

ΕΕ725

Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

4η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

15 Μαρτίου 2010

Αντιστοιχία με βιβλιογραφία

- Cioffi: 1.2–1.5
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 7.1–7.3.3
- Proakis & Salehi, Communication Systems Engineering (2nd ed.):
7.1, 7.5–7.5.3

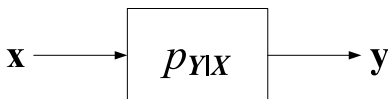
Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου (συνέχεια)
 - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
- 2 Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
 - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
 - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων

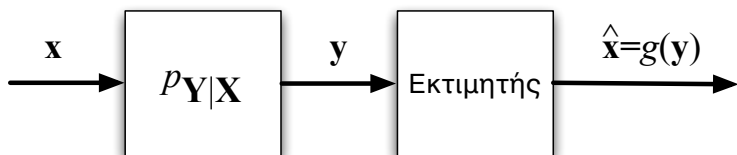
- Στην πράξη, η λαμβανόμενη κυματομορφή $y(t)$ στο δέκτη δεν ισούται με την κυματομορφή $x_i(t)$, $i = 1, \dots, M$ που μεταδίδεται από τον πομπό (λόγω θορύβου και καναλιού).
- Σκοπός της ανίχνευσης είναι να βρεθεί ποια κυματομορφή $x_i(t)$ (και άρα ποιο διάνυσμα \mathbf{x}_i ή, ισοδύναμα, ποιο μήνυμα m_i) έστειλε ο δέκτης.
- Για την ανάλυση της ανίχνευσης θα δουλέψουμε με διανύσματα. Θα θεωρήσουμε, δηλαδή, ότι, με χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου N κλάδων, η κυματομορφή $y(t)$ έχει αναλυθεί (αποδιαμορφωθεί) σε συνιστώσες y_1, y_2, \dots, y_N .
- Επομένως, το πρόβλημα είναι το εξής: Δεδομένου του ληφθέντος διανύσματος $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$ να βρεθεί το μεταδοθέν διάνυσμα \mathbf{x}_i .

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (2)



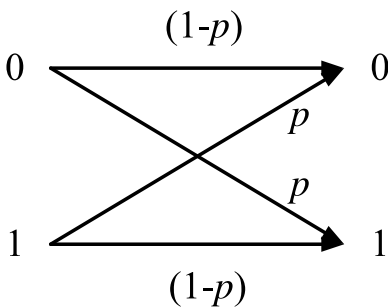
- Για την ανάλυση και τη σχεδίαση του ανιχνευτή χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μοντέλο καναλιού του σχήματος.
- Η $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ χαρακτηρίζει πλήρως το διακριτό κανάλι. Εξαρτάται από το κανάλι, από το θόρυβο, από τις κυματομορφές που χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση και από τη σχεδίαση του συστήματος.
- Θα θεωρήσουμε, προς το παρόν, ότι γνωρίζουμε την $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$. Αργότερα θα δούμε παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού της $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$.

Ανίχνευση με χρήση διανυσμάτων (3)



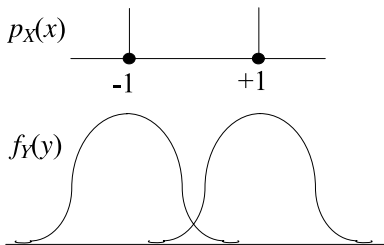
- Ο ανιχνευτής/εκτιμητής έχει ως είσοδο το \mathbf{y} και ως έξοδο την εκτίμηση, $\hat{\mathbf{x}}$, του σήματος που μεταδόθηκε. Επειδή η σχέση μηνύματος m_i και διανύσματος \mathbf{x}_i στον πομπό είναι 1-προς-1, ο δέκτης μπορεί να εκτιμήσει από το $\hat{\mathbf{x}}$ ποιο μήνυμα \hat{m} μεταδόθηκε.
- Σφάλμα μετάδοσης εμφανίζεται όταν $\hat{m} = m_j, j \neq i$, όπου m_i το μήνυμα που μεταδόθηκε (ισοδύναμα, όταν $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_i$).

Διαδικό Συμμετρικό Κανάλι (Binary Symmetric Channel)



- $p_{Y|X}(0|1) = p_{Y|X}(1|0) = p$ (αναστροφή ψηφίου)
- $p_{Y|X}(0|0) = p_{Y|X}(1|1) = 1 - p$
- Ένα από τα πιο χρήσιμα μοντέλα στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.

Διαδική μετάδοση που υπόκειται σε γκαουσιανό θόρυβο



- Υποθέτουμε ότι $y = x + n$, όπου $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Επομένως, $f_{Y|X}(y|x) = f_N(y - x)$.
- $f_{Y|X}(y|x = -1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2\sigma^2}}$, $f_{Y|X}(y|x = +1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$.
- Θα το χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον

Κατανομή ληφθέντος σήματος, Πιθανότητα Σφάλματος

- Από τον κανόνα Bayes, εάν ο αστερισμός αποτελείται από M σύμβολα, το καθένα από τα οποία μεταδίδεται με πιθανότητα $p_X(x_m)$,

$$p_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} p_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m)$$
$$\text{ή } f_Y(y) = \sum_{m=0}^{M-1} f_{Y|X}(y|x_m)p_X(x_m).$$

- Πιθανότητα Σφάλματος (Probability of Error): $P_e \triangleq \Pr\{\hat{m} \neq m\}$.
- Πιθανότητα σωστής λήψης: $P_c = 1 - P_e = \Pr\{\hat{m} = m\}$.

Ανίχνευση Μέγιστης εκ των Υστέρων Πιθανότητας (Maximum a posteriori probability (MAP) detection)

- Έστω ότι ο πομπός εκπέμπει το μήνυμα m_i και ότι ο δέκτης λαμβάνει σήμα \mathbf{y} . $P_{c|\mathbf{y}} = \Pr(\hat{m} = m_i | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = p_{M|\mathbf{Y}}(m_i | \mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ (γιατί;)

Ορισμός Ο ανιχνευτής MAP επιλέγει το σήμα \mathbf{x}_i που μεγιστοποιεί την εκ των υστέρων πιθανότητα $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i | \mathbf{y})$ δεδομένου ότι ελήφθη το σήμα \mathbf{y} .

Κανόνας Ανίχνευσης MAP

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{x}} p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x} | \mathbf{y})$$

Ανίχνευση MAP (συνέχεια)

- Από το θεώρημα Bayes, $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y}) = \frac{p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}$.
- Δεδομένου ότι ο παρονομαστής $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ είναι κοινός για όλες τις $p_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}_i|\mathbf{y})$, ο ανιχνευτής MAP μπορεί να υλοποιηθεί ως εξής:

Κανόνας Ανίχνευσης MAP

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood (ML) detection)

- Εάν όλα τα μεταδιδόμενα σύμβολα (και μηνύματα) είναι ισοπίθανα:
 $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{M}$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, ο κανόνας ανίχνευσης MAP απλοποιείται στον κανόνα ανίχνευσης ML

Κανόνας Ανίχνευσης ML

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i.$$

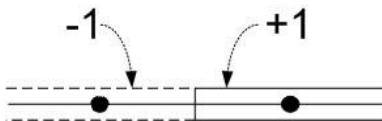
- Ο ανιχνευτής ML χρησιμοποιείται συχνά σε Ψηφιακά Συστήματα. Ωστόσο, μερικές φορές η εύρεση αναλυτικής έκφρασης για τις $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ ενδέχεται να είναι αδύνατη ή οι εκφράσεις μπορεί να είναι πολύπλοκες. Για το λόγο αυτό πολλοί δέκτες χρησιμοποιούν προσεγγιστικούς κανόνες (με αποτέλεσμα να αυξάνει η πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την ανίχνευση ML).

Περιοχές Αποφάσεων (Decision (Voronoi) Regions)

- Προκειμένου να μην υπολογίζεται η τιμή των συναρτήσεων $p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)$ (ή του γινομένου τους με τις $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)$) στο δέκτη κάθε φορά που λαμβάνεται ένα σήμα \mathbf{y} , μπορεί να έχει προσδιοριστεί εκ των προτέρων το σήμα \mathbf{x}_i που προκύπτει από τον κανόνα ML (ή MAP) για κάθε πιθανή τιμή του λαμβανόμενου σήματος \mathbf{y} .
- Ο δέκτης προσδιορίζει την περιοχή του Ευκλείδειου χώρου (περιοχή απόφασης) στην οποία ανήκει το \mathbf{y} το οποίο λαμβάνει και αποφασίζει για το μεταδοθέν σήμα με βάση την περιοχή.

Περιοχές Αποφάσεων (2)

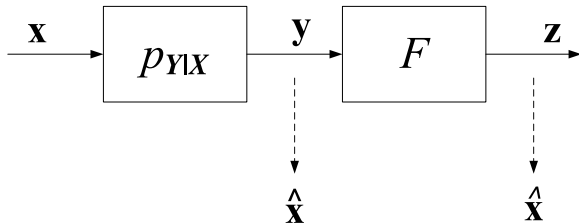
- Οι περιοχές απόφασης για το δέκτη ML του καναλιού με δυαδική μετάδοση και Γκαουσιανό θόρυβο που εξετάσαμε ενωρίτερα φαίνονται στο σχήμα. Μαθηματικά, εάν $y < 0 \rightarrow x = -1$, ενώ εάν $y \geq 0 \rightarrow x = +1$.



- Θα δούμε στη συνέχεια ότι, στην περίπτωση Γκαουσιανού καναλιού, οι κανόνες MAP και ML απλοποιούνται σημαντικά σε σχέση με τη γενική τους μορφή.

Θεώρημα Αντιστρεψιμότητας (Reversibility Theorem)

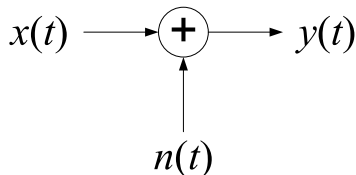
- Η εφαρμογή αντιστρέψιμου μετασχηματισμού στο διάνυσμα εξόδου \mathbf{y} του καναλιού δεν επηρεάζει την απόδοση του ανιχνευτή MAP.
- Επομένως, στο σχήμα, εφόσον ο μετασχηματισμός F είναι αντιστρέψιμος, η εκτίμηση MAP που βασίζεται στο \mathbf{y} θα είναι ίδια με την εκτίμηση MAP που βασίζεται στο \mathbf{z} .
- Φυσικά, οι περιοχές απόφασης των δύο ανιχνευτών MAP θα είναι, στη γενική περίπτωση, διαφορετικές.



Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)

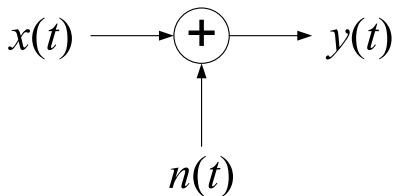
- 1. Αποδιαμόρφωση και αποκωδικοποίηση παρουσία θορύβου (συνέχεια)
 - Ανίχνευση μηνυμάτων (Discrete Data Detection)
- 2. Το κανάλι Προσθετικού Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου (AWGN)
 - Διανυσματικό μοντέλο καναλιού AWGN
 - Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

Το κανάλι AWGN



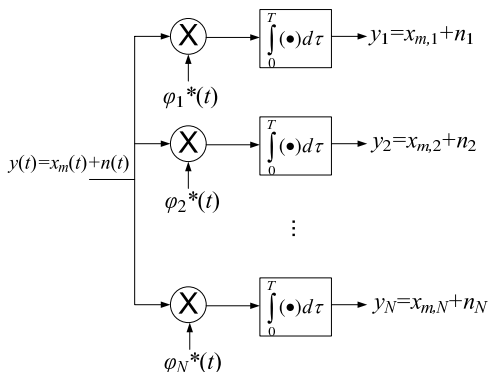
- Ο $\{n(t)\}$ είναι Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος με $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ και $\mathbb{E}[n(t)] = 0$. Τα δείγματά του (μετά από ιδανικό φίλτρο και δειγματοληψία) ακολουθούν Γκαουσιανή κατανομή $\mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$.
- Εάν υποθέσουμε ότι η μετάδοση διαρκεί T s, $y(t) = x(t) + n(t)$, $t \in [0, T]$.
- Υποθέτουμε, επίσης, ότι το μεταδιδόμενο σήμα $x(t)$ ανήκει σε υπόχωρο \mathcal{V} του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N . Άρα, μπορεί να εκφραστεί με χρήση των συναρτήσεων βάσης του \mathcal{V} : $x(t) = \sum_{i=1}^N x_i \phi_i(t)$.

Το κανάλι AWGN (2)



- Ο θόρυβος $n(t)$ είναι, στη γενική περίπτωση, άπειρης διάστασης. Επομένως, οι N συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$ δεν αρκούν για την περιγραφή του: $n(t) = \sum_{i=1}^N n_i \phi_i(t) + n'(t)$, όπου $n'(t) \in \mathcal{V}^\perp$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή



$$y_i = \int_0^T y(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau = \int_0^T (x_m(\tau) + n(\tau)) \phi_i^*(\tau) d\tau = x_{m,i} + n_i.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα, προφανώς, προκύπτει εάν χρησιμοποιήσουμε προσαρμοσμένα φίλτρα.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (2)

- $n_i = \int_0^T n(\tau) \phi_i^*(\tau) d\tau$.
 - Η τ.μ. n_i είναι Γκαουσιανή (ως γραμμικός συνδυασμός Γκαουσιανών μεταβλητών) με μέση τιμή 0.
 - Επίσης, όπως ήδη έχουμε δείξει, $\mathbb{E}[n_i n_j^*] = \frac{N_0}{2} \delta_{ij} = \sigma^2 \delta_{ij}$ (Στην απόδειξη μεγιστοποίησης του SNR από το προσαρμοσμένο φίλτρο θεωρήστε τετριμμένο φίλτρο με $h(t) = 1$).
- Επομένως, οι συνιστώσες n_i του διανύσματος θορύβου \mathbf{n} το οποίο υπερτίθεται στο δiάνυσμα \mathbf{x}_m είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστες και, επομένως, ανεξάρτητες (γιατί!).
- Σημείωση: Στην περίπτωση μιγαδικού θορύβου (στην οποία δεν έχουμε αναφερθεί ακόμη) για να είναι οι n_i ανεξάρτητες πρέπει, επιπλέον, ο (μιγαδικός) θόρυβος $n(t)$ να είναι κυκλικώς συμμετρικός (circularly symmetric).
- Παρατηρήστε ότι οι \mathbf{n}_i είναι Γκαουσιανές ανεξαρτήτως των συναρτήσεων βάσης, $\phi_i(t)$, που χρησιμοποιούμε για τη διαμόρφωση!

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (3)

- Μπορούμε, επομένως, να γράψουμε

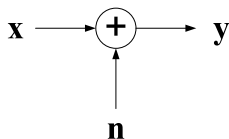
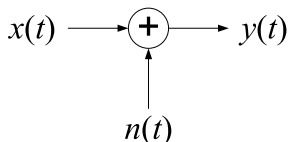
$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_m) &= \prod_{i=1}^N p(y_i|x_{m,i}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N (y_i-x_{m,i})^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

- Υπολογίσαμε, λοιπόν, την $p_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ για το διανυσματικό μοντέλο του καναλιού AWGN!
- Το μοντέλο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει το κανάλι μεταξύ της εισόδου του διαμορφωτή και της εξόδου του αποδιαμορφωτή για *οποιοσδήποτε* συναρτήσεις βάσης $\phi_i(t)$.

Το διανυσματικό κανάλι AWGN μετά τον αποδιαμορφωτή (4)

- Επομένως, αντί για το Γκαουσιανό κανάλι αριστερά μπορούμε, ισοδύναμα, να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό Γκαουσιανό κανάλι δεξιά, όπου το \mathbf{n} είναι ένα τυχαίο Γκαουσιανό διάνυσμα N διαστάσεων με μηδενική μέση τιμή, ασυσχέτιστες μεταξύ τους συνιστώσες n_i και κατανομή

$$\begin{aligned}
 p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{(\pi \mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^N |n_i|^2}{\mathcal{N}_0}} = \frac{1}{(\pi \mathcal{N}_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{\mathcal{N}_0}} \\
 &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2}}.
 \end{aligned}$$



Irrelevance του $n'(t)$

- Δεν έχουμε, ακόμα, απαντήσει στο εξής ερώτημα: Η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου και, στη συνέχεια, του διανυσματικού μοντέλου καναλιού για να εκτιμήσουμε το μεταδοθέν μήνυμα στο κανάλι AWGN, είναι ισοδύναμη με την εκτίμηση του m απευθείας από την $y(t)$ ή κατά τη μετατροπή έχει χαθεί κάποια πληροφορία;
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}[n'(t)y_i] = 0$ (π.χ. Proakis Ch.5). Επομένως, το $n'(t)$ είναι ανεξάρτητο (γιατί;) των συνιστωσών του \mathbf{y} και, συνεπώς, δεν προσφέρει καμία πληροφορία για την εκτίμηση του \mathbf{x} .
- Θυμηθείτε και το θεώρημα προβολής: Δεδομένου ότι το σήμα \mathbf{x}_m ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V} διάστασης N , για να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης πρέπει να βρούμε την προβολή του \mathbf{y} στον \mathcal{V} . Αυτό ακριβώς κάνουν ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων και ο αποδιαμορφωτής συσχέτισης.

Irrelevance του $n'(t)$ (συνέχεια)

- Άρα, η χρήση προσαρμοσμένου φίλτρου (ή αποδιαμορφωτή συσχέτισης) διατηρεί όλη την πληροφορία που σχετίζεται με την ανίχνευση των $x_{m,i}$.
- Για την ολοκληρωμένη απόδειξη με χρήση του ότι το $n'(t)$ είναι irrelevant βλ. Cioffi Ch. 1.

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι

- Είδαμε ότι, για το Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι,

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}}.$$

- Επομένως, ο κανόνας ανίχνευσης MAP για το Γκαουσιανό κανάλι μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_i)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq p_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}_j)p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sigma^N} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) \geq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}_j\|^2}{2\sigma^2}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j) \quad \forall j \neq i$$

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$

Ανίχνευση MAP/ML στο Γκαουσιανό διανυσματικό κανάλι (2)

Κανόνας MAP για το διανυσματικό κανάλι AWGN

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν}$$

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)\} \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 - 2\sigma^2 \ln\{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_j)\} \quad \forall j \neq i$$

Κανόνας ML για το διανυσματικό κανάλι AWGN (γιατί:)

$$\hat{m} = m_i \text{ εάν } \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_i\|^2 \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|^2 \quad \forall j \neq i$$

- Άρα, ο ανιχνευτής ML επιλέγει το δiάνυσμα \mathbf{x}_i με τη μικρότερη Ευκλείδεια απόσταση από το δiάνυσμα \mathbf{y} στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο ανιχνευτής MAP χρησιμοποιεί την απόσταση σε συνδυασμό με μια σταθερά που εξαρτάται από την κατανομή των \mathbf{x}_i .