

ΕΕ725

Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

5η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

23 Μαρτίου 2010

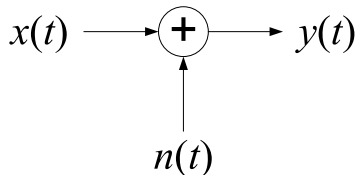
Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 1.2–1.4
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 7.1–7.3.3
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.): 7.1, 7.5–7.5.3

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

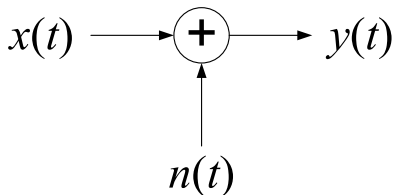
- 1 Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
 - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
 - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι
 - Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN

Το κανάλι AWGN



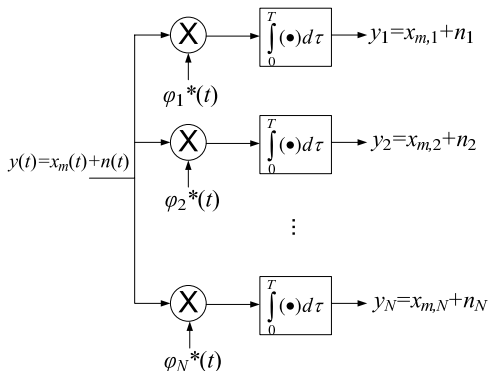
- Ο $\{n(t)\}$ είναι Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ και $\mathbb{E}[n(t)] = 0$. Τα δείγματά του (μετά από ιδανικό φίλτρο και δειγματοληψία) ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$.
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί T s,
 $y(t) = x(t) + n(t)$, $t \in [0, T]$.
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα $x(t)$ ανήκει σε υπόχωρο \mathcal{V} του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N . Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του \mathcal{V} : $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t)$.

Το κανάλι AWGN (2)



- Ο θόρυβος $n(t)$ είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης. Επομένως, οι N συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$ δεν αρκούν για την περιγραφή του: $n(t) = \sum_{i=1}^N n_i \phi_i(t) + n'(t)$, όπου $n'(t) \in \mathcal{V}^\perp$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή



$$y_i = \int_0^T y(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau)) \phi_i^*(\tau) d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμοσμένα φίλτρα.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

- $n_i = \int_0^T n(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau.$
 - Η τ.μ. n_i είναι Γκαουσιανή (ως γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών μεταβλητών) με μέση τιμή 0.
 - Επίσης, όπως ήδη έχουμε δείξει, $\mathbb{E}[n_i n_j^*] = \frac{N_0}{2} \delta_{ij} = \sigma^2 \delta_{ij}$ (Στην απόδειξη μεγιστοποίησης του SNR από το προσαρμοσμένο φίλτρο θεωρήστε τετριμμένο φίλτρο με $h(t) = 1$).
- Επομένως, οι συνιστώσες n_i του διανύσματος θορύβου \mathbf{n} το οποίο υπερτίθεται στο δiάνυσμα \mathbf{x}_m είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και, επομένως, ανεξάρτητες (γιατί:).
- Σημείωση: Στην περίπτωση μιγαδικού θορύβου (στην οποία δεν έχουμε αναφερθεί ακόμη) για να είναι οι n_i ανεξάρτητες πρέπει, επιπλέον, ο (μιγαδικός) θόρυβος $n(t)$ να είναι *κυκλικώς συμμετρικός* (circularly symmetric).
- Παρατηρήστε ότι οι \mathbf{n}_i είναι Γκαουσιανές ανεξαρτήτως των συναρτήσεων βάσης, $\phi_i(t)$, που χρησιμοποιούμε για τη διαμόρφωση!

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

- Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε

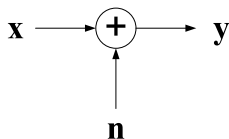
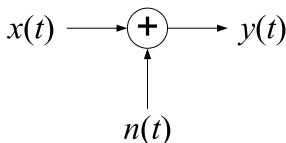
$$\begin{aligned}
 p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) &= \prod_{i=1}^N p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N (y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}.
 \end{aligned}$$

- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού AWGN!
- Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει το κανάλι μεταξύ της εισόδου του διαμορφωτή και της εξόδου του αποδιαμορφωτή για *οποιοσδήποτε* συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (4)

- Επομένως, αντί για το Γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε, ισοδύναμα, να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το \mathbf{n} είναι ένα τυχαίο Γκαουσιανό διάνυσμα N διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστες μεταξύ τους συνιστώσες n_i και κατανομή

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N |n_i|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(\pi\mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\mathcal{N}_0}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.
 \end{aligned}$$



Irrelevance του $n'(t)$

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδοθέν μήνυμα στο κανάλι AWGN, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του m απευθείας από την $y(t)$ ή κατά τη μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}[n'(t)y_i] = 0$ (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το $n'(t)$ είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των συνιστωσών του \mathbf{y} και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμία πληροφορία για την εκτίμηση του \mathbf{x} .
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα \mathbf{x}_m ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V} διάστασης N , για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του \mathbf{y} στον \mathcal{V} . Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο αποδιαμορφωτής συσχέτισης.

Irrelevance του $n'(t)$ (συνέχεια)

- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή αποδιαμορφωτή συσχέτισης) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την ανίχνευση των $x_{m,i}$.
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη με χρήση του ότι το $n'(t)$ είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

- Είδαμε ότι, για το Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το Γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι (2)

Κανόνας MAP για το διανυσματικό κανάλι AWGN

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν}$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$

Κανόνας ML για το διανυσματικό κανάλι AWGN (γιατί;)

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το διάνυσμα \mathbf{x}_i με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το διάνυσμα \mathbf{y} στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των \mathbf{x}_i .

Log-Likelihood Ratio (LLR)

- Είδαμε ότι ο κανόνας ML για το διανυσματικό κανάλι AWGN έχει τη μορφή

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

- Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε μόνο 2 μηνύματα, m_1 και m_2 ,

$$\hat{m} = \begin{cases} m_1 & \text{εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 \\ m_2 & \text{εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2 \end{cases}$$

- Επομένως, μπορούμε να αποφασίσουμε ποιο μήνυμα μεταδόθηκε από την τιμή του λόγου πιθανοφανειών (Likelihood ratio)

$$\text{LR}(\mathbf{y}) \triangleq \frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_1)}{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_2)} = \exp \left\{ \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Log-Likelihood Ratio (LLR) (2)

- Ισοδύναμα, μπορούμε να αποφασίσουμε χρησιμοποιώντας το πρόσημο του λογαρίθμου του λόγου πιθανοφανειών (Log-Likelihood Ratio - LLR)

$$\text{LLR}(\mathbf{y}) \triangleq \ln \text{LR}(\mathbf{y}) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2}{2\sigma^2}$$

Κανόνας ML στη δυαδική περίπτωση

$$\hat{m} = \begin{cases} m_1 & \text{εάν } \text{LLR}(\mathbf{y}) \geq 0 \\ m_2 & \text{εάν } \text{LLR}(\mathbf{y}) < 0 \end{cases}$$

Log-Likelihood Ratio (LLR) (3)

- Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}
 \text{LLR}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2\sigma^2} (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle + \frac{\|\mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{x}_1\|^2}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\langle \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle}{2} \right) \\
 &= \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{\sigma^2} \left(\left\langle \mathbf{y}, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \right\rangle - \frac{\left\langle \mathbf{x}_1, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \right\rangle + \left\langle \mathbf{x}_2, \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \right\rangle}{2} \right) \\
 &= \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{\sigma^2} \left(\langle \mathbf{y}, \phi \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi \rangle}{2} \right),
 \end{aligned}$$

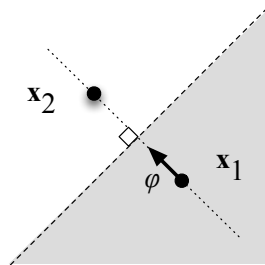
όπου $\phi \triangleq \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}$ το κανονικοποιημένο διάνυσμα από το \mathbf{x}_2 στο \mathbf{x}_1 .

Log-Likelihood Ratio (LLR) (4)

- Επομένως,

$$\text{LLR}(\mathbf{y}) > 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y}, \phi \rangle > \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi \rangle}{2}$$

- Συνεπώς, για την ανίχνευση ML, αρκεί να ελέγξουμε πού βρίσκεται η προβολή του ληφθέντος διανύσματος \mathbf{y} σε σχέση με τη μεσοκάθετο των \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 .



Log-Likelihood Ratio (LLR) (5)

- Στην περίπτωση που τα μεταδιδόμενα σύμβολα δεν είναι ισοπίθανα, αποδεικνύεται εύκολα ότι, για ανίχνευση MAP,

$$\text{LLR}(\mathbf{y}) > 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{y}, \phi \rangle > \frac{\langle \mathbf{x}_1, \phi \rangle + \langle \mathbf{x}_2, \phi \rangle}{2} + \frac{\sigma^2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} \ln \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_2)}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1)}.$$

- Επομένως, το όριο μεταξύ των δύο περιοχών απόφασης δεν ταυτίζεται, πλέον, με τη μεσοκάθετο, αλλά είναι πιο κοντά στο πιο πιθανό (a priori) σύμβολο.
- Παρατηρήστε ότι, όταν τα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι ισοπίθανα, ο κανόνας ML δεν επηρεάζεται από τη διασπορά του θορύβου, σ^2 .

Sufficient Statistics

- Είδαμε ότι ένας τρόπος υλοποίησης του αποκωδικοποιητή ML όταν έχουμε 2 πιθανά μεταδιδόμενα σύμβολα είναι με προβολή στην ευθεία που ενώνει τα δύο σύμβολα και σύγκριση με ένα όριο.
- Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι, για περισσότερα σύμβολα πομπού, μπορούμε να επαναλάβουμε έως ότου βρούμε το σύμβολο το οποίο βρίσκεται πιο κοντά στην προβολή του \mathbf{y} .
- Παρόλο που προβάλαμε το \mathbf{y} σε συγκεκριμένες κατευθύνσεις με αποτέλεσμα να προκληθεί απώλεια πληροφορίας, δε χάσαμε τίποτα όσον αφορά την ποιότητα εκτίμησης του \mathbf{x} .
- Σε περιπτώσεις όπως αυτή που εξετάσαμε, λέμε ότι ο μετασχηματισμός του ληφθέντος σήματος, \mathbf{y} , είναι ικανή στατιστική (sufficient statistics) όσον αφορά την εκτίμηση του \mathbf{x} .

Sufficient Statistics (2)

- Γενικώς, ο μετασχηματισμός $T(\mathbf{y})$ της \mathbf{y} είναι ικανή στατιστική για την εκτίμηση της \mathbf{x} όταν για κάθε ζεύγος $i \neq j$ υπάρχει νομοτελειακή συνάρτηση $\zeta_{i,j}(\cdot)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\frac{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)}{f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)} = \zeta_{i,j}(T(\mathbf{y})).$$

- Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι με χρήση της ικανής στατιστικής $T(\mathbf{y})$ και των νομοτελειακών συναρτήσεων $\zeta_{i,j}(\cdot)$ προκύπτουν οι ίδιες τιμές LLR με την περίπτωση που χρησιμοποιούμε απευθείας τις $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$. Επομένως, δεν έχουμε καμία απώλεια στην ποιότητα της εκτίμησης.
- Στα παραπάνω έχουμε παραλείψει πολλές λεπτομέρειες σχετικά με το σωστό μαθηματικό ορισμό της ικανής στατιστικής. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. Lapidoth Ch. 20 & 21 ή βιβλία Hypothesis Testing.

Ένα τελευταίο σχόλιο

- Είδαμε ότι, για να αποφασίσουμε ανάμεσα σε δύο σύμβολα, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την προβολή της \mathbf{y} στην ευθεία που ενώνει τα δύο σύμβολα
 - Αφού γνωρίζουμε ότι τα σήματα βρίσκονται στον υπόχωρο διάστασης 1 που αναπτύσσεται από τη $\phi = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}$, ο εκτιμητής του \mathbf{x} που ελαχιστοποιεί τη μέση τετραγωνική απόσταση από το πραγματικό \mathbf{x} είναι η προβολή του \mathbf{y} στην κατεύθυνση ϕ .
 - Ισοδύναμα, σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για να μεγιστοποιήσουμε τον SNR πρέπει να προβάλλουμε το $\mathbf{y} = x_i\phi + \mathbf{n}$ στο διάνυσμα ϕ^* .
- Ωστόσο, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι έχουμε υποθέσει AWGN.

Ανίχνευση ML με χρήση συσχέτισης (correlation)

- Επιστρέφοντας και πάλι στην έκφραση του LLR,

$$\begin{aligned} \text{LLR}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2\sigma^2} (\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_2\|^2 - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1\|^2) \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} (\{-2\Re(\mathbf{y}^* \mathbf{x}_2) + \|\mathbf{x}_2\|^2\} - \{-2\Re(\mathbf{y}^* \mathbf{x}_1) + \|\mathbf{x}_1\|^2\}) \end{aligned}$$

- Επομένως, ένας τρόπος να κάνουμε ανίχνευση ML είναι συγκρίνοντας τη συσχέτιση του \mathbf{y} με τα πιθανά σύμβολα πηγής \mathbf{x}_i . Για τη σύγκριση απαιτείται και μια κανονικοποίηση ίση με την ενέργεια του κάθε συμβόλου.
- Εάν, επιπλέον, όλα τα \mathbf{x}_i έχουν την ίδια ενέργεια,

$$\text{LLR}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sigma^2} (\Re(\mathbf{y}^* \mathbf{x}_1) - \Re(\mathbf{y}^* \mathbf{x}_2))$$

Πιθανότητα Σφάλματος στο Κανάλι AWGN

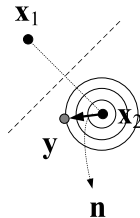
- Διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι: $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$.
- Πιθανότητα σφάλματος $P_e = \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m} p_m$, όπου
 - $P_{e|m}$ η πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι μεταδόθηκε το σύμβολο m του αστερισμού και
 - p_m η πιθανότητα μετάδοσης του συμβόλου m
- $P_e = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} P_{e|m}$ όταν όλα τα σύμβολα μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα.

Περιστροφή και μετατόπιση αστερισμού στο Κανάλι AWGN

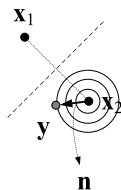
- Περιστροφή αστερισμού: Εάν ο αστερισμός περιστραφεί στον Ευκλείδειο χώρο (σε κανάλια AWGN) η P_e δεν αλλάζει, επειδή η κατανομή του θορύβου παραμένει η ίδια και οι ευκλείδειες αποστάσεις τις οποίες χρησιμοποιεί ο ανιχνευτής MAP (και ML) διατηρούνται.
- Μετατόπιση αστερισμού: Η P_e παραμένει αμετάβλητη όταν ο αστερισμός μετατοπίζεται στον Ευκλείδειο χώρο.
- Για ένα δεδομένο αστερισμό, για να ελαχιστοποιήσουμε τη μέση ισχύ του, εάν $\mathbb{E}[\mathbf{x}] \neq 0$ τον μετατοπίζουμε ώστε $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = 0$.
- Για λεπτομέρειες/αποδείξεις, βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1.

P_e για δυαδική μετάδοση

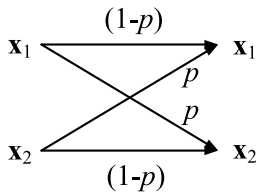
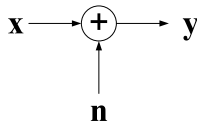
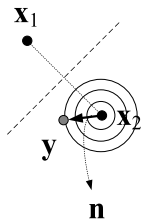
- Έστω ένας αστερισμός στο N -διάστατο χώρο με δύο σύμβολα και κανάλι AWGN. Ο ανιχνευτής ML θα επιλέξει το \mathbf{x}_i με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το \mathbf{y} . Ισοδύναμα, όπως είδαμε, μπορεί να χρησιμοποιήσει την προβολή του \mathbf{y} στην κατεύθυνση $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$



- Εάν προβάσουμε τον Γκαουσιανό θόρυβο επάνω στη διεύθυνση $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ παραμένει Γκαουσιανός.
- Επομένως, δεδομένου ότι μεταδόθηκε το \mathbf{x}_2 , σφάλμα θα συμβεί όταν $\langle \mathbf{n}, \phi \rangle > \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|}{2}$, όπου ϕ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$.

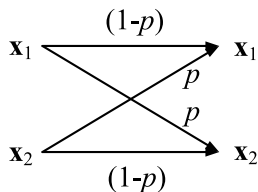
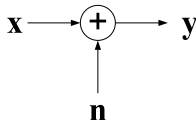
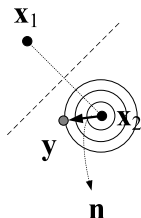
P_e για δυαδική μετάδοση (2)

- Επομένως, εάν $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = d$, $P_e = \Pr \left\{ \langle \mathbf{n}, \phi \rangle \triangleq \tilde{n} > \frac{d}{2} \right\}$.
- $P_{e|\mathbf{x}_1} = P_{e|\mathbf{x}_2} = P_e = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} f_{\tilde{N}}(n) dn = \int_{\frac{d}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = \int_{\frac{d}{2\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \Rightarrow P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$, όπου $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ η συνάρτηση Q .
- Υπενθυμίζεται ότι η $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ δεν έχει αναλυτική έκφραση, αλλά μπορεί να προσεγγιστεί με φράγματα (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 1 Appendix B, Lee & Messerschmitt Ch. 1).

P_e για δυαδική μετάδοση (3)

- Για τον υπολογισμό της P_e χρησιμοποιήσαμε Γκαουσιανό κανάλι με 2 μεταδιδόμενα σήματα: \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 .

- Διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι: $f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}$, $i = 1$ και 2 .

P_e για δυαδική μετάδοση (4)

- Εάν εκτιμήσουμε το κανάλι με κανόνα ML: $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x}_i) = 1 - P_e = 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$. $p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_2 | \mathbf{x}_1) = p(\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2) = P_e \Rightarrow$ Το κανάλι από το \mathbf{x} στο $\hat{\mathbf{x}}$ όταν χρησιμοποιείται δέκτης ML είναι το δυαδικό συμμετρικό κανάλι (BSC) με $p = P_e$!
- Επομένως, ένα σύστημα μπορεί να περιγράφεται από διαφορετικά μοντέλα αναλόγως με την υλοποίηση και τα σήματα που χρησιμοποιούμε για τη μετάδοση.

Ελάχιστη απόσταση αστερισμού

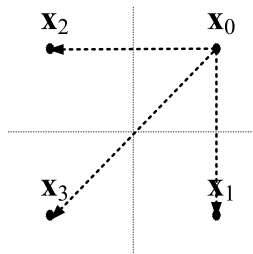
Η ελάχιστη απόσταση αστερισμού ορίζεται ως η ελάχιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο συμβόλων του αστερισμού.

Ελάχιστη απόσταση αστερισμού (ορισμός)

$$d_{\min} \triangleq \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|.$$

Όπως θα δούμε σύντομα, η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την d_{\min} του αστερισμού.

Union Bound



- Υποθέτουμε ότι έχει μεταδοθεί το \mathbf{x}_0 . Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος ισούται με

$$P_{e|0} \stackrel{\text{γιατί;}}{=} \sum_{i=1}^3 \Pr\{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i | \mathbf{x} = \mathbf{x}_0\} \stackrel{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^3 Q\left(\frac{d_{0,i}}{2\sigma}\right)$$

$$\stackrel{\text{γιατί;}}{<} \sum_{i=1}^3 Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) = 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right).$$

Union Bound (2)

- Ομοίως, για τα υπόλοιπα \mathbf{x}_i , $P_{e|i} < 3Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.

Union bound

$$P_e < (N - 1)Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right),$$

όπου N ο αριθμός των σημάτων του αστερισμού.

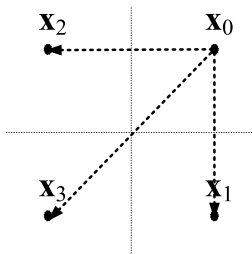
- Άνω φράγμα, αλλά σπανίως ακριβές. Πολλές φορές απέχει πολύ από την πραγματική P_e .
- Καλύτερο φράγμα: Nearest Neighbor Union Bound (NNUB).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB)

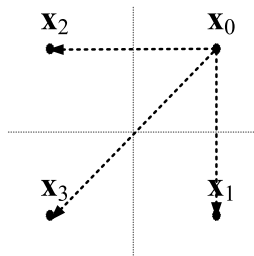
Nearest Neighbor Union bound

$$P_e \leq N_e Q \left(\frac{d_{\min}}{2\sigma} \right),$$

όπου $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_m$, N_m ο αριθμός των συμβόλων του αστερισμού των οποίων οι περιοχές απόφασης εφάπτονται με αυτή του \mathbf{x}_m .



Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (2)



- Στο σχήμα, εάν ο θόρυβος διασχίσει την οριζόντια ή την κάθετη γραμμή θα έχουμε σφάλμα μετάδοσης. Επομένως,

γιατί:
 $P_e < 2Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$. Παρατηρήστε ότι $N_e = 2$ (έχουμε υποθέσει ότι τα μεταδιδόμενα σήματα είναι ισοπίθανα).

Nearest Neighbor Union Bound (NNUB) (3)

- Συχνά, για τον υπολογισμό του μέσου αριθμού γειτόνων, $N_e = \sum_{m=0}^{M-1} N_m p_m$, χρησιμοποιούνται μόνο οι γείτονες κάθε συμβόλου \mathbf{x}_m οι οποίοι απέχουν την ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση d_{\min} .
- Στην περίπτωση αυτή το *προσεγγιστικό* NNUB που προκύπτει ενδέχεται να μην είναι άνω φράγμα της P_e .
- Ωστόσο, στην πράξη, αποτελεί συνήθως καλή προσέγγιση της P_e με αποτέλεσμα πολλές φορές όταν σχεδιαστές αναφέρονται στο NNUB να εννοούν το προσεγγιστικό NNUB.

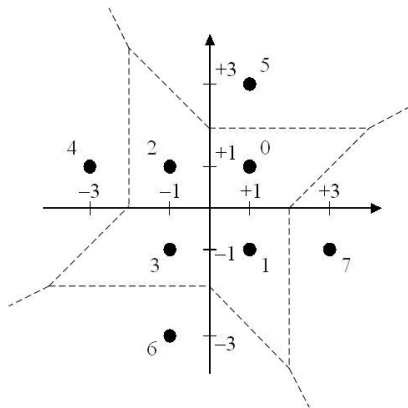
\bar{P}_e : Πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση

- Η σύγκριση συστημάτων με βάση την P_e δεν είναι πάντα δίκαιη. Για παράδειγμα, σε ένα κανάλι AWGN ένα σύστημα QPSK υπόκειται σε θόρυβο σε δύο διαστάσεις, ενώ ένα σύστημα BPSK σε θόρυβο σε μία διάσταση.
- Επιπλέον, το σύστημα BPSK μεταδίδει 1 ψηφίο ανά χρήση του καναλιού, ενώ το σύστημα QPSK 2 ψηφία ανά χρήση του καναλιού (άρα 1 ψηφίο ανά διάσταση).
- Επομένως, ένα πιο δίκαιο μέτρο σύγκρισης είναι η πιθανότητα σφάλματος ανά διάσταση: $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.
- Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την πιθανότητα σφάλματος ανά αριθμό μεταδιδόμενων ψηφίων: $\frac{P_e}{b} = \frac{P_e}{\log_2 M}$.

Ρυθμός Σφάλματος Ψηφίων (Bit Error Rate -- BER)

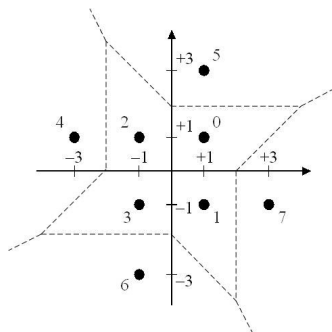
- Όταν μας ενδιαφέρει η πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης ψηφίων (bits) η P_e δεν αρκεί πάντα από μόνη της για την περιγραφή της απόδοσης ενός συστήματος.
- Έστω, για παράδειγμα, ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί μόνο 2 σήματα (π.χ. BPSK) και ένα άλλο το οποίο χρησιμοποιεί 64 πιθανά σήματα (π.χ. 64-QAM όπως θα δούμε αργότερα). Σε ένα σύστημα BPSK όταν συμβεί σφάλμα στο σήμα που αποκωδικοποιείται προκύπτει αυτόματα και σφάλμα στο ψηφίο. Ωστόσο, σε ένα καλά σχεδιασμένο σύστημα 64-QAM ακόμα και αν συμβεί σφάλμα στην ανίχνευση του σήματος στο δέκτη, κάποια από τα ψηφία ενδέχεται να αποκωδικοποιηθούν σωστά.
- Υπάρχουν διάφοροι παρόμοιοι ορισμοί για το BER. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε $BER = \Pr\{\text{αντιστροφή ψηφίου στο δέκτη}\}$ (το οποίο από κάποιους ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος ψηφίου \bar{P}_b).

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM``



Στο σχήμα, $d_{\min} = 2$. Ο αριθμός σε κάθε σήμα δηλώνει το αντίστοιχο μήνυμα. Για παράδειγμα, το σήμα $(+1, +3)$ αντιστοιχεί στο m_5 ή στην ακολουθία ψηφίων 1 0 1.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM`` (2)



- Μέση ενέργεια του αστερισμού: $\mathcal{E}_x = \sum_m \|\mathbf{x}_m\|^2 p_m$
 $= \frac{1}{8} \left(4 \frac{d_{\min}^2}{2} + 4 \frac{5d_{\min}^2}{2} \right) = \frac{3}{2} d_{\min}^2 = 6$. $\bar{\mathcal{E}}_x = 3$.
- Εάν ο δέκτης χρησιμοποιεί προσαρμοσμένο φίλτρο:
 $\text{SNR} = \frac{\mathcal{E}_x}{\sigma^2} = \frac{3d_{\min}^2}{2\sigma^2}$.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM`` (3)

- Union bound: $P_e < 7Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e = \frac{P_e}{2} = 3.5Q(d_{\min}/2\sigma)$.
- Nearest neighbors: Όλα τα σήματα έχουν 4 γείτονες.
 - Τα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και \mathbf{x}_3 έχουν 3 γείτονες σε απόσταση $d_{\min} = 2$ και 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$.
 - Τα $\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$ και \mathbf{x}_7 έχουν 1 γείτονα σε απόσταση $d_{\min} = 2$, 1 γείτονα σε απόσταση $2\sqrt{2}$ και 2 γείτονες σε απόσταση $2\sqrt{5}$.
 - NNUB: $P_e < 4Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e < 2Q(d_{\min}/2\sigma)$.
 - Εάν κρατήσουμε μόνο τους πιο κοντινούς γείτονες κάθε σήματος:

$$P_e \approx \sum_{m=0}^3 \frac{1}{8} 3Q(d_{\min}/2\sigma) + \sum_{m=4}^7 \frac{1}{8} Q(d_{\min}/2\sigma) = 2Q(d_{\min}/2\sigma) \Rightarrow \bar{P}_e \approx Q(d_{\min}/2\sigma).$$
- Παρατηρούμε ότι τα εξωτερικά σήματα του αστερισμού είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλμα μετάδοσης από τα εσωτερικά.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM`` (4)

- Έστω ότι μεταδόθηκε το \mathbf{x}_0 . Θεωρούμε μόνο τους γείτονές του σε απόσταση d_{\min} . Εάν αντί για \mathbf{x}_0 ο δέκτης αποφασίσει \mathbf{x}_1 ή \mathbf{x}_2 θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 1 από τα 3 ψηφία. Εάν αποφασίσει \mathbf{x}_5 θα εμφανιστεί σφάλμα σε 2 ψηφία. Επομένως, ο μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων όταν συμβεί σφάλμα κατά την αποκωδικοποίηση του \mathbf{x}_0 ισούται προσεγγιστικά με $n_b(0) \approx \frac{4}{3}$. Παρομοίως, $n_b(1) = n_b(2) = n_b(3) \approx \frac{4}{3}$.
- Έστω, τώρα, ότι μεταδίδεται το \mathbf{x}_5 . Εάν αντί για \mathbf{x}_5 ο δέκτης αποφασίσει \mathbf{x}_0 θα εμφανιστεί σφάλμα (αναστροφή) σε 2 από τα 3 ψηφία. Συνεπώς, $n_b(5) = n_b(6) = n_b(7) = n_b(8) \approx 2$.

Παράδειγμα: VDSL2 ``8-QAM`` (5)

- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων δεδομένου ότι συνέβη σφάλμα: $N_b \approx \frac{5}{3}$.
- Μέσος αριθμός εσφαλμένων ψηφίων: $P_b \approx N_b Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right) \approx \frac{5}{3} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$
(δεν είναι πιθανότητα – ενδέχεται να υπερβαίνει το 1).
- $\text{BER} = \bar{P}_b = \frac{P_b}{b} \approx \frac{5}{9} Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma}\right)$.
- Συνήθως, η ποσότητα που καθορίζει την P_e και το BER είναι το όρισμα της $Q(\cdot)$ η οποία ελαττώνεται (σχεδόν) εκθετικά. Ο αριθμός των γειτόνων ή το N_b επιδρά σημαντικά μόνο όταν έχει μεγάλη τιμή ή σε χαμηλούς SNR.

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους ;

- Για να υλοποιήσουμε τις συναρτήσεις βάσης οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση χρησιμοποιούμε τους πόρους του καναλιού: χρόνο, συχνότητα και χώρο (σε συστήματα πολλαπλών κεραιών). Κάθε μία από τις N διαστάσεις έχει κόστος γιατί απαιτεί χρήση κάποιων από τους πόρους του συστήματος.
- Για παράδειγμα, ένα σύστημα 2 διαστάσεων μπορεί να υλοποιείται με εναλλάξ μετάδοση στο χρόνο κάθε διάστασης ή με χρήση δύο περιοχών συχνότητας.

Πώς συγκρίνουμε διαφορετικές διαμορφώσεις μεταξύ τους ; (συνέχεια)

- Για δίκαιη σύγκριση συστημάτων, πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παρακάτω ποσότητες :
 1. Ο ρυθμός μετάδοσης R .
 2. Η χρησιμοποιούμενη ισχύς P_x .
 3. Το συνολικό εύρος ζώνης W που χρησιμοποιεί το σύστημα.
 4. Η περίοδος T_s που διαρκεί η μετάδοση κάθε συμβόλου.
 5. Το BER ή η P_e .
- Αν οι παραπάνω ποσότητες κανονικοποιηθούν κατάλληλα, 3 ποσότητες αρκούν για σύγκριση συστημάτων :
 1. Ο αριθμός ψηφίων ανά διάσταση $\bar{b} = \frac{b}{N}$,
 2. Η ενέργεια ανά διάσταση $\bar{\mathcal{E}}_x = \frac{\mathcal{E}_x}{N}$ και
 3. Η κανονικοποιημένη πιθανότητα σφάλματος $\bar{P}_e = \frac{P_e}{N}$.