

ΕΕ725

Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

2η διάλεξη

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πάτρας

26 Φεβρουαρίου 2010

Ψηφιακή Μετάδοση



Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- 1 Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα
 - Ο χώρος \mathcal{L}_2 , Ευκλείδειο μέτρο και εσωτερικό γινόμενο
 - Αναπαράσταση σημάτων με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων
 - Προβολή σε υπόχωρο και διαδικασία Gram-Schmidt

- 2 Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση
 - Διαμόρφωση και Αστερισμοί

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cioffi: 1.1
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 2.6, 3.2

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Είναι δυνατόν να αναπαραστήσουμε τις κυματομορφές ως διανύσματα (vectors), να ορίσουμε, δηλαδή, διανυσματικό χώρο (vector space) σημάτων.
- Η αναπαράσταση ως διανύσματα πολλές φορές απλοποιεί το σχεδιασμό και διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Προτάθηκε αρχικά από τους Wozencraft και Jacobs.
- Στα επόμενα παρατίθεται η αντιστοιχία μεταξύ της αναπαράστασης σημάτων ως κυματομορφές και της αναπαράστασής τους ως διανύσματα.

Χώρος Σημάτων

- Ένας γραμμικός ή διανυσματικός χώρος \mathcal{V} αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{x}\}$ και από δύο πράξεις: πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με σταθερά.

Διακριτά σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x[k], k \in \mathcal{S}$

(ενδεχομένως το \mathcal{S} να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους).

Συνεχή σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x(t), t \in \mathcal{S}$

(ενδεχομένως το \mathcal{S} να περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς).

- Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σήματα έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} |y[k]|^2 < \infty, \quad \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

- Ο χώρος σημάτων με πεπερασμένη ενέργεια συνήθως συμβολίζεται ως \mathcal{L}_2 .
- Τα σήματα ενδέχεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές, δηλαδή $x[k] \in \mathbb{C}$ ($x(t) \in \mathbb{C}$).

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- Πρόσθεση (υπέρθθεση σημάτων): $\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow x[k] + y[k] \forall k \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \leftrightarrow x(t) + y(t) \forall t \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Επίσης, ισχύει η αντιμεταθετική (commutative) και η προσεταιριστική (associative) ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $\mathbf{0}$ (μηδενικό σήμα), καθώς και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης $-\mathbf{x}$ (αντίθετο σήμα).
- Πολλαπλασιασμός με (μιγαδική) σταθερά (ενίσχυση-απόσβεση-περιστροφή): $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x[k] \forall k \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x(t) \forall t \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ($x[k] = 1 \forall k \in \mathcal{S}$, $x(t) = 1 \forall t \in \mathcal{S}$). Τέλος, ισχύει η επιμεριστική (distributive) ιδιότητα: $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$, $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.

Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο (inner product) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ στο N -διάστατο Ευκλείδειο χώρο ορίζεται ως $\sum_{k=1}^N x_k y_k^*$ (υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά).
- Για το χώρο σημάτων, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:
 - Διακριτά σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} x[k] y[k]^* = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$.
 - Συνεχή σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$ (εάν ορίζεται).
- Ορίζουμε, επομένως, ένας διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο.
- Υπό την αυστηρή έννοια, δεν μπορούμε να ορίσουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο βάσει του \mathcal{L}_2 και πρέπει να ορίσουμε έναν άλλο χώρο, τον L_2 . Για τους δικούς μας σκοπούς, αρκεί να θεωρήσουμε τον \mathcal{L}_2 με εσωτερικό γινόμενο.
- Το εσωτερικό γινόμενο σημάτων $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ είναι μιγαδικός αριθμός.

Γενικός ορισμός εσωτερικού γινομένου

- Αναφέρουμε (ενημερωτικά) το γενικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου για διανυσματικούς χώρους επί του πεδίου \mathbb{C} , παρόλο που δε θα μας χρειαστεί στο μάθημα

Ορισμός Το εσωτερικό γινόμενο (inner product) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ενός διανυσματικού χώρου στο \mathbb{C} είναι μια πράξη που αντιστοιχίζει δύο διανύσματα, \mathbf{u} , \mathbf{v} του χώρου σε μια βαθμωτή ποσότητα του \mathbb{C} η οποία (πράξη) έχει τις εξής 4 ιδιότητες

- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.
 - $\langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\alpha \in F$.
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$.
 - $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, με $=$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο του χώρου θετικώς ημιορισμένων συμμετρικών μητρών (Positive Semi-Definite symmetric matrices) ορίζεται ως το ίχνος του γινομένου τους: $\langle U, V \rangle = \text{tr}(UV^*)$.

Ευκλείδειο μέτρο σήματος

- Το Ευκλείδειο μέτρο (Euclidean norm or norm-2), $\|\mathbf{x}\|_2$, ενός σήματος μπορεί να οριστεί ως:

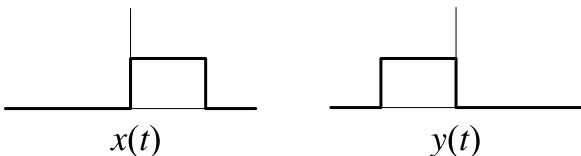
$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} |x[k]|^2,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau.$$

Το Ευκλείδειο μέτρο (μήκος) ενός σήματος ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειάς του (λογικό). Υπενθυμίζεται ότι έχει υποθεθεί πεπερασμένη ενέργεια (όχι σήμα ισχύος).

Ορθογώνια διανύσματα

- Επομένως, μπορούμε να φανταστούμε τα σήματα ως διανύσματα με μήκος, κατεύθυνση στο χώρο, "γωνία" μεταξύ τους (αν και το εσωτερικό γινόμενο σημάτων είναι μιγαδικό) κλπ.
- Δύο σήματα είναι ορθογώνια (orthogonal) όταν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Για παράδειγμα, στο σχήμα, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau)^* d\tau = 0$.



- Ένα σύνολο N διανυσμάτων/σημάτων είναι ορθοκανονικά (orthonormal) όταν είναι ορθογώνια μεταξύ τους και το (Ευκλείδειο) μέτρο του καθενός ισούται με 1.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

- Ένα σύνολο N διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (linearly independent) εάν κανένα διάνυσμα δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- Ισοδύναμα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, N$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εάν

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i.$$

- Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικώς εξαρτημένο με οποιοδήποτε διάνυσμα.

Θεώρημα Ορθοκανονικά διανύσματα είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Τριγωνική Ανισότητα

- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει (προφανώς) για τα σήματα, όπως και για τα διανύσματα του \mathbb{R}^n :

$$|x[k] + y[k]|^2 \leq |x[k]|^2 + |y[k]|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2.$$

- Γενικά, όπως και στον \mathbb{R}^n ,

$$|\|\mathbf{x}\|_2 - \|\mathbf{y}\|_2| \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2 + \|\mathbf{y}\|_2.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

- Έστω δύο διανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y} με $\|\mathbf{x}\|_2 < \infty$ και $\|\mathbf{y}\|_2 < \infty$.
- Ανισότητα Cauchy-Schwartz:
Το εσωτερικό γινόμενο των \mathbf{x} και \mathbf{y} ορίζεται και
 $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$.
- Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{x} = k \cdot \mathbf{y}$ ($k \in \mathbb{C}$ σταθερά) ή όταν το \mathbf{x} ή το \mathbf{y} ισούνται με $\mathbf{0}$ – θα μας χρειαστεί αργότερα.
- Για παράδειγμα, για συνεχή σήματα,

$$\left| \int_S x(\tau) y^*(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_S |x(\tau)|^2 d\tau \int_S |y(\tau)|^2 d\tau.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz για τ.μ.

- Έστω τ.μ. X και Y με πεπερασμένη διασπορά.

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]},$$

με = εάν και μόνο εάν $\Pr\{\alpha X = \beta Y\} = 1$ για κάποια α και $\beta \in \mathbb{R}$
με τουλάχιστον ένα από αυτά $\neq 0$.

Πόρισμα Ανισότητα συνδιασποράς:

$$|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{Var}[X]} \sqrt{\text{Var}[Y]}.$$

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων

- Έστω ένα διάνυσμα N διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^N και N ορθοκανονικά διανύσματα \mathbf{e}_i (επίσης στον \mathbb{R}^N , για παράδειγμα, αλλά όχι απαραίτητα, $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ με 1 στη θέση i). Κάθε διάνυσμα, \mathbf{x} , του N -διάστατου χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των \mathbf{e}_i τα οποία αποτελούν μια βάση του χώρου:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k.$$

- Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση (ένα σήμα) με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (2)

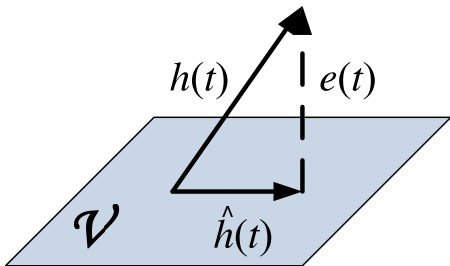
- Έστω N ορθοκανονικές συναρτήσεις $f_i(t)$:

$$\int_S f_i(\tau) f_j^*(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις αυτές εκτείνουν (span) ένα χώρο συναρτήσεων \mathcal{V} διάστασης N (είναι οι συναρτήσεις βάσης του χώρου). Ο \mathcal{V} είναι υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου (ο οποίος έχει άπειρη διάσταση).
- Εάν $g(x) \in \mathcal{V}$, $g(x) = \sum_{k=1}^N g_k f_k(x) \leftrightarrow \mathbf{g} = \sum_{k=1}^N g_k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$, όπου $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle = \int_S g(\tau) f_k^*(\tau) d\tau$.
- Παραδείγματα:
 - Σειρές Fourier. Συναρτήσεις βάσης: $e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = e^{j2\pi k f_c t}$.
 - Διαμόρφωση FSK. Συναρτήσεις βάσης: $\cos(2\pi k f_c t)$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (3)

- Έστω μια συνάρτηση $h(t)$ η οποία ενδέχεται να μην ανήκει στον υπόχωρο \mathcal{V} . Εάν $\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^N h_k f_k(t)$ (και, άρα, $\hat{h}(t) \in \mathcal{V}$) πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές h_k ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετράγωνο του μέτρου της διαφοράς $e(t) = h(t) - \hat{h}(t)$;



Θεώρημα προβολής

- Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά αυτό που περιμένουμε διαισθητικά από το σχήμα, ότι, δηλαδή, η συνάρτηση $\hat{h}(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα ισούται με την προβολή της $h(t)$ στον υπόχωρο \mathcal{V} : $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^N \langle \mathbf{h}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$.

Θεώρημα Προβολής: Έστω ένας υπόχωρος \mathcal{V} και ένα διάνυσμα \mathbf{x} του χώρου. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0$$

για οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{y} του \mathcal{V} . Το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ ονομάζεται προβολή του \mathbf{x} στον \mathcal{V} .

Θεώρημα προβολής (συνέχεια)

- Διαισθητικά, εάν το διάνυσμα $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ δεν ήταν κάθετο στο \mathcal{V} θα μπορούσαμε να προβάλουμε ένα μέρος του στο \mathcal{V} με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ να προσεγγίσει ακόμα καλύτερα το διάνυσμα \mathbf{x} . Το \mathbf{e} περιέχει μόνο την ποσότητα πληροφορίας του \mathbf{x} η οποία βρίσκεται στο συμπλήρωμα (ορθογώνιο υπόχωρο), \mathcal{V}^{\perp} , του \mathcal{V} .

Διαδικασία Gram-Schmidt

- Η διαδικασία Gram-Schmidt είναι μια μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών διανυσμάτων.
- Έστω N διανύσματα \mathbf{v}_i (όχι κατ' ανάγκη γραμμικώς ανεξάρτητα)

- $$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}.$$

- $$\mathbf{u}'_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1. \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2}{\|\mathbf{u}'_2\|}.$$

- $$\mathbf{u}'_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2. \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}'_3}{\|\mathbf{u}'_3\|}.$$

- Κ.Ο.Κ.

Διαδικασία Gram-Schmidt (2)

- Σε κάθε βήμα προβάλλουμε το διάνυσμα \mathbf{v}_i στον υπόχωρο που δημιουργούν τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$, κρατάμε το υπόλοιπο που δεν ανήκει στον υπόχωρο και κανονικοποιούμε το μέτρο του στο 1. Το \mathbf{u}_i περιέχει μόνο πληροφορία η οποία δεν περιέχεται στα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. Επαγωγικά, η πληροφορία που περιέχει το \mathbf{u}_i δεν περιέχεται σε επόμενα διανύσματα \mathbf{u}_k . Άρα, τα \mathbf{u}_i είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα \mathbf{v}_i είναι αυθαίρετη. Τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν ενδέχεται να είναι διαφορετικά, αλλά ο αριθμός τους είναι ο ίδιος και ίσος με τη διάσταση του υποχώρου (η οποία ενδέχεται να είναι $< N$).
- Εάν η διάσταση του υποχώρου είναι $< N$, κάποια από τα \mathbf{u}_i θα είναι μηδενικά (όλη η πληροφορία του \mathbf{v}_i περιέχεται σε προηγούμενα διανύσματα).

Παραγοντοποίηση QR

- Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα \mathbf{v}_i είναι συνάρτηση μόνο των $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i\}$.
 - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 \|\mathbf{v}_1\|$
 - $\mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \|\mathbf{u}'_2\| \mathbf{u}_2$
 - κ.ο.κ.

Μπορούμε, επομένως να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_Q \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,N} \\ 0 & r_{2,2} & \dots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{M,N} \end{bmatrix}}_R$$

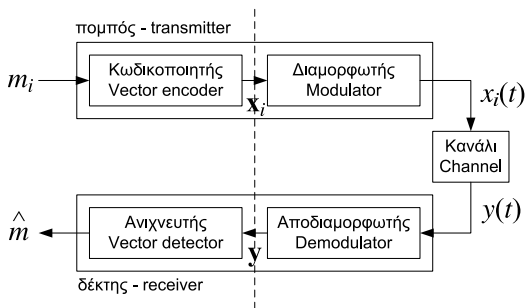
- Ο πίνακας R είναι κλιμακωτός άνω τριγωνικός (κλιμακωτός όταν κάποια από τα διανύσματα \mathbf{v}_i είναι εξαρτημένα ($M < N$)). Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
- Η παραγοντοποίηση QR χρησιμοποιείται συχνά για αποδείξεις και για απλοποίηση εκφράσεων και υλοποιήσεων.

Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση

- 1 Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα
 - Ο χώρος \mathcal{L}_2 , Ευκλείδειο μέτρο και εσωτερικό γινόμενο
 - Αναπαράσταση σημάτων με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων
 - Προβολή σε υπόχωρο και διαδικασία Gram-Schmidt

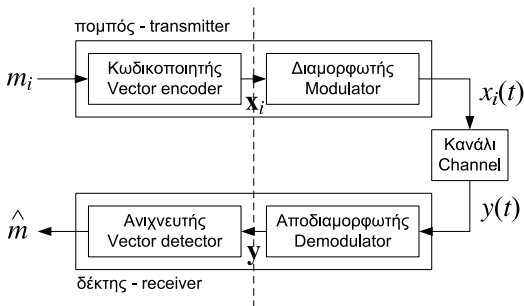
- 2 Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση
 - Διαμόρφωση και Αστερισμοί

Ψηφιακή Μετάδοση



- m_i : Ένα από M πιθανά μηνύματα. Αντιστοιχίζεται από τον κωδικοποιητή σε ένα διάνυσμα (σύμβολο) \mathbf{x}_i . Ο διαμορφωτής επιλέγει μια αναλογική κυματομορφή $x_i(t)$ με βάση την έξοδο του κωδικοποιητή. Στο δέκτη η ληφθείσα κυματομορφή αποδιαμορφώνεται στο διάνυσμα \mathbf{y} . Ο ανιχνευτής αποφασίζει ποιο μήνυμα μεταδόθηκε με βάση το \mathbf{y} και, στη γενική περίπτωση, πληροφορία από προηγούμενες λήψεις.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)



- Εάν δουλέψουμε με διανύσματα, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση από την κωδικοποίηση/ανίχνευση \rightarrow πλεονέκτημα αναπαράστασης με διανύσματα.
- Έστω ότι ο πομπός στέλνει ένα μήνυμα ανά T s (symbol period). Ο ρυθμός μετάδοσης (data rate) ισούται με $R = \frac{\log_2 M}{T}$ bits/s.

Σχετικά με το διαχωρισμό κωδικοποίησης-διαμόρφωσης και αποκωδικοποίησης-αποδιαμόρφωσης

- Όπως θα δούμε, ο διαχωρισμός κωδικοποίησης-διαμόρφωσης και αποκωδικοποίησης-αποδιαμόρφωσης μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε την ανάλυση και, επίσης, να εξαγάγουμε γενικευμένα συμπεράσματα και αλγόριθμους.
- Αποδεικνύεται, μάλιστα, ότι, στη γενική περίπτωση, ο διαχωρισμός αυτός δεν επηρεάζει το σωστό σχεδιασμό του συστήματος. Δηλαδή, γενικά, οι μέθοδοι σχεδιασμού του ζεύγους κωδικοποιητή/αποκωδικοποιητή δεν εξαρτώνται από τη διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση. Αντιστρόφως, οι αρχές σχεδίασης του ζεύγους διαμορφωτή/αποδιαμορφωτή δεν αλλάζουν όταν μεταβάλλουμε τον αλγόριθμο κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.
- Φυσικά, ανάλογα με τον κωδικοποιητή/αποκωδικοποιητή πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες παραμέτρους στο διαμορφωτή/αποδιαμορφωτή (και αντιστρόφως).

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης

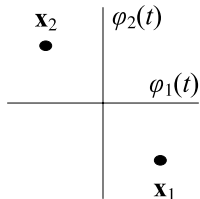
- Έστω το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f(t)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau < \infty$. Ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο στον οποίο ανήκουν οι $f(t)$ ονομάζεται $\mathcal{L}_2[0, T]$ και έχει άπειρη διάσταση.
- Σημείωση: Όπως προαναφέρθηκε, ο \mathcal{L}_2 δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο υπό την αυστηρή έννοια. Αλλά, για τους σκοπούς του μαθήματος θα υποθέσουμε ότι είναι.
- Μια συνάρτηση $x(t)$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα συναρτήσεων βάσης: $x(t) = \sum_{n=1}^N x_n \phi_n(t)$. Στη γενική περίπτωση το N ισούται με ∞ . Τα παραπάνω ισχύουν και όταν τα όρια του διαστήματος τείνουν στο ∞ (ή $-\infty$).

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης (2)

- Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε M συναρτήσεις $x(t)$ για τη διαμόρφωση, οι οποίες ανήκουν σε έναν υπόχωρο \mathcal{V} του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N ($\leq M$ - γιατί;). Επομένως, κάθε συνάρτηση $x_m(t)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\sum_{n=1}^N x_{m,n} \phi_n(t)$, όπου $\phi_n(t)$ οι συναρτήσεις βάσης του \mathcal{V} . Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $x_m(t) \leftrightarrow \mathbf{x}_m = [x_{m,1} \ x_{m,2} \ \dots \ x_{m,N}]^T$.
- Τα σύμβολα \mathbf{x}_m , $m = 1, 2, \dots, M$ αποτελούν έναν αστερισμό (constellation). Με χρήση διανυσμάτων μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν αστερισμό στον Ευκλείδειο χώρο (παρόλο που στην πραγματικότητα ο αστερισμός είναι ένα σύνολο συνεχών κυματομορφών).

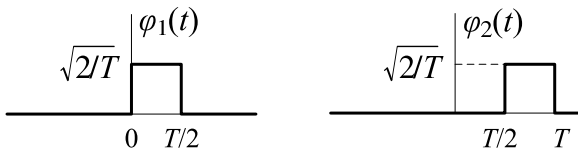
Παράδειγμα Αστερισμού: Μετάδοση BPSK

- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ και $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$ εκτός του διαστήματος.
 - Οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και το μέτρο τους ισούται με 1 \rightarrow ορθοκανονική βάση υπόχωρου διάστασης $N = 2$.
 - Χρησιμοποιούμε δύο σύμβολα: $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
 (Υπενθύμιση: $\cos(A) - \cos(B) = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$).
 - Επομένως, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.



Παράδειγμα Αστερισμού: Διαμόρφωση Manchester

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί διαμόρφωση Manchester.



- Υποθέτουμε και πάλι ότι χρησιμοποιούμε $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$. Άρα, και σε αυτήν την περίπτωση, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.
- Παρόλο που οι κυματομορφές είναι διαφορετικές, η αναπαράστασή τους στον Ευκλείδειο χώρο είναι η ίδια!
- Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τόσο στην περίπτωση BPSK όσο και στη Manchester με χρήση μίας μόνο συνάρτησης βάσης (πώς;)