

EE725

Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών 6η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

15 Απριλίου 2010

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

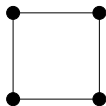
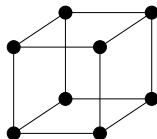
- Cioffi: 1.5–1.7.
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 5.1–5.3 (όχι τα περί ISI), 5.5, 6.1–6.3 (όχι τα περί ISI)
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 7.2, 7.3.1, 7.3.3, 7.4, 7.6,

Κατηγορίες Αστερισμών

- 1 Κατηγορίες Αστερισμών
 - Κυβικοί Αστερισμοί
 - Ορθογώνιοι Αστερισμοί
 - Κυκλικοί Αστερισμοί
- PAM και QAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού – PAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης – QAM
- Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

Κυβικοί Αστερισμοί (Cubic Constellations)

- Αριθμός διαστάσεων $N =$ αριθμός bits b .
- Αντιστοιχία μίας συνάρτησης βάσης ϕ_m σε κάθε bit.
- Γραμμική διαμόρφωση.
- Χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά κανάλια.


 $N=1$

 $N=2$

 $N=3$

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (1) - Binary Antipodal

Binary Antipodal: 2 σήματα ($N = 1$), $x_0(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x}\phi(t) = -x_1(t)$.

- Binary Phase Shift Keying (BPSK):

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, \quad t \in [0, T], \text{ 0 αλλού.}$$

- Bipolar (NRZ): $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- Κωδικοποίηση Manchester (Bi-phase level):

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -\frac{1}{\sqrt{T}}, & t \in [\frac{T}{2}, T] \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

- Τι εύρος ζώνης απαιτεί κάθε μία από τις παραπάνω $\phi(t)$:

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (2) - On-Off Keying

On-Off Keying (OOK): 2 σήματα ($N = 1$),

$$x_0(t) = \sqrt{2\mathcal{E}_x}\phi(t). \quad x_1(t) = 0.$$

- $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $t \in [0, T]$, 0 αλλού.
- Υποδεέστερη κατά 3 dB σε σχέση με αστερισμούς binary antipodal (γιατί;)
- Χρησιμοποιείται σε οπτικά συστήματα, αν και στο μέλλον αυτό αναμένεται να αλλάξει.

Κυβικοί Αστερισμοί – Παραδείγματα (3) – QPSK

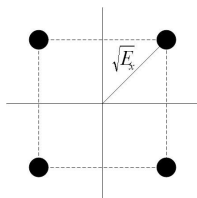
- Quadrature Phase Shift Keying (QPSK): 4 σήματα (2 bits $\rightarrow N = 2$).

- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi t}{T}, t \in [0, T], 0$ αλλού.

- $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi t}{T}, t \in [0, T], 0$ αλλού.

- $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2] = \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [-1 \ +1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ -1] \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_x}{2}} [+1 \ +1] \end{cases}$

- Ίδιο εύρος ζώνης με τη BPSK. $d_{\min, \text{BPSK}}^2 = 2d_{\min, \text{QPSK}}^2$. Ωστόσο, εάν η ενέργεια ανά διάσταση της QPSK ισούται με την ενέργεια της BPSK η \bar{P}_e της QPSK ισούται με την P_e της BPSK.

QPSK: Υπολογισμός P_e 

- Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.

- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = \sum_{i=0}^3 P_{c|i} p_{\mathbf{x}_i} = P_{c|i}$

$$\stackrel{\text{γιατί;}}{=} (1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]) (1 - Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]) = 1 - 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] + \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2.$$

- Πιθανότητα σφάλματος: $P_e = 1 - P_c = 2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] - \left(Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right]\right)^2 <$

$$2Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] \text{ (NNUB)} \Rightarrow \bar{P}_e \approx Q\left[\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{\sqrt{2E_s}}{2\sigma}\right] = Q\left[\frac{2\sqrt{E_s}}{2\sigma}\right] =$$

$$Q\left[\frac{d_{\min, \text{BPSK}}}{2\sigma}\right].$$

Ορθογώνιοι Αστερισμοί (Orthogonal Constellations)

- Για τους κυβικούς αστερισμούς είδαμε ότι $N = b$.
- Στους ορθογώνιους αστερισμούς, ο αριθμός σημάτων, M , είναι ανάλογος της διάστασης. Επομένως, $M = \alpha N \Rightarrow b = \log_2 M = \log_2 \alpha N \Rightarrow \bar{b} = \frac{b}{N} = \frac{\log_2 \alpha N}{N}$.
- Ο αριθμός των bits ανά διάσταση ελαττώνεται όσο αυξάνει το N !

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών

- Block orthogonal: $M = N \Rightarrow$ Μία συνάρτηση βάσης για κάθε σήμα (μήνυμα).
 - $\mathbf{x}_i = [0 \dots 0 \sqrt{\mathcal{E}_x} 0 \dots 0]$. $x_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_x} \phi_i(t)$.
 - Frequency Shift Keying (FSK):

$$\phi_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{m\pi t}{T}, t \in [0, T], 0 \text{ αλλού.}$$
 - Ποιά είναι η d_{\min} των block orthogonal;
 - P_e του αστερισμού block orthogonal (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1):

$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - \mathcal{Q}(u/\sigma)]^{N-1} du.$$
 - Η $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ του αστερισμού block orthogonal είναι μη μηδενική (και ίση με $(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$).
- Αστερισμός simplex: Block orthogonal μετατοπισμένος κατά $-(\sqrt{\mathcal{E}_x}/M)[1 \ 1 \ \dots \ 1]$ ώστε η $\mathbb{E}[\mathbf{x}]$ να ισούται με 0 (και να ελαχιστοποιηθεί, έτσι, η μέση ενέργεια).

Τα σήματα δεν είναι, πλέον, ορθογώνια μεταξύ τους.

Παραδείγματα ορθογώνιων αστερισμών (2)

- Biorthogonal αστερισμοί: Προκύπτουν από τους ορθογώνιους αστερισμούς με προσθήκη του αντίθετου σήματος $-\mathbf{x}$ για κάθε σήμα \mathbf{x} .

$$P_{e, \text{biorthogonal}} = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - \sqrt{\mathcal{E}_x})^2} [1 - 2Q(u/\sigma)]^{N-1} du.$$

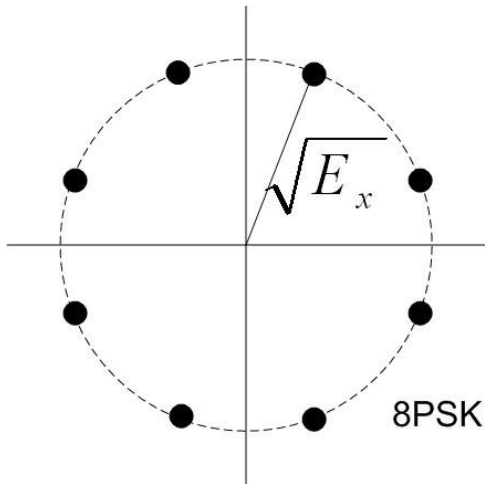
- Pulse Position Modulation (PPM): Παλμοί σε διαφορετική θέση στο χρόνο.
- Pulse Duration Modulation (PDM): Παλμοί διαφορετικής διάρκειας. Τα σήματα δεν είναι ορθογώνια. Χρήση σε οπτική αποθήκευση δεδομένων (π.χ. CD).

Κυκλικό Αστερισμό (Circular Constellations) – MPSK

- Τα σήματα του αστερισμού τοποθετούνται επάνω σε κύκλο ακτίνας $\sqrt{\mathcal{E}_x}$, και σε ίσες μεταξύ τους αποστάσεις. $N = 2$.
- Μόνο η φάση των σημάτων διαφέρει \Rightarrow MPSK κατάλληλη για διαμόρφωση σε κανάλια με μη γραμμική παραμόρφωση πλάτους (π.χ. κανάλια διαλείψεων (fading)).
- NNUB:

$$P_e < 2Q \left[\frac{\sqrt{\mathcal{E}_x} \sin \frac{\pi}{M}}{\sigma} \right].$$

Παράδειγμα: 8-PSK

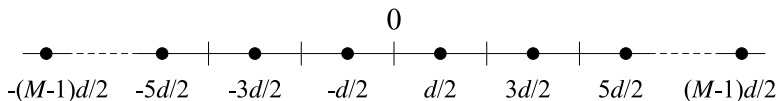


PAM και QAM

- Κατηγορίες Αστερισμών
 - Κυβικοί Αστερισμοί
 - Ορθογώνιοι Αστερισμοί
 - Κυκλικοί Αστερισμοί
- 2 PAM και QAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού – PAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης – QAM
- Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

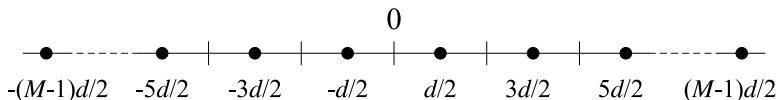
Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού

Pulse Amplitude Modulation – PAM



- $N = 1$ διάσταση. M σύμβολα $\Rightarrow \log_2 M$ bits /μετάδοση.
- Θεωρητικά $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$. Στην πράξη, συνήθως raised cosine (περισσότερα σε επόμενη διάλεξη).
- $d_{\min} = d$.

Pulse Amplitude Modulation – PAM (2)



- Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1): $\mathcal{E}_x = \bar{\mathcal{E}}_x = \frac{d^2}{12} [M^2 - 1] \Rightarrow$

$$d = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{M^2 - 1}} \Rightarrow M = \sqrt{\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1}$$

$$\Rightarrow b = \log_2 M = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{12\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right)$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 4\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{4}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται 4πλάσια ενέργεια (~ 6 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit.
- Το ίδιο μας λέει και ο Shannon όταν στέλνουμε με κώδικα που επιτυγχάνει τη χωρητικότητα καναλιού:

$$C = \frac{1}{2} \log_2(1 + \text{SNR}) \Rightarrow \text{SNR} = 2^{2C} - 1.$$

- Επομένως, για μεγάλα SNR, για να αυξήσουμε τη χωρητικότητα κατά 1 bit πρέπει να τετραπλασιάσουμε το SNR.

Pulse Amplitude Modulation – PAM (4)

Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:

- Για τα $M - 2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
- Για τα 2 εξωτερικά σημεία: $P_{c|i} = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$.
- Επομένως, $P_c = \frac{M-2}{M} \left(1 - 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) + \frac{2}{M} \left(1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \Rightarrow P_e = \bar{P}_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) < 2Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \rightarrow \infty$.
- Με χρήση σχέσεων προηγούμενης διαφάνειας,

P_e της PAM

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1}} \text{SNR}\right)$$

Pulse Amplitude Modulation – PAM (5)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR για σταθερή $P_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση PAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB σε σχέση με τη βέλτιστη κωδικοποίηση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

b	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $P_e = 10^{-6}$ (dB)	SNR (dB)	αύξηση του SNR (dB)	$2^{2b} - 1$ (dB)
1	2	13.53	13.53	–	4.77
2	4	13.69	20.68	7.15	11.76
3	8	13.75	26.97	6.29	17.99
4	16	13.77	33.06	6.09	24.07
5	32	13.78	39.10	6.04	30.10
6	64	13.79	45.14	6.04	36.12

Η προσέγγιση Gar

- Είδαμε ότι $P_e = 2 \left(1 - \frac{1}{M}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}} \text{SNR} \right)$.
- Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{MP_e}{2(M-1)} &= Q \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}} \text{SNR} \right) \Rightarrow \\ \left[Q^{-1} \left(\frac{MP_e}{2(M-1)} \right) \right]^2 &= \frac{3}{M^2-1} \text{SNR} \Rightarrow \\ M^2 = (2^b)^2 &= 1 + \frac{3\text{SNR}}{\left[Q^{-1} \left(\frac{MP_e}{2(M-1)} \right) \right]^2} \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{\Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M)} \right), \end{aligned}$$

όπου $\Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M) = \frac{3}{\left[Q^{-1} \left(\frac{MP_e}{2(M-1)} \right) \right]^2}$ είναι το Gar.

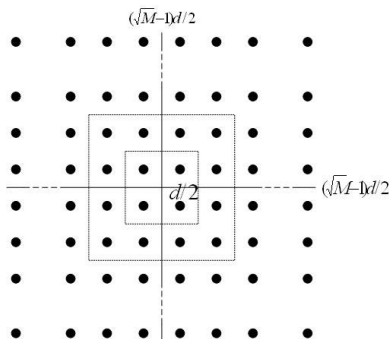
Η προσέγγιση Gar (2)

$$b_{\text{PAM}} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\text{SNR}}{\Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M)} \right), \quad \Gamma_{\text{PAM}}(P_e, M) = \frac{3}{\left[\mathcal{Q}^{-1} \left(\frac{MP_e}{2(M-1)} \right) \right]^2}$$

- Η προσέγγιση Gar προτάθηκε από τον D. Forney.
- Το Gar ισούται με το “πρόστιμο” που πρέπει να καταβάλουμε σε ενέργεια επειδή χρησιμοποιούμε υποβέλτιστο τρόπο μετάδοσης στο κανάλι AWGN.
- Η προσέγγιση είναι ακριβής για $b \geq 1$ και, επομένως, για PAM και QAM.
- Παρατηρήστε ότι εξαρτάται από την P_e και, επίσης, ότι $\Gamma_{\text{PAM}}(P_e) \rightarrow \frac{3}{[\mathcal{Q}^{-1}(P_e/2)]^2}$ για $M \rightarrow \infty$. Για $P_e = 10^{-6}$, $\Gamma_{\text{PAM}} \rightarrow 9$ dB.
- Η προσέγγιση Gar απλοποιεί το σχεδιασμό και την ανάλυση συστημάτων, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Shannon για τη χωρητικότητα.
- Επεκτείνεται και σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται κωδικοποίηση. Στην περίπτωση αυτή $\Gamma = \Gamma_{\text{PAM}}/\gamma_{\text{code}} < \Gamma_{\text{PAM}}$.

Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM



- Γενίκευση της PAM σε $N = 2$ διαστάσεις.
- Στο σχήμα απεικονίζεται ο αστερισμός Square QAM (SQ-QAM) ο οποίος αντιστοιχεί σε άρτιο αριθμό bits, b .

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (2)

- Ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται (θεωρητικά) οι $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t)$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \sin(2\pi f_c t) \rightarrow$ ζωνοπερατή (bandpass) μετάδοση.

- Μέση ενέργεια αστερισμού SQ-QAM: Με πράξεις (βλ. π.χ. Cioffi

$$\text{Ch. 1), } \mathcal{E}_{M\text{-QAM}} = 2\mathcal{E}_{\sqrt{M}\text{-PAM}} \Rightarrow \mathcal{E}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{6} \Rightarrow$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{M\text{-QAM}} = d^2 \frac{M-1}{12} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{M-1}} \Rightarrow M = \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{12\bar{\mathcal{E}}_x}{d^2} + 1 \right), \text{ ίσο με την PAM}$$

(λογικό – γιατί;)

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (3)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$. Για αρκούντως μεγάλες τιμές του b απαιτείται διπλάσια ενέργεια (~ 3 dB επιπλέον) για τη μετάδοση ενός επιπλέον bit (ανά διδιάστατο σύμβολο).
- Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος:
 - Για τα 4 γωνιακά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - \mathcal{Q}\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
 - Για τα $(\sqrt{M} - 2)^2$ εσωτερικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - 2\mathcal{Q}\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$
 - Για τα $4(\sqrt{M} - 2)$ πλευρικά σημεία: $P_{c|i} = \left(1 - \mathcal{Q}\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right) \left(1 - 2\mathcal{Q}\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)$

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (4)

- Με πράξεις,

P_e της QAM

$$P_e = 2\bar{P}_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 \left(Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)\right)^2$$

$$\bar{P}_e < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \text{SNR}\right)$$

- Το SNR είναι ανά διάσταση ($= \bar{\mathcal{E}}_x / \sigma^2$).
- Η προσέγγιση (NNUB) γίνεται πιο ακριβής καθώς $M \rightarrow \infty$.

Quadrature Amplitude Modulation -- QAM (5)

Στον πίνακα (βλ. επίσης Cioffi Ch. 1) έχει υπολογιστεί ο απαιτούμενος SNR (ανά διάσταση) για σταθερή $\bar{P}_e = 10^{-6}$ και διαφορετικό αριθμό bits/μετάδοση. Επίσης, έχει υπολογιστεί η τιμή του SNR η οποία απαιτείται ώστε η χωρητικότητα του καναλιού AWGN να ισούται με b bits/μετάδοση. Παρατηρούμε ότι η διαμόρφωση QAM για $P_e = 10^{-6}$ έχει απώλειες περίπου 9 dB (το Gap) σε σχέση με τη βέλτιστη διαμόρφωση με την οποία επιτυγχάνεται ρυθμός μετάδοσης ίσος με τη χωρητικότητα του καναλιού.

$b = 2\bar{b}$	M	$\frac{d}{2\sigma}$ για $\bar{P}_e = 10^{-6}$ (dB)	SNR (dB)	αύξηση του SNR <u>ανά bit</u> (dB)	$2^{2\bar{b}} - 1$ (dB)
2	4	13.53	13.53	–	4.77
4	16	13.69	20.68	3.58	11.76
6	64	13.75	26.97	3.15	17.99
8	256	13.77	33.06	3.05	24.07
10	1024	13.78	39.10	3.02	30.10
12	2048	13.79	45.14	3.02	36.12

PAM ή QAM;

- Είδαμε ότι, για δεδομένη ενέργεια ανά διάσταση, η d_{\min} της BPSK ισούται με τη d_{\min} της QPSK. Επομένως, η QPSK απαιτεί διπλάσια συνολική ενέργεια για να μεταδώσει διπλάσια bits από ό,τι η BPSK.
- Τι θα συνέβαινε, όμως, εάν χρησιμοποιούσαμε μία διάσταση (δηλαδή 4-PAM) για να μεταδώσουμε 2 ψηφία;
- Από τις σχέσεις για την PAM (ή χρησιμοποιώντας το G_{ap}) προκύπτει ότι χρειαζόμαστε $\mathcal{E}_{4\text{-PAM}} = \frac{5}{4}d_{\min}^2$.
- Αντίθετα, $\mathcal{E}_{\text{QPSK}} = \frac{1}{2}d_{\min}^2$.
- Συνεπώς, $\mathcal{E}_{4\text{-PAM}}/\mathcal{E}_{\text{QPSK}} = 5/2 \approx 4 \text{ dB!}$

PAM ή QAM; (2)

- Το αποτέλεσμα αυτό, ότι δηλαδή συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε QPSK αντί για 4-PAM για δεδομένη διαθέσιμη συνολική ισχύ στον πομπό, αποτελεί ειδική περίπτωση μιας πολύ σημαντικής ιδιότητας της γεωμετρίας που ονομάζεται sphere packing.
- Σύμφωνα με την ιδιότητα sphere packing, σφαίρες δεδομένης ακτίνας, r , “γεμίζουν” καλύτερα έναν υπόχωρο δεδομένης ακτίνας R όσο η διάσταση, N , του υποχώρου αυξάνει.
- Εδώ ο υπόχωρος περιλαμβάνει όλα τα πιθανά σήματα που λαμβάνονται στον πομπό. Το κέντρο κάθε σφαίρας είναι το σύμβολο που μεταδόθηκε, ενώ η ακτίνα της, r , ισούται με την τιμή του θορύβου που υπερτίθεται στο σήμα. Η ακτίνα, R , του υποχώρου είναι της τάξης $\sqrt{\mathcal{E}_x} + \sigma$ (αλλά, θεωρητικά, άπειρη).

PAM ή QAM; (3)

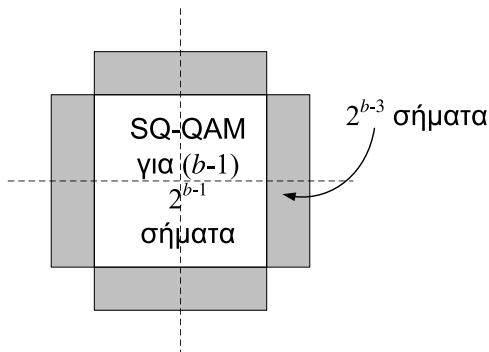
- Επομένως, για δεδομένη διαθέσιμη ισχύ στην είσοδο, ο αριθμός των μηνυμάτων που μπορούμε να μεταδώσουμε σε ένα κανάλι AWGN δεδομένης διασποράς θορύβου αυξάνει καθώς αυξάνει ο αριθμός των διαστάσεων, N .
- Η ιδιότητα αυτή αποτελεί τη βάση της απόδειξης του Θεωρήματος Κωδικοποίησης για το Γκαουσιανό Κανάλι.

PAM ή QAM; (4)

- Επομένως, στις ψηφιακές επικοινωνίες ενδείκνυται να χρησιμοποιούμε όσο περισσότερες διαστάσεις μπορούμε.
 - Εάν έχουμε διαθέσιμες θυρίδες στο χρόνο (TDMA), είναι καλύτερα να μεταδώσουμε μικρούς αστερισμούς σε πολλές θυρίδες, παρά μεγάλους αστερισμούς σε λίγες.
 - Εάν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες από μία περιοχή συχνοτήτων (FDMA), είναι καλύτερα να “σπάσουμε” τα δεδομένα μας σε περισσότερες από μία ροές μικρότερου ρυθμού.
- Διαισθητικά: Για χαμηλά SNR η χωρητικότητα του καναλιού αυξάνει (σχεδόν) γραμμικά, ενώ για μεγάλα SNR η αύξηση είναι λογαριθμική. Επομένως, σε χαμηλά SNR, δεδομένη αύξηση της ισχύος οδηγεί σε μεγαλύτερη αύξηση της χωρητικότητας (αναλογικά).
- Μια άλλη οπτική: Η πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μακριά από τη μέση τιμή του και στις N διαστάσεις (με αποτέλεσμα να βρεθούμε πιο κοντά σε άλλη σφαίρα) είναι μικρότερη από την πιθανότητα ο θόρυβος να είναι μεγάλος σε $n < N$ διαστάσεις (από το νόμο των μεγάλων αριθμών).

Παράδειγμα: Ψηφιακή Δορυφορική Εκπομπή (Cioffi 1.6.3)

- Διαμόρφωση: 4-QAM.
- 20 φέρουσες, μεταξύ 12.2 και 12.7 GHz.
- Ρυθμός μετάδοσης συμβόλου (symbol rate): $\frac{1}{T} = 19.151$ MHz.
- Εύρος ζώνης: 24 MHz. Γιατί δεν είναι ίσο με $\frac{1}{T}$;
- Επομένως, ρυθμός μετάδοσης δεδομένων (data rate): $R = 38.302$ Mbps σε κάθε φέρουσα.
- Για τη μετάδοση video απαιτούνται περίπου 2-3 Mbps \rightarrow έως 16 κανάλια ανά φέρουσα.
- Για τα αναλογικά κανάλια χρησιμοποιείται κανάλι 24 MHz. Επομένως, με την ψηφιακή μετάδοση έχουμε εξοικονόμηση φάσματος. Αυτό οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στη συμπίεση του video.
- Παρατηρήστε ότι ο ρυθμός μετάδοσης δεδομένων εξαρτάται από το εύρος ζώνης, αλλά δεν ισούται με αυτό. Η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που στέλνεται 1 bit/μετάδοση.

Μετάδοση περιπού b : Cross QAM -- CR-QAM

- Για τους αστερισμούς CR-QAM ισχύουν τα παρακάτω:

$$\mathcal{E}_x = \frac{d^2}{6} \left(\frac{31}{32} M - 1 \right), d = \sqrt{\frac{6\mathcal{E}_x}{\frac{31}{32} M - 1}}, \bar{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{32}{31} \frac{6\mathcal{E}_x}{d^2} + 1 \right).$$

Cross QAM (2)

- $\mathcal{E}_x(b+1) = 2\mathcal{E}_x(b) + \frac{d^2}{6}$.
- Πιθανότητα Σφάλματος (προσέγγιση):

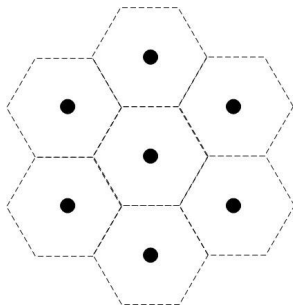
P_e CR-QAM

$$P_e < 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2M}} \right) \mathcal{Q} \left(\frac{d}{2\sigma} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{P}_e \approx 2 \left(1 - \frac{1}{2^{\bar{b}+0.5}} \right) \mathcal{Q} \left(\sqrt{\frac{3\text{SNR}}{\frac{31}{32}M - 1}} \right).$$

- Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να κατασκευαστεί αστερισμός QAM για περιπτώ b , αλλά ο CR-QAM υπερτερεί σε εξοικονόμηση ενέργειας.

Εξαγωνικοί Αστερισμοί



- Επιτυγχάνουν τη βέλτιστη εκμετάλλευση του χώρου στις 2 διαστάσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπερτερούν κατά 0.625 dB σε σχέση με τους αστερισμούς QAM.
- Μειονέκτημα: Μεγαλύτερη πολυπλοκότητα κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.

Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

- Κατηγορίες Αστερισμών
 - Κυβικοί Αστερισμοί
 - Ορθογώνιοι Αστερισμοί
 - Κυκλικοί Αστερισμοί
- PAM και QAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους Παλμού – PAM
 - Διαμόρφωση Πλάτους με Ορθογωνισμό Φάσης – QAM
- 3 Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος

- Σε πολλές περιπτώσεις ο θόρυβος ενδέχεται να μην είναι λευκός, δηλαδή, $R_n(\tau) \neq \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$.
- Στην περίπτωση αυτή ο θόρυβος ονομάζεται έγχρωμος (colored).
- Ο έγχρωμος θόρυβος μπορεί να οφείλεται σε
 - Φίλτρα στο δέκτη τα οποία μεταβάλλουν το φάσμα του λευκού θορύβου
 - Ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές από άλλα συστήματα (RF Ingress)
 - Διαφωνία (crosstalk)
- Η σχεδίαση συστημάτων για Προσθετικό Έγχρωμο Γκαουσιανό Θόρυβο (ACGN) μπορεί να γίνει με λεύκανση του έγχρωμου θορύβου εφόσον γνωρίζουμε την αυτοσυσχέτισή του, $R_n(\tau)$ (ή τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)$).

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter)

- Έστω το διανυσματικό μοντέλο καναλιού N διαστάσεων $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$, όπου \mathbf{n} ACGN με $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = \mathbf{R}_n = \bar{\mathbf{R}}_n \sigma^2$.
- Επομένως, εάν $\mathbf{R}_n \neq \mathbf{I}$, οι συνιστώσες του θορύβου στις διαφορετικές διαστάσεις είναι συσχετισμένες.
- Ο πίνακας $\bar{\mathbf{R}}_n$ είναι $N \times N$ και θετικά ορισμένος (Positive Definite), δηλαδή $\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}}_n \mathbf{z} > 0$ για οποιοδήποτε $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^N$.
- Παραγοντοποίηση Cholesky: Ένας PD πίνακας \mathbf{P} μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{L}\mathbf{L}^*$, όπου \mathbf{L} κάτω τριγωνικός πίνακας (ο οποίος αποτελεί και τετραγωνική ρίζα, $\mathbf{P}^{1/2}$, του \mathbf{P}). Συνεπώς, $\bar{\mathbf{R}}_n = \bar{\mathbf{R}}_n^{1/2} \bar{\mathbf{R}}_n^{*/2}$, όπου $\bar{\mathbf{R}}_n^{1/2}$ κάτω τριγωνικός.

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter) (2)

- Ορίζουμε $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \left(\bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\right)^{-1} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2} \mathbf{x} + \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2} \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.
- $E[\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^*] = E[\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{nn}^* (\bar{\mathbf{R}}^{-1/2})^*] = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2} E[\mathbf{nn}^*] \bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \bar{\mathbf{R}}^{1/2} \bar{\mathbf{R}}^{*/2} \bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \mathbf{I}_N$.
- Επομένως, το κανάλι που προέκυψε από τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό του \mathbf{y} στο $\tilde{\mathbf{y}}$ είναι AWGN.
- Έχουμε δει ότι η απόδοση του ανιχνευτή MAP (και ML) δεν επηρεάζεται από αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς.
- Επομένως, στο δέκτη μπορούμε να δουλέψουμε με το κανάλι AWGN $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (Whitening Filter) (3)

- Ένα σύστημα με έγχρωμο θόρυβο ενδέχεται να έχει καλύτερη απόδοση από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο. Βλ. π.χ. Cioffi Παράδειγμα 1.7.1., όπου ένα σύστημα QPSK με έγχρωμο θόρυβο χαρακτηρίζεται από μικρότερη πιθανότητα σφάλματος από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο ίσης μέσης ισχύος.
- Αρκεί, βέβαια, ο δέκτης να είναι σχεδιασμένος για το σωστό κανάλι.