μπορούμε να στείλουμε με $R_1 + R_2 > 1$ bit/χρήση καναλιού;

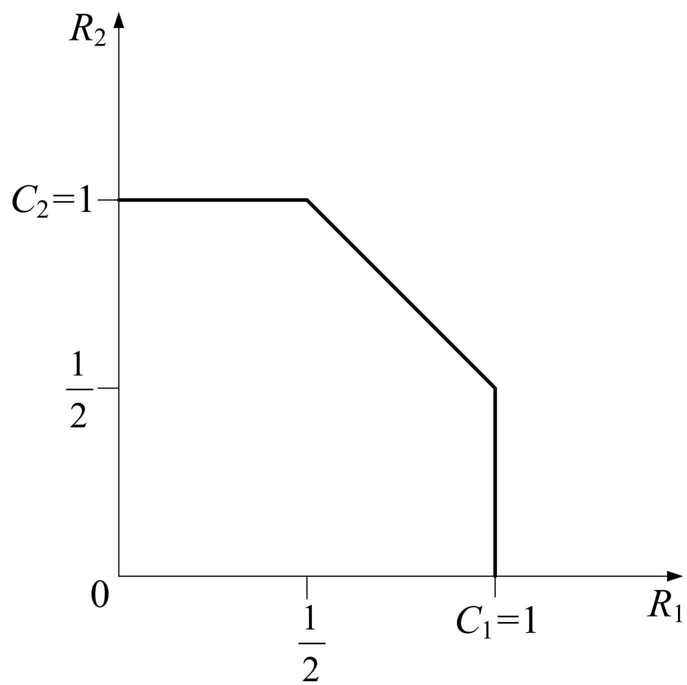
Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής (2)

- Έστω ότι χρησιμοποιούμε ομοιόμορφη X_1. Επομένως, $R_1 = 1$ bit/χρήση καναλιού.
- Από τη σκοπιά της X_2 το κανάλι είναι δυαδικό κανάλι διαγραφής με πιθανότητα διαγραφής $p = 1/2$.



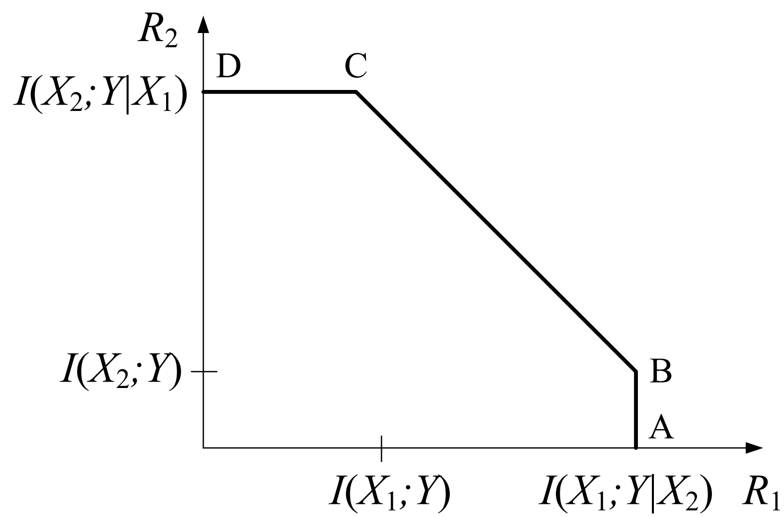
- Επομένως, μπορούμε να στείλουμε επιπλέον $1/2$ bits της X_2!

Παράδειγμα 10.3 - Δυαδικό **MAC** Διαγραφής – Περιοχή Χωρητικότητας



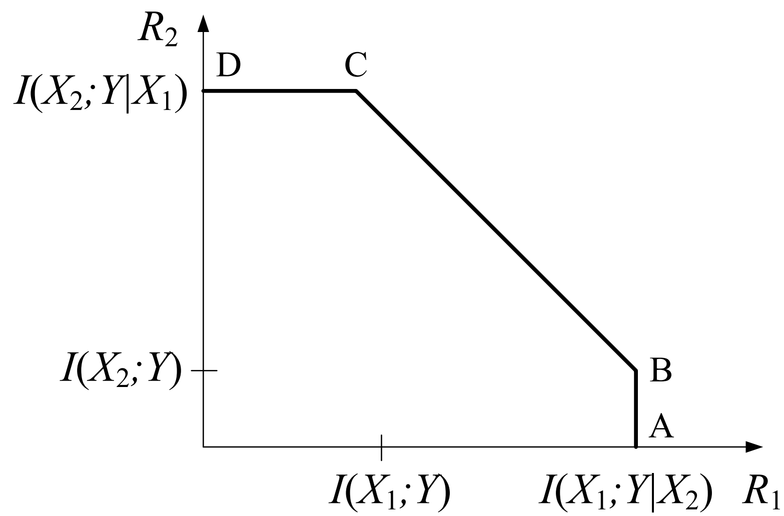
- Μπορούμε, επίσης, να επιτύχουμε οποιοδήποτε ζεύγος $(R_1, R_2) = (0.5 + \lambda, 1 - \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 0.5$ με timesharing.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC**



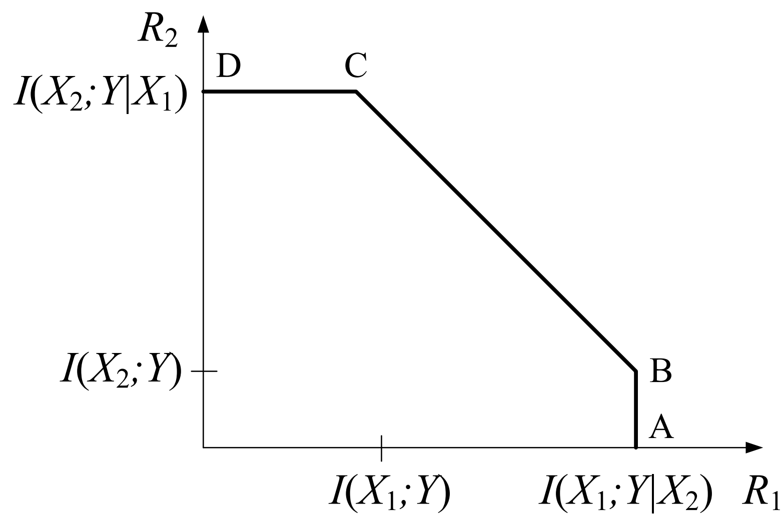
- Σημείο A: Ο R_2 δε στέλνει καθόλου πληροφορία. $X_2 = x_2$ όπου x_2 η τιμή που μεγιστοποιεί την $I(X_1;Y|X_2)$: $\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1;Y|X_2)$. Για δεδομένη κατανομή $p_1(x_1)p_2(x_2)$, $I(X_1;Y|X_2) = \sum_{x_2} p_2(x_2) I(X_1;Y|X_2 = x_2) \leq \max_{x_2} I(X_1;Y|X_2 = x_2)$.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC** (2)



- Σημείο Β: Η X_1 αποτελεί θόρυβο για τη μετάδοση της X_2. Ο μέγιστος ρυθμός για τη μετάδοση της X_2 ισούται με $I(X_2;Y)$. Στο δέκτη, ανιχνεύεται η X_2. Η αποκωδικοποίηση της X_1 λαμβάνει υπόψιν την τιμή της X_2.
- Ο R_1 ισούται με $\sum_{x_2} p(x_2) I(X_1;Y|X_2 = x_2) = I(X_1;Y|X_2)$.

Γενική Μορφή Περιοχής Χωρητικότητας **MAC** (3)

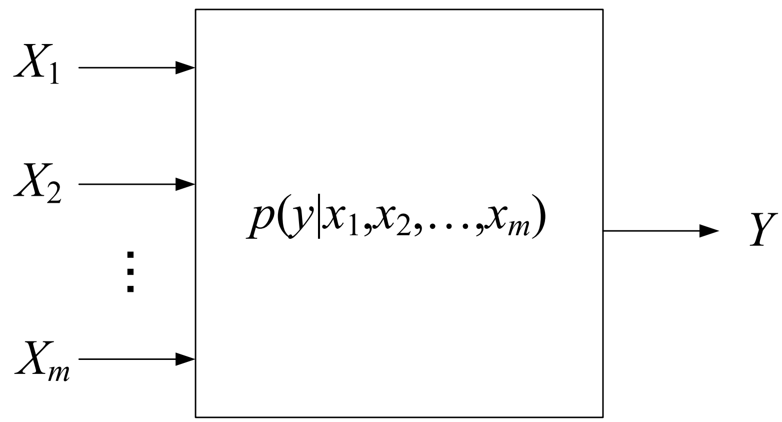


- Σημεία C και D: Αντίστοιχα με τα A και B, αλλά με τους ρόλους των X_1 και X_2 ανεστραμμένους.
- Επιπλέον του ρυθμού μετάδοσης αλλάζει και η σειρά αποκωδικοποίησης στο δέκτη. Δηλαδή, για το σημείο B αποκωδικοποιείται πρώτα η X_2, ενώ για το σημείο C αποκωδικοποιείται πρώτα η X_1.

Διαδοχική Αποκωδικοποίηση (**Successive Decoding**) στο **MAC**

- Η ιδέα της διαδοχικής αποκωδικοποίησης (successive decoding ή successive interference cancellation – SIC) είναι κεντρική στο MAC (καθώς και στο degraded Broadcast Channel, όπως θα δούμε στη συνέχεια).
- Π.χ. για το σημείο B. Αποκωδικοποιούμε τη X_2 θεωρώντας τη X_1 ως θόρυβο.
- Ανάλογα με την τιμή της X_2, από τη σκοπιά της X_1 βλέπουμε $|\mathcal{X}_2|$ διαφορετικά κανάλια. Αφού βρούμε την τιμή της X_2 επιλέγουμε το (ένα από τα $|\mathcal{X}_2|$) κανάλι που "βλέπει" η X_1, και αποκωδικοποιούμε με βάση αυτό το συγκεκριμένο κανάλι.
- Αντίστροφα, για το σημείο C, αποκωδικοποείται πρώτα η X_1 και η X_2 αποκωδικοποιείται με βάση ένα από $|\mathcal{X}_1|$ διαφορετικά κανάλια.
- Στο Γκαουσιανό MAC, η επιλογή καναλιού γίνεται με αφαίρεση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.
- Το τμήμα μεταξύ των B και C επιτυγχάνεται με timesharing.

Γενίκευση **MAC** για m χρήστες

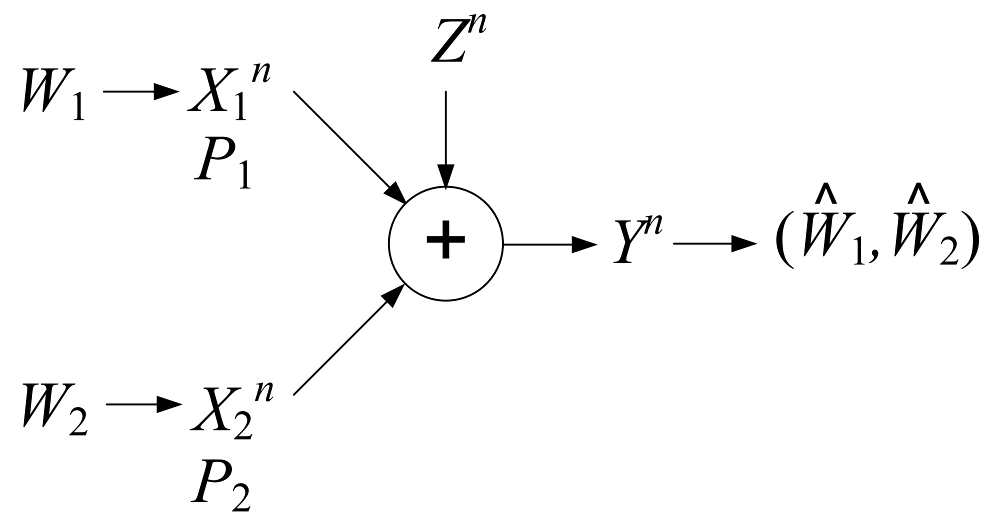


- Θεώρημα (**Cover 15.3.6**): Η περιοχή χωρητικότητας του MAC m χρηστών είναι το περίβλημα (**closure**) της κυρτής γάστρας (**hull**) των διανυσμάτων $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$R(S) \leq I(X(S); Y|X(S^c)) \text{ για \underline{όλα} τα σύνολα } S \subseteq \{1, 2, \ldots, m\},$$

όπου S^c το συμπλήρωμα του S.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών



- Τη χρονική στιγμή i, ο δέκτης λαμβάνει σήμα $Y_i = X_{1i} + X_{2i} + Z_i$, όπου ο θόρυβος Z είναι i.i.d $\sim \mathcal{N}(0, N)$. Επίσης, ο κάθε πομπός i έχει περιορισμό ισχύος P_i. Οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών (2)

- Για την $I(X_1;Y|X_2)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
I(X_1;Y|X_2) &= h(Y|X_2) - h(Y|X_1,X_2) \\
&= h(X_1+X_2+Z|X_2) - h(X_1+X_2+Z|X_1,X_2) \\
&= h(X_1+Z|X_2) - h(Z|X_1,X_2) = h(X_1+Z) - h(Z) \\
&= h(X_1+Z) - \frac{1}{2}\log(2\pi e)N \\
&\overset{(a)}{\le} \frac{1}{2}\log(2\pi e)(P_1+N) - \frac{1}{2}\log(2\pi e)N = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_1}{N}\right).
\end{aligned}$$

(a) γιατί;

- Ομοίως, $I(X_2;Y|X_1) \le \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P_2}{N}\right)$.
- Η X_1 και η X_2 πρέπει να ακολουθούν γκαουσιανή κατανομή ($\mathcal{N}(0,P_1)$ και $\mathcal{N}(0,P_2)$, αντίστοιχα).

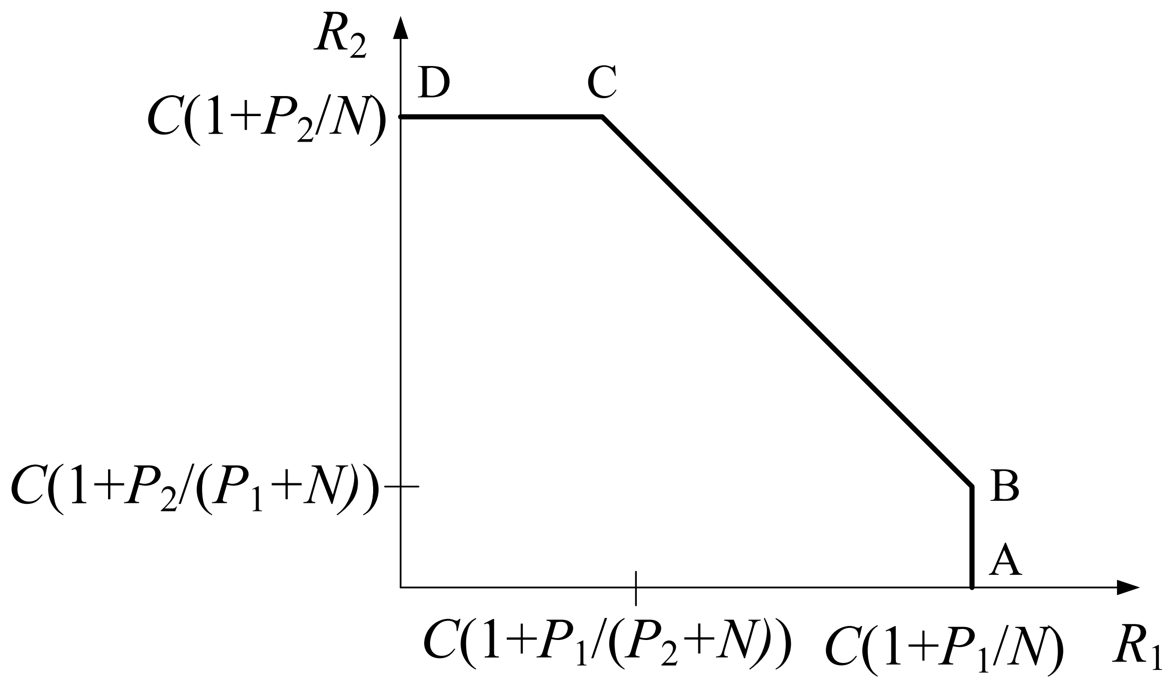
Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας

- Ορίζουμε τη χωρητικότητα του καναλιού AWGN με λόγο σήματος προς θόρυβο x ως $C(x) \triangleq \frac{1}{2}\log(1+x)$.
- Η περιοχή χωρητικότητας του γκαουσιανού MAC 2 χρηστών δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} R_1 &\le C\left(\frac{P_1}{N}\right), \\ R_2 &\le C\left(\frac{P_2}{N}\right), \text{ και} \\ R_1 + R_2 &\le C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right) \end{aligned}$$

και επιτυγχάνεται με $X_1 \sim \mathcal{N}(0, P_1)$ και $X_2 \sim \mathcal{N}(0, P_2)$.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Περιοχή Χωρητικότητας (2)



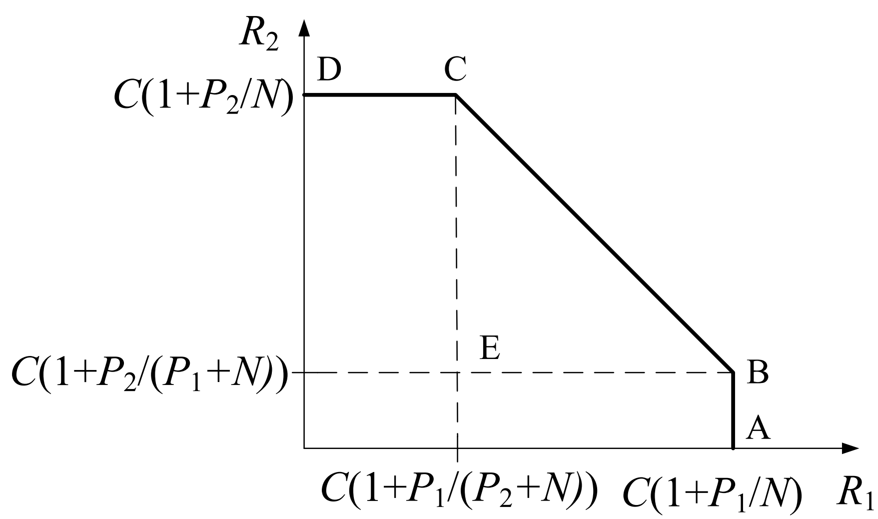
- Μπορούμε να επιτύχουμε ρυθμό μετάδοσης έως και $C\left(\frac{P_1+P_2}{N}\right)$, σα να είχαμε, δηλαδή, έναν πομπό που εκπέμπει με ισχύ $P_1 + P_2$.

Γκαουσιανό **MAC** 2 χρηστών – Σχόλια

- Θεωρούμε το σημείο Β. Ο δέκτης αποκωδικοποιεί πρώτα την πληροφορία του πομπού 2, θεωρώντας τη μετάδοση του πομπού 1 ως θόρυβο: $R_2 = C\left(\frac{P_2}{P_1+N}\right)$.
- Στη συνέχεια, ο δέκτης αφαιρεί από το σήμα Y το αποκωδικοποιημένο σήμα X_2. Επομένως, το μόνο άγνωστο σήμα που απομένει είναι ο θόρυβος, και $R_1 = C\left(\frac{P_1}{N}\right)$.
- Για το σημείο C εφαρμόζεται η αντίθετη διαδικασία. Δηλαδή, αποκωδικοποίηση του X_1 θεωρώντας ότι το X_2 είναι θόρυβος, αφαίρεση του X_1 από το Y και αποκωδικοποίηση του X_2 παρουσία μόνο του θορύβου.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαδοχική αποκωδικοποίηση (successive decoding), διαδοχική απαλοιφή παρεμβολών (successive interference cancellation – SIC) ή onion peeling.

Σύγκριση με **CDMA uplink**

- **Uplink**: Μετάδοση πληροφορίας από χρήστες σε σταθμό βάσης. Εμπίπτει στο μοντέλο του MAC (παρόλο που, στη γενική περίπτωση, είναι MAC με διαλείψεις (fading)).
- Στα συμβατικά συστήματα CDMA ο κάθε χρήστης αποκωδικοποιείται θεωρώντας την επικοινωνία των άλλων χρηστών ως παρεμβολή (σημείο E).
- Με χρήση SIC αυξάνεται ο συνολικός ρυθμός μετάδοσης και το πρόβλημα near-far παύει να υφίσταται.



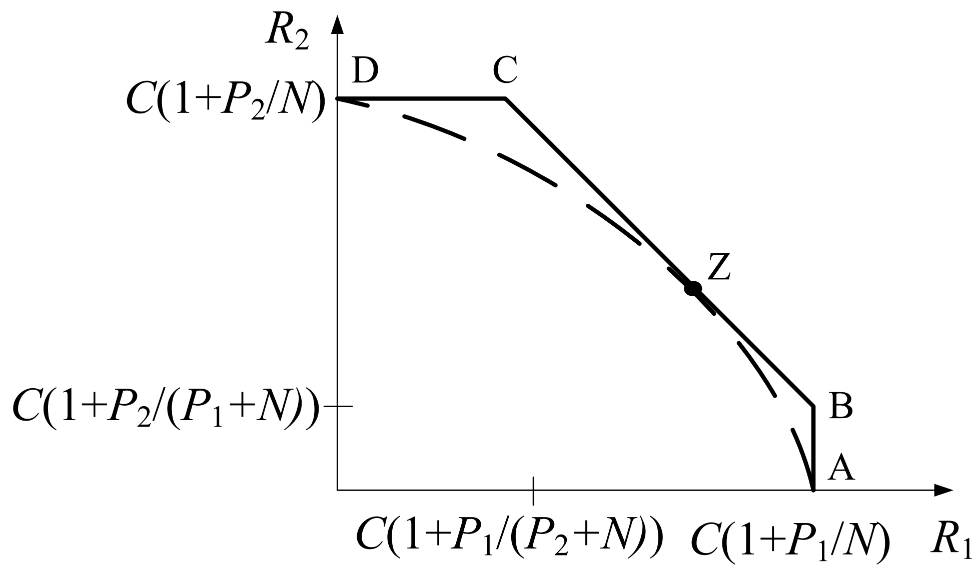
Σύγκριση με **FDMA uplink**

- Έστω ότι οι δύο χρήστες μοιράζονται το φάσμα. Ο χρήστης 1 χρησιμοποιεί W_1 Hz, ενώ ο χρήστης 2 χρησιμοποιεί W_2 Hz. Το συνολικό φάσμα ισούται με $W_1 + W_2 = W$ Hz.
- Ο κάθε χρήστης εκπέμπει μόνος του στο κανάλι AWGN που του αναλογεί. Επομένως,

$$R_1 = W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{NW_1}\right)$$

$$R_2 = W_2 \log\left(1 + \frac{P_2}{NW_2}\right) = (W - W_1)\log\left(1 + \frac{P_2}{N(W - W_1)}\right)$$

Σύγκριση με **FDMA uplink** (2)



- Η καμπύλη εφάπτεται με το όριο της περιοχής χωρητικότητας σε ένα μόνο σημείο στο οποίο ισχύει $P_1/W_1 = P_2/W_2$.
- Επομένως, στη γενική περίπτωση, η χρήση FDMA στο MAC είναι υποβέλτιστη (suboptimal).

Σύγκριση με **TDMA uplink**

- Ο χρήστης 1 μεταδίδει για $\alpha 100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι P_1/α (έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια στη μονάδα του χρόνου να ισούται με P_1).
- Ο χρήστης 2 μεταδίδει για $(1-\alpha)100$ % του συνολικού χρόνου. Η μέση ισχύς του κατά τη διάρκεια μετάδοσης είναι $P_2/(1-\alpha)$.
- Επομένως,

$$R_1 = \alpha W \log\left(1 + \frac{P_1}{N\alpha W}\right)$$

$$R_2 = (1-\alpha) W \log\left(1 + \frac{P_2}{N(1-\alpha) W}\right)$$

- Η ίδια περιοχή, όπως και στην περίπτωση FDMA.

MAC: Σχόλια

- FDMA/TDMA υποβέλτιστες, εκτός εάν $P_i/W_i = c$ για όλους τους χρήστες i.
- CDMA υποβέλτιστη, εκτός εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί SIC (onion peeling).
- $\sum_i R_i \leq C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right)$. Επομένως, για κάθε επιπρόσθετο χρήστη που εμφανίζεται στο κανάλι η συνολική χωρητικότητα αυξάνει!
- Ωστόσο, λόγω της λογαριθμικής σχέσης μεταξύ P και C, η χωρητικότητα ανά χρήστη $\frac{1}{m}C\left(\frac{\sum_i P_i}{N}\right) \to 0$ για αριθμό χρηστών $m \to \infty$.