

ΕΕ725

Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

11η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

13 Μαΐου 2010

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

Κανάλια και διαφορισμός

- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 10.1.4.
- Tse & Vishwanath, Fundamentals of Wireless Communication: 3.2.1, 3.3.1, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.5.

OFDM

- R. van Nee & R. Prasad, OFDM for Wireless Multimedia Communications: 1.5, 2.1 – 2.3.
- Cioffi: 4ο κεφάλαιο (κυρίως για την ύλη της επόμενης διάλεξης).

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι
 - Χρήση διαφορισμού για βελτίωση της απόδοσης
 - Μετάδοση SIMO
 - Μετάδοση SIMO

- 2 Διαμόρφωση OFDM
 - Εισαγωγή
 - Η βασική ιδέα
 - Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση
 - OFDM σε κανάλια με ISI

Πώς μπορούμε να ελαττώσουμε την P_e σε κανάλια με διαλείψεις;

- Ένας τρόπος είναι να δημιουργήσουμε με κάποιο τρόπο αντίγραφα του ίδιου σήματος \Rightarrow τεχνικές διαφορισμού (diversity).
 - Διαφορισμός στο χρόνο (time diversity): Μετάδοση συσχετισμένης πληροφορίας σε περισσότερες από μια χρονικές στιγμές ώστε να εκμεταλλευόμαστε διαφορετικές τιμές των $h[m]$.
 - Διαφορισμός στη συχνότητα (frequency diversity): Μετάδοση σε περισσότερες από μια περιοχές του φάσματος (στην περίπτωση που έχουμε multipath και, επομένως, frequency-selective fading) ώστε να εκμεταλλευόμαστε διαφορετικές τιμές της απόκρισης συχνότητας $H(f, m)$.
 - Διαφορισμός στο χώρο (space diversity): Χρήση περισσότερων από μία κεραιών στον πομπό (MISO), στο δέκτη (SIMO) ή και στους δύο (MIMO) ώστε να έχουμε περισσότερα από ένα κανάλια (στην περίπτωση MIMO).

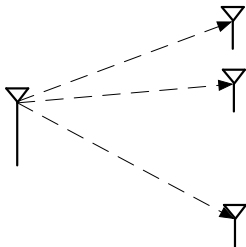
Πώς μπορούμε να ελαττώσουμε την P_e σε κανάλια με διαλείψεις; (2)

- Επίσης, εάν γνωρίζουμε το κανάλι στον πομπό, μπορούμε να μεταδώσουμε πιο “έξυπνα”: Να αποφύγουμε τις “κακές” περιοχές του καναλιού και να καταναείμουμε την ισχύ που εξοικονομείται στις “καλές” περιοχές.
- Αποδεικνύεται ότι, όταν ο πομπός γνωρίζει το κανάλι, για $\text{SNR} \rightarrow \infty$ η χωρητικότητα του καναλιού Rayleigh 1 tap υπολείπεται κατά 0.83 bits/s/Hz (-2.5 dB) του καναλιού AWGN (δείτε π.χ. Tse & Viswanath, 5.4.5).
- Αντίθετα, για πολύ μικρά SNR, η χωρητικότητα υπερβαίνει αυτή του καναλιού AWGN γιατί η πολύ περιορισμένη ενέργεια που διαθέτουμε χρησιμοποιείται μόνο όταν το στιγμιαίο κέρδος του καναλιού είναι πολύ μεγάλο.
- Πρόβλημα: Καθυστέρηση. Ενδέχεται να μην έχουμε την πολυτέλεια να περιμένουμε μέχρι να εμφανιστεί καλό κανάλι (ειδικά για πολύ μικρά SNR).

Διαφορισμός Χώρου (space/antenna diversity)

- Τα συστήματα MIMO επιτυγχάνουν και κάτι περισσότερο: Εάν τα κανάλια που δημιουργούνται είναι ανεξάρτητα Rayleigh, ένα σύστημα $N_t \times N_r$ όπου N_t και N_r ο αριθμός κεραιών στον πομπό και στο δέκτη, αντίστοιχα, έχει χωρητικότητα $\min(N_t, N_r)$ φορές μεγαλύτερη από αυτή του συστήματος SISO.
- Επομένως, με τα συστήματα MIMO αυξάνουμε τους βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom) του συστήματος.
- Μάλιστα, σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να “ανταλλάξουμε” βαθμούς ελευθερίας με κέρδος λόγω διαφορισμού (diversity gain).

Μετάδοση SIMO

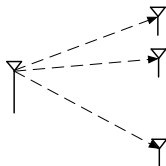


- Μία κεραία στον πομπό, πολλές κεραίες στο δέκτη.
- Θεωρούμε, κατ'αρχάς, σταθερό κανάλι. Στην κεραία l ,

$$y_l[m] = h_l x[m] + z_l[m].$$

- Θεωρούμε ότι οι (μιγαδικοί) θόρυβοι είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι και ότι $z_l[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

Μετάδοση SIMO (2)



- Επομένως, αν συγκεντρώσουμε τα σήματα όλων των κεραιών,

$$\mathbf{y}[m] = \mathbf{h}x[m] + \mathbf{z}[m],$$

όπου $\mathbf{y}[m] = [y_1[m] \dots y_L[m]]^T$, $\mathbf{h} = [h_1 \dots h_L]^T$ και $\mathbf{z}[m] = [z_1[m] \dots z_L[m]]^T$.

- Το προσαρμοσμένο φίλτρο για το παραπάνω μοντέλο είναι $\mathbf{w} = \mathbf{h}^*$.

Μετάδοση SIMO (3)

- Συνεπώς, η ποσότητα $\tilde{y}[m] \triangleq \mathbf{h}^* \mathbf{y}[m]$ αποτελεί επαρκή στατιστική για την εκτίμηση του $x[m]$.
- $\tilde{y}[m] = \sum_{l=1}^L h_l^* y_l[m] = \sum_{l=1}^L |h_l|^2 x[m] + \sum_{l=1}^L h_l^* z_l[m]$.
- Ο δέκτης αυτός, ο οποίος είναι βέλτιστος για σήματα SIMO, ονομάζεται Maximal Ratio Combining (MRC).
- Παρατηρήστε ότι για την ανίχνευση λαμβάνονται υπόψη τα σήματα από όλες τις κεραίες, αλλά στο καθένα δίνεται βάρος ανάλογα με την ποιότητα του καναλιού του.
- Αποδεικνύεται ότι ο SNR στην έξοδο του MRC ισούται με $\sum_{l=1}^L |h_l|^2 P/N_0 = \|\mathbf{h}\|^2 P/N_0$, δηλαδή με το άθροισμα των SNR σε κάθε κεραία.
- Επομένως, ο MRC επιτυγχάνει κέρδος ισχύος (power gain) $\|\mathbf{h}\|^2 / |h_1|^2 > 1$ σε σχέση με την περίπτωση που χρησιμοποιούμε 1 κεραία.

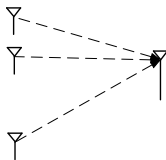
Μετάδοση SIMO σε κανάλια με διαλείψεις

- Υποθέτουμε επίπεδη διάλειαση Rayleigh σε κάθε κεραία και ότι τα $h_l[m]$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (τώρα τα $h_l[m]$ μεταβάλλονται στο χρόνο).
- Είδαμε ότι, για μία κεραία και διαμόρφωση BPSK, $P_e = \mathbb{E}_h[P_{e|h}] = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\text{SNR}}{2+\text{SNR}}} \right) \approx \frac{1}{2\text{SNR}}$.
- Η $\|\mathbf{h}\|^2$ στην έξοδο του MRC ακολουθεί κατανομή χ^2 με $2L$ βαθμούς ελευθερίας.
- Αποδεικνύεται ότι, στην έξοδο του MRC, για BPSK,
$$P_e = \mathbb{E}_{\|\mathbf{h}\|^2}[P_{e|\|\mathbf{h}\|^2}] \approx \binom{2L-1}{L} \frac{1}{(2\text{SNR})^L}.$$
- Επομένως, όταν έχουμε διαλείψεις, έχουμε όχι μόνο κέρδος ισχύος, αλλά και κέρδος λόγω διαφορισμού (diversity gain): Η P_e είναι ανάλογη του $1/\text{SNR}^L$ αντί για $1/\text{SNR}$.

Μετάδοση SIMO σε κανάλια με διαλείψεις (2)

- Υπενθυμίζεται ότι τα παραπάνω ισχύουν μόνο όταν τα κανάλια $h_l[m]$ είναι ανεξάρτητα Rayleigh.
- Το κέρδος λόγω διαφορισμού προέρχεται από το γεγονός ότι, καθώς αυξάνει ο αριθμός μονοπατιών, L , μειώνεται η πιθανότητα το μέτρο $\|\mathbf{h}\|$ να είναι μικρό.
- Τα ίδια αποτελέσματα προκύπτουν και στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούμε το κανάλι σε διαφορετικές χρονικές στιγμές (ή συχνότητες). Απλώς, στην περίπτωση συστημάτων SIMO δεν απαιτούνται περισσότερες χρονικές ή συχνотικές “θυρίδες”.
- Φυσικά, στην πράξη, τα κανάλια δεν είναι πάντοτε Rayleigh, ούτε ανεξάρτητα, ειδικά όταν οι κεραιές δεν απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Επίσης, η χρήση πολλών κεραιών κοστίζει.

Μετάδοση MISO

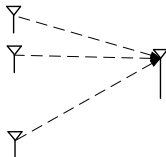


- Θεωρούμε και πάλι σταθερό κανάλι.

$$y[m] = \sum_{l=1}^L h_l^* x_l[m] + z[m] = \mathbf{h}^* \mathbf{x}[m] + z[m],$$

όπου $\mathbf{h} = [h_1 \dots h_L]^T$, $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_L]^T$ και $z[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$.

Μετάδοση MISO (2)



- Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, το διάνυσμα $\mathbf{x}[m]$ μοναδιαίας ενέργειας που μεγιστοποιεί το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{h}^* \mathbf{x}[m]$ είναι το $\mathbf{x}[m] = \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} x[m]$.
- Επομένως, $y[m] = \|\mathbf{h}\| x[m] + z[m]$.
- Επομένως, εάν ο πομπός γνωρίζει τα h_i^* , πρέπει να μεταδώσει με φάση αντίθετη με αυτή που εισάγει το κανάλι και να στείλει από κάθε κεραία με ισχύ ανάλογη του $|h_i^*|^2$.

Μετάδοση MISO (3)

- Η μέθοδος αυτή (στην ουσία η δυϊκή του MRC) ονομάζεται transmit beamforming ή Maximal Ratio Transmission (MRT).
- Στην πράξη, είναι πιο δύσκολο να γνωρίζουμε τα κανάλια στον πομπό απ' ό,τι στο δέκτη.

Μετάδοση MISO σε κανάλια με διαλείψεις.

- Όταν ο πομπός χρησιμοποιεί transmit beamforming,

$$y[m] = \|\mathbf{h}\|x[m] + z[m] \Rightarrow \text{SNR} = \|\mathbf{h}\|^2 \mathcal{E}_x / N_0.$$
- Είδαμε ότι, αν χρησιμοποιούμε MRC στο δέκτη συστήματος SIMO,

$$\tilde{y}[m] = \sum_{l=1}^L |h_l|^2 x[m] + \sum_{l=1}^L h_l^* z_l[m] = \|\mathbf{h}\|^2 x[m] + \mathbf{h}^* \mathbf{z}[m] \Rightarrow$$

$$\text{SNR} = \|\mathbf{h}\|^4 \mathcal{E}_x / \mathbf{h}^* (N_0 \mathbf{I}) \mathbf{h} = \|\mathbf{h}\|^4 \mathcal{E}_x / \|\mathbf{h}\|^2 N_0 = \|\mathbf{h}\|^2 \mathcal{E}_x / N_0.$$
- Επομένως, η επίδοση ενός συστήματος MISO σε κανάλια με διαλείψεις όπου ο πομπός γνωρίζει τα κανάλια και χρησιμοποιεί transmit beamforming είναι η ίδια με την επίδοση ενός συστήματος SIMO που χρησιμοποιεί MRC στο δέκτη.
- Συνεπώς, εάν τα κανάλια υφίστανται ανεξάρτητες διαλείψεις Rayleigh, η χρήση πολλών κεραιών είτε στον πομπό είτε στο δέκτη προσφέρει κέρδος ισχύος και κέρδος διαφορισμού.
- Αποδεικνύεται ότι, εάν δε γνωρίζουμε τα κανάλια στον πομπό (και οι διαλείψεις είναι ανεξάρτητες Rayleigh), μπορούμε να επιτύχουμε κέρδος διαφορισμού, αλλά υπάρχει απώλεια κέρδους ισχύος.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Μετάδοση στο ασύρματο κανάλι
 - Χρήση διαφορισμού για βελτίωση της απόδοσης
 - Μετάδοση SIMO
 - Μετάδοση MIMO

- 2 Διαμόρφωση OFDM
 - Εισαγωγή
 - Η βασική ιδέα
 - Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση
 - OFDM σε κανάλια με ISI

OFDM – Εισαγωγή

- Μέθοδος διαμόρφωσης, αλλά και πολυπλεξίας.
- Μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής.
- Τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιείται και σε κανάλια τα οποία μοιράζονται πολλοί χρήστες (OFDM (802.11a/g/n, DVB-T, ADSL/VDSL) ή OFDMA (802.16)).

OFDM – Σύντομο Ιστορικό

- Η ιδέα υπήρχε από τα τέλη της δεκαετίας του 1950.
- Πρώτη ευρεσιτεχνία OFDM: 1970. Πρόταση για χρήση DFT: 1971 και 1981.
- Περιορισμένη χρήση έως τις αρχές της δεκαετίας του 1990 λόγω δυσκολιών στην υλοποίηση, ιδιαίτερα λόγω αδυναμίας γρήγορης υλοποίησης του DFT με ψηφιακά κυκλώματα.
- Χρήση OFDM στο πρωτόκολλο ADSL T1.413 (DMT) και ETSI DAB (1995), καθώς και DVB-T (1997).

OFDM – Σήμερα

- Χρήση σε ADSL, VDSL2, DVB-T, DVB-H, IEEE 802.11a/g/n (WiFi), IEEE 802.16a/d/e/m (WiMAX), 3GPP-LTE downlink (συστήματα GSM γενιάς 3.75 και 4).
- Πιθανότητα στο εγγύς μέλλον τα περισσότερα εμπορικά συστήματα θα χρησιμοποιούν OFDM/OFDMA.

OFDM – Πλεονεκτήματα

- Σχετικά απλή αντιμετώπιση της διασυμβολικής παρεμβολής που οφείλεται στην πολυδιαδρομική διάδοση (multipath) και στις διαλείψεις (fading).
- Εάν το κανάλι δε μεταβάλλεται (ή μεταβάλλεται αργά), ο ρυθμός μετάδοσης μπορεί να αυξηθεί με προσαρμογή της μεταδιδόμενης ισχύος στον πομπό (transmitter power adaptation) → καλύτερη προσέγγιση της χωρητικότητας καναλιού.
- Σε ασύρματα συστήματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσαρμοστική κωδικοποίηση πιο εύκολα σε σχέση με "παραδοσιακά" συστήματα.
- Μπορεί να αντιμετωπίσει καλά παρεμβολή μικρού εύρους ζώνης (narrowband interference).
- Το OFDM επιτρέπει τη δημιουργία δικτύων μιας συχνότητας (single-frequency networks) είτε με χρήση πρωτοκόλλων τύπου διεκδίκησης (contention-based) ή με χρήση OFDMA.

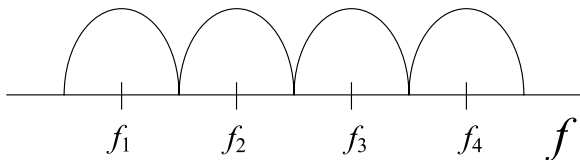
OFDM – Μειονεκτήματα

- Μεγαλύτερη ευαισθησία στην απόκλιση συχνότητας φέρουσας (Carrier Frequency Offset)
- Σχετικά μεγάλος λόγος Μέγιστης προς Μέσης ισχύος (Peak-to-Average Ratio – PAR).
- “Μπλοκ” λειτουργία λόγω DFT (καθυστέρηση, απαίτηση σε μνήμη).
- Πολυπλοκότητα DFT. Γενικά, δεν αποτελεί, πλέον, μεγάλο πρόβλημα.

OFDM – Η βασική ιδέα

- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης αυξηθεί μειώνοντας την απόσταση μεταξύ των κυματομορφών που μεταδίδουμε (ελαττώνοντας, δηλαδή, την περίοδο T_s μεταξύ διαδοχικών συμβόλων) η διασυμβολική παρεμβολή αυξάνει (στη γενική περίπτωση).
- Η ιδέα: Εάν χωρίσουμε το διαθέσιμο φάσμα σε περιοχές (γύρω από υποφέρουσες – subcarriers) και μεταδώσουμε γύρω από κάθε υποφέρουσα με μεγαλύτερη περίοδο, T'_s , η διασυμβολική παρεμβολή θα είναι μικρότερη (γιατί η μετάδοση σε κάθε περιοχή γίνεται πιο αργά) και, επομένως, η ισοστάθμιση θα είναι πιο απλή.
- Απαιτείται πολυπλεξία στη συχνότητα (Frequency Division Multiplexing – FDM).

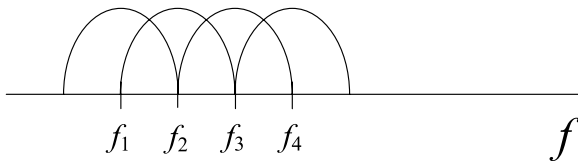
OFDM – Η βασική ιδέα (2)



- Για την υλοποίηση χρειάζονται φίλτρα και αποστάσεις “ασφαλείας” στο φάσμα (ζώνες φύλαξης – guard bands). Η υλοποίηση είναι πολύπλοκη και οδηγεί σε απώλεια μέρους του διαθέσιμου φάσματος.

OFDM – Η βασική ιδέα (3)

- Εάν υπάρχει τρόπος η απόσταση των υποφερουσών να ελαττωθεί, τότε μπορούμε να μεταδώσουμε με μεγαλύτερο ρυθμό για δεδομένο εύρος ζώνης (καλύτερη εκμετάλλευση του φάσματος – spectral efficiency).



- Οι φασματικές περιοχές (κανάλια) επικαλύπτονται. Υπάρχει τρόπος η διακαναλική παρεμβολή να είναι μηδενική;
- Θα δούμε ότι αυτό είναι δυνατό με χρήση ορθογώνιων συναρτήσεων → Orthogonal FDM (OFDM).

OFDM – Η βασική ιδέα (4)

- Για ένα Γραμμικό, Χρονικώς Αμετάβλητο (LTI) σύστημα, γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής $e^{j2\pi f_k t}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος.
 - Εάν η είσοδος σε ένα σύστημα $h(t)$ είναι $x(t) = e^{j2\pi f_k t}$, η έξοδος ισούται με $y(t) = H(f_k)e^{j2\pi f_k t}$, όπου $H(f)$ είναι η απόκριση συχνότητας του συστήματος.
 - $H(f_k)$: Η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση $e^{j2\pi f_k t}$.
- Επομένως, μπορούμε να μεταδώσουμε N σύμβολα ταυτόχρονα ως εξής: $x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n e^{j2\pi f_n t}$. Στο δέκτη (και δεδομένου ότι το σύστημα είναι γραμμικό) $y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n H(f_n) e^{j2\pi f_n t}$.

OFDM – Η βασική ιδέα (5)

- Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε έναν ισοσταθμιστή σε κάθε συχνότητα f_n . Ο ισοσταθμιστής είναι πολύ απλός: Πολλαπλασιασμός με $H^*(f_n)/|H(f_n)|^2$ (one-tap equalizer).
- Πώς γίνεται αυτό στην πράξη; Θα το δούμε στη συνέχεια.
- Επίσης, οι ιδιοσυναρτήσεις $e^{j2\pi f_n t}$ έχουν άπειρη διάρκεια, επομένως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες στην πράξη. Πρέπει να χρησιμοποιηθούν ορθογώνιες συναρτήσεις πεπερασμένης διάρκειας \rightarrow OFDM.

Σήμα OFDM στο χρόνο

$$s(t) = \Re \left\{ \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp \left(j2\pi \left(f_c - \frac{i+0.5}{T} \right) (t - t_s) \right) \right\}, \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

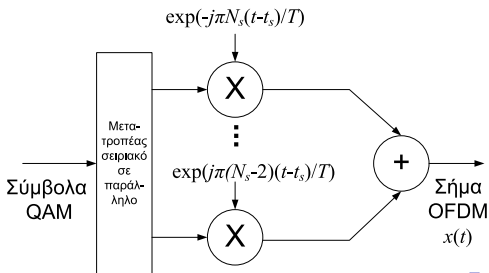
- N : αριθμός υποφερουσών. T : διάρκεια συμβόλου OFDM. f_c : συχνότητα φέρουσας. d_i : Σύμβολα στις υποφέρουσες (μιγαδικά στη γενική περίπτωση – συνήθως ανήκουν σε αστερισμό QAM).
- Το σύμβολο OFDM είναι ένα άθροισμα N (μιγαδικών) συναρτήσεων της μορφής $\phi_i(t) = \exp \left(j2\pi \left(f_c - \frac{i+0.5}{T} \right) (t - t_s) \right)$ για $t_s \leq t \leq t_s + T$. Αποδεικνύεται ότι οι $\phi_i(t)$ (μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση) αποτελούν συναρτήσεις βάσης (θα το δείξουμε σύντομα).
- Παρατηρούμε ότι, αντί να μεταδίδουμε 1 σύμβολο ανά T_s με χρήση όλου του διαθέσιμου φάσματος, δημιουργούμε μια ομάδα N συμβόλων τα οποία μεταδίδονται ταυτόχρονα και ανά T sec. Το κάθε σύμβολο καταλαμβάνει ένα από N κομμάτια του διαθέσιμου φάσματος.

Σήμα OFDM στο χρόνο – Βαθυπερατό ισοδύναμο

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}(t-t_s)\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

Η συχνότητα κάθε υποφέρουσας είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{1}{T}$.
Επομένως, κάθε υποφέρουσα έχει ακέραιο αριθμό περιόδων στο διάστημα T
(διάρκεια του συμβόλου OFDM).



Αποδιαμόρφωση υποφέρουσας

- Αγνοούμε, προς το παρόν, το θόρυβο, και υποθέτουμε κανάλι AWGN.
- Για να ανακτήσουμε το σύμβολο $d_{k+\frac{N}{2}}$ πολλαπλασιάζουμε με τη $\phi_k^*(t) = \exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}(t-t_s)\right)$ και ολοκληρώνουμε.

$$\int_{t_s}^{t_s+T} \exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}(t-t_s)\right) \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t-t_s)\right) dt =$$

$$\sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \int_{t_s}^{t_s+T} \exp\left(j2\pi\frac{i-k}{T}(t-t_s)\right) dt = Td_{k+\frac{N}{2}}.$$

- Επομένως, οι $\frac{1}{\sqrt{T}}\phi_i(t)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση.
- Ωστόσο, ακόμα δεν έχουμε εξετάσει πώς επηρεάζεται η ορθογωνιότητα των $\phi_i(t)$ στην περίπτωση καναλιού με διασυμβολική παρεμβολή.

Σήμα OFDM στη συχνότητα

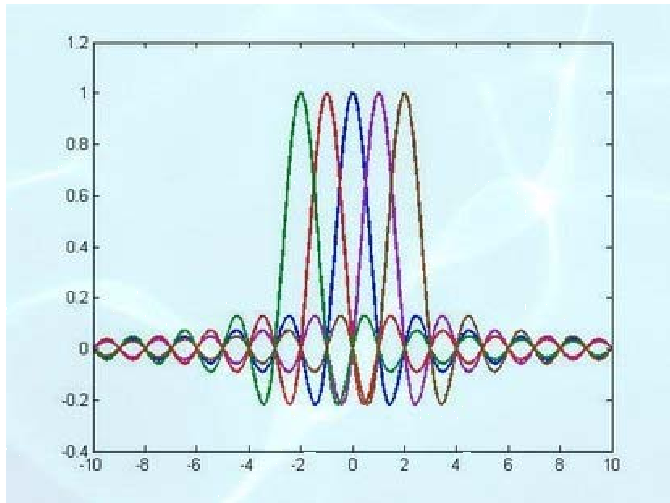
$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}(t - t_s)\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

- Το σύμβολο OFDM είναι ένα άθροισμα μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων οι οποίες έχουν περιοριστεί στο διάστημα $[t_s, t_s + T]$.
- Επομένως, στη συχνότητα, είναι ένα άθροισμα συναρτήσεων sinc με κέντρο τις συχνότητες υποφέρουσας $\frac{i}{T}$.

$$S(f) = \sqrt{T} \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(-j2\pi t_s \frac{i}{T}\right) \text{sinc}\left(\left(f - \frac{i}{T}\right) T\right)$$

Σήμα OFDM στη συχνότητα (2)



Σήμα OFDM στη συχνότητα (3)

- Κατά την αποδιαμόρφωση, υπολογίζεται η τιμή του σήματος στις συχνότητες $\frac{i}{T}$. Επειδή τα σήματα όλων των άλλων υποφερουσών είναι μηδενικά, μπορεί να ανακτηθεί το σήμα της υποφέρουσας i . Το μόνο άγνωστο σήμα είναι ο θόρυβος.
- Επομένως, σε κανάλια AWGN δεν εμφανίζεται διακαναλική παρεμβολή (Inter-Channel Interference – ICI), αρκεί ο δέκτης να γνωρίζει επακριβώς τις συχνότητες $\frac{i}{T}$ (το οποίο εξαρτάται από το πόσο καλά γνωρίζει τη συχνότητα φέρουσας, f_c).
- Παρατηρήστε ότι ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist, αλλά στη συχνότητα. Δηλαδή, η διακαναλική (και όχι η διασυμβολική) παρεμβολή ισούται με 0.

Σήμα OFDM – Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}(t - t_s)\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T$$

- Το σήμα $s(t)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier των N συμβόλων d_i , περιορισμένος στο χρονικό διάστημα $[t_s, t_s + T]$.
- Εάν το διάστημα $[t_s, t_s + T]$ χωριστεί σε N δείγματα,

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}(t - t_s)\right) \Rightarrow s[n] = s\left(t_s + n\frac{T}{N}\right) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}\left(n\frac{T}{N}\right)\right) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{in}{N}\right).$$

Σήμα OFDM – Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (2)

- Εάν το εύρος ζώνης που χρησιμοποιεί το σύστημα δεν υπερβαίνει το $\frac{N}{T}$, τα δείγματα αρκούν για την αναπαράσταση του συνεχούς σήματος $s(t)$ και το σύμβολο OFDM μπορεί να δημιουργηθεί με χρήση του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Inverse Discrete Fourier Transform -- IDFT):

$$s[n] = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \exp\left(j2\pi \frac{in}{N}\right).$$

- Ο IDFT (και ο DFT) μπορούν να υλοποιηθούν με χρήση του αλγορίθμου Fast Fourier Transform -- FFT, ο οποίος απαιτεί $N \log_2 N$ πολλαπλασιασμούς (αντί για N^2 της προφανούς υλοποίησης με χρήση του ορισμού).

OFDM σε κανάλια με ISI

- Έστω, τώρα, ότι το κανάλι είναι γραμμικό και χρονικώς αμετάβλητο (LTI) με κρουστική απόκριση $h(t)$.
- Στη γενική περίπτωση, οι αποκρίσεις παλμού $p_i(t) = \phi_i(t) * h(t)$ δεν είναι, πλέον, ορθογώνιες. Παρόλο που σε κάθε υποφέρουσα μεταδίδουμε πιο αργά, υπάρχει διασυμβολική παρεμβολή λόγω της πεπερασμένης διάρκειας του συμβόλου OFDM.
- Μια λύση: Υπολογισμός νέων συναρτήσεων $\phi_i(t)$ ώστε η $q(t) = p(t) * p^*(-t)$ να ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist.
 - Πολύπλοκο στη γενική περίπτωση.
 - Απαιτείται γνώση του καναλιού στον πομπό.
 - Απαιτείται επανυπολογισμός των $\phi_i(t)$ κάθε φορά που το κανάλι αλλάζει, και κατάλληλη αρχιτεκτονική συστήματος για την προσαρμογή στις νέες $\phi_i(t)$.
- Η λύση που εφαρμόζεται στο OFDM: Χρήση Κυκλικού Προθέματος (Cyclic Prefix – CP).

Κυκλικό Πρόθεμα – Cyclic Prefix

- Έστω ότι η κρουστική απόκριση του καναλιού έχει μήκος L sec (ή ότι η εξάπλωση καθυστέρησης (delay spread) ισούται με L στα κανάλια με διαλείψεις).
- Το σύμβολο επεκτείνεται από T σε $T + T_{CP}$ sec ως εξής: Τα τελευταία T_{CP} sec του αρχικού συμβόλου αντιγράφονται στην αρχή του αρχικού συμβόλου. Δηλαδή, προστίθεται ένα *κυκλικό πρόθεμα*.

$$s(t) = \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \exp\left(j2\pi \frac{i}{T}(t - t_s - T_{CP})\right), \quad t_s \leq t \leq t_s + T + T_{CP}$$

$$s(t) = 0, \quad t < t_s \text{ και } t > t_s + T + T_{CP}$$

- Όπως θα δείξουμε, η χρήση κυκλικού προθέματος εξασφαλίζει την ορθογωνιότητα των υποφερουσών (αρκεί $T_{CP} \geq L$).
- Το τίμημα: Απαιτείται $\frac{T_{CP}}{T}$ περισσότερη ενέργεια για τη μετάδοση. Επίσης, ο ρυθμός μετάδοσης μειώνεται κατά $\frac{T}{T+T_{CP}}$.

Αποδιαμόρφωση σήματος OFDM με κυκλικό πρόθεμα

- Έστω ότι η κρουστική απόκριση του καναλιού έχει τη μορφή $h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t + \tau)$, $\tau < T_{CP}$.
- Στον αποδιαμορφωτή,

$$\int_{t_s+T_{CP}}^{t_s+T+T_{CP}} \exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}(t-t_s-T_{CP})\right) \times$$

$$\sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \left\{ \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t-t_s-T_{CP})\right) + \alpha \exp\left(j2\pi\frac{i}{T}(t-t_s-T_{CP}-\tau)\right) \right\} dt =$$

$$Td_{k+\frac{N}{2}} + \alpha \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} d_{i+\frac{N}{2}} \int_{t_s+T_{CP}}^{t_s+T+T_{CP}} \exp\left(j2\pi\frac{i-k}{T}(t-t_s-T_{CP}) - j2\pi\frac{k\tau}{T}\right) dt$$

Αποδιαμόρφωση σήματος OFDM με κυκλικό πρόθεμα (2)

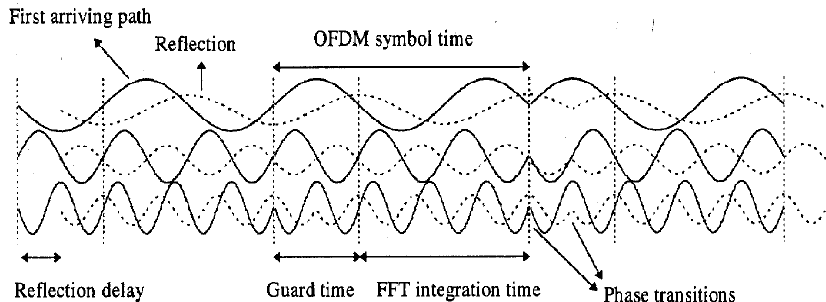
- Επομένως, στην έξοδο του αποδιαμορφωτή,

$$Td_{k+\frac{N}{2}} + \alpha Td_{k+\frac{N}{2}} \exp(-j2\pi \frac{k\tau}{T}) = Td_{k+\frac{N}{2}} (1 + \alpha \exp(-j2\pi \frac{k\tau}{T})).$$
- Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για $h(t) = \sum \alpha_i \delta(t - \tau_i)$. Η έξοδος $y(t)$ σε κάθε υποφέρουσα k ισούται με $y(t) = Td_{k+\frac{N}{2}} H(\frac{k}{T})$.
- Παρόλο που το κανάλι έχει διασυμβολική παρεμβολή, η έξοδος του αποδιαμορφωτή της υποφέρουσας k εξαρτάται μόνο από το σήμα που μεταδόθηκε στην υποφέρουσα k , καθώς και από την απόκριση συχνότητας του καναλιού στη συχνότητα $\frac{k}{T}$. Επίσης, επειδή η ολοκλήρωση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_s + T_{CP} \geq t_s + L$ και τελειώνει πριν την αρχή του επόμενου συμβόλου OFDM, τα d_i που μεταδίδονται από τα προηγούμενα και τα επόμενα σύμβολα OFDM δεν παρεμβάλλονται στο αποδιαμορφωθέν σήμα.

Αποδιαμόρφωση σήματος OFDM με κυκλικό πρόθεμα (3)

- Συνεπώς, η χρήση κυκλικού προθέματος κατάλληλου μήκους οδηγεί στην εξάλειψη του ISI και του ICI. Όλα αυτά, όμως, υπό την προϋπόθεση ότι $T_{CP} \geq L = \tau_{\max} - \tau_{\min}$.
- Προκειμένου να ανακτήσουμε τα $d_{k+\frac{N}{2}}$ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με $H^*(k/T)/|H(k/T)|^2$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή (one-tap frequency equalization - FEQ)

Αποδιαμόρφωση σήματος OFDM με κυκλικό πρόθεμα (4)



(Σχήμα από Van Nee & Prasad)

Ανακεφαλαίωση – Συμπεράσματα – Παρατηρήσεις

- Στέλνουμε N σήματα σε χρόνο $T + T_{CP}$ ($T = 1/f_0$ είναι το εύρος ζώνης κάθε υποφέρουσας).
- Το συνολικό φάσμα που χρησιμοποιείται είναι της τάξης $N/T = Nf_0$.
- Το κυκλικό πρόθεμα κοστίζει σε χρόνο (χρησιμοποιούμε $T + T_{CP}$ αντί για T) και σε ενέργεια (χρησιμοποιούμε $(T + T_{CP})\bar{P}$ αντί για $T\bar{P}$ για N σύμβολα).
- Σύγκριση με μονοκαναλικά συστήματα ("single carrier" – SC) σε κανάλι AWGN ($T_{CP} = 0$).
 - SC: 1 σύμβολο διάρκειας $\sim T/N$. Χρήση εύρους ζώνης $\sim N/T$ για κάθε σύμβολο (όλο το διαθέσιμο φάσμα).
 - OFDM: N σύμβολα διάρκειας T (χρήση όλου του διαθέσιμου χρόνου). Χρήση εύρους ζώνης της τάξης T/N .
 - Εάν θεωρήσουμε μια ομάδα N συμβόλων, το συνολικό φάσμα που χρησιμοποιούμε και στις δύο περιπτώσεις είναι N/T . Επίσης, ο συνολικός χρόνος που χρησιμοποιούμε είναι T .