EE725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πάτρας

18 Φεβρουαρίου 2010

Γενικές Πληροφορίες

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. `dtouba@upatras.gr`.
- Σκοπός του μαθήματος:
  - Να εμβαθύνει σε κάποια θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
  - Να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόηση της Ψηφιακής Μετάδοσης.
  - Να βοηθήσει την έρευνά σας.
- Θέματα προς συζήτηση
  - Καθορισμός ωρών γραφείου κατά τις οποίες θα δίνεται προτεραιότητα σε όσους έχουν δηλώσει το μάθημα.
  - Καθορισμός τρόπου εξέτασης / αξιολόγησης.
  - Καθορισμός ώρας μαθήματος.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα

- Θα χρησιμοποιηθούν διαφάνειες. *Δε θα δοθεί βιβλίο.* Εάν ζητηθεί, θα υποδειχθούν κεφάλαια από Ελληνόγλωσσα βιβλία.
- Τα παρακάτω βιβλία/συγγράμματα καλύπτουν θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών. Θα είναι διαθέσιμα από το διδάσκοντα για δανεισμό για λίγες ώρες.
  - J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, Digital Communication, 3rd ed.
    Καλό βιβλίο, περισσότερο από την πλευρά της Επεξεργασίας Σήματος. Περιέχει και εισαγωγικά κεφάλαια. Η 3η έκδοση καλύπτει και συστήματα MIMO.
  - J. G. Proakis & M. Salehi, Digital Communications, 5th ed.
    Κλασσικό βιβλίο Ψηφιακών Επικοινωνιών. Γενικά υπεισέρχεται σε περισσότερες λεπτομέρειες από τους Lee & Messerschmitt.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (2)

- John M. Cioffi, Digital Communication, Class Reader, `http://www.stanford.edu/group/cioffi/`. Καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων. Προϋποθέτει καλή γνώση πιθανοτήτων, σημάτων και συστημάτων και στοχαστικών ανελίξεων. Εκτενής αναφορά σε συστήματα DMT, στη γενικευμένη θεωρία ισοσταθμιστών (GDFE) και σε συστήματα πολλών χρηστών (multiuser).
- R. G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication. Κλασικό βιβλίο Θεωρίας Πληροφορίας. Το 8ο κεφάλαιο περιέχει εκτενή ανάλυση της μετάδοσης σε συνεχή κανάλια πεπερασμένου εύρους ζώνης.
- S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume 1, Estimation Theory.
  Επικεντρώνεται στη Θεωρία Εκτίμησης.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (3)

- A. Lapidoth, A Foundation in Digital Communication.
  Καινούργιο βιβλίο. Δίνει μεγάλη σημασία στη μαθηματική αυστηρότητα και στη γεωμετρική θεώρηση των Ψηφιακών Επικοινωνιών.
- D. Tse and P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communications.
  Πολύ καλογραμμένο βιβλίο με σύγχρονα θέματα. Δεν καλύπτει λεπτομέρειες σχεδίασης συστημάτων. Αναλύει τα Ασύρματα Συστήματα από τη σκοπιά της Επεξεργασίας Σήματος και της Θεωρίας Πληροφορίας.

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα (4)

- A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd ed.
  Κλασικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων. Πολύ χρήσιμο ως αναφορά.
- A. Leon-Garcia, Probability and Random Processes for Electrical Engineering, 2nd ed.
  Όπως φανερώνει και ο τίτλος του, είναι προσαρμοσμένο στις ανάγκες του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

Ύλη Μαθήματος

- Η ακριβής ύλη θα καθοριστεί ύστερα από συζήτηση στο πρώτο μάθημα.
- Πιθανά θέματα που μπορούν να συμπεριληφθούν στην ύλη
  - Επανάληψη βασικών αρχών Ψηφιακής Μετάδοσης: Διανυσματική Αναπαράσταση Κυματομορφών, Κανάλι Γκαουσιανού Θορύβου, Βέλτιστη Ανίχνευση, Πιθανότητα Σφάλματος, Είδη Αστερισμών και Διαμόρφωσης, Ανάλυση βαθυπερατών συστημάτων.
  - Ανάλυση ζωνοπερατών Ψηφιακών Συστημάτων.
  - Διασυμβολική Παρεμβολή (ISI), Κριτήριο Nyquist, Ισοστάθμιση (Linear/DFE, ZF/MMSE), Προκωδικοποιητής Tomlinson.
  - Στοχαστικές Ανελίξεις. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες και Είδη Θορύβου.
  - Συγχρονισμός συστημάτων. Εκτίμηση καναλιού.
  - Συστήματα DMT/OFDM.
  - Ασύρματα συστήματα. Χωρητικότητα καναλιών και τρόποι μετάδοσης. Συστήματα MIMO.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

1. Ψηφιακή Μετάδοση
2. Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων
   - Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων
   - Στοχαστικές Ανελίξεις
   - Συστήματα

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cioffi: –
- Lee & Messerschmitt (3rd ed): Κεφ. 1, 2.1 – 2.3, 2-A, 3.1, 3.2
- Proakis 4th edition: Κεφ. 1, 2

Ψηφιακή Μετάδοση

- Σκοπός της Ψηφιακής Μετάδοσης είναι να στείλει μηνύματα από τον πομπό στο δέκτη δια μεσου του καναλιού.
  - Τα μηνύματα που στέλνονται ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο.
  - Η αποστολή των μηνυμάτων γίνεται με τη χρήση σημάτων (κυματομορφών).
  - Επομένως, σε επίπεδο φυσικού καναλιού, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι αναλογική.
  - Επίσης, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, στην ουσία, μετάδοση διακριτών μηνυμάτων. Εάν τα μηνύματα προέρχονται από ψηφία δια μέσου κάποιας απεικόνισης ή εάν τα αναπαραστήσουμε με ψηφία μπορούμε, ισοδύναμα, να θεωρήσουμε ότι στέλνουμε ομάδες ψηφίων.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)

- Η μετάδοση είναι επιτυχής όταν ο δέκτης ανιχνεύσει το ίδιο μήνυμα με αυτό που έστειλε ο πομπός.
- Στην πράξη, η μετάδοση αποτυγχάνει με κάποια πιθανότητα σφάλματος P_e λόγω
  - Θορύβου/μεταβολών του καναλιού/παραμόρφωσης, θορύβου στο δέκτη
  - Ανεπαρκούς γνώσης του καναλιού
  - Μη βέλτιστης σχεδίασης του συστήματος ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα και, επομένως, το κόστος ή/και η κατανάλωση ισχύος.
- Ακόμα και αν η σχεδίαση είναι η βέλτιστη υπάρχει κάποιο όριο στο ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δια μέσου του καναλιού. Τα όρια στη μετάδοση μελετώνται από τη Θεωρία Πληροφορίας.

Ψηφιακή Μετάδοση (3)

- Αρχικά, η πληροφορία που θέλουμε να στείλουμε στο δέκτη μετατρέπεται σε κάποιο από τα μηνύματα με χρήση κωδικοποιητή.
- Στη συνέχεια, τα μηνύματα μετατρέπονται σε (αναλογικές) κυματομορφές/ηλεκτρικά σήματα με τη χρήση διαμορφωτή και στέλνονται στο κανάλι για μετάδοση.
- Το κανάλι παραμορφώνει τις μεταδιδόμενες κυματομορφές τόσο με γνωστό τρόπο (π.χ. απόσβεση, διασπορά) όσο και με τυχαίο (θόρυβος, διαλείψεις (fading)).
- Στο δέκτη το σήμα αποδιαμορφώνεται, γίνεται ανίχνευση του μηνύματος που μεταδόθηκε και, στη συνέχεια, αποκωδικοποίηση.

Ψηφιακή Μετάδοση (4)

- Τα μηνύματα που στέλνει ο πομπός είναι <u>τυχαία</u> από τη σκοπιά του δέκτη (αλλιώς δε θα είχε νόημα η μετάδοση).
- Ο θόρυβος του καναλιού είναι ένα <u>άγνωστο</u> και, συνήθως, τυχαίο σήμα.
- Ακόμα και η παραμόρφωση καναλιού μπορεί να είναι τυχαία (για παράδειγμα, στα ασύρματα κανάλια που παρουσιάζουν διαλείψεις και πολλαπλή όδευση – multipath).
- Επομένως, τόσο τα μεταδιδόμενα όσο και τα λαμβανόμενα σήματα και μηνύματα είναι <u>στοχαστικά</u>.

Ψηφιακή Μετάδοση (5)

- Παρόλο που δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή των σημάτων, γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές τους. Βασιζόμενοι σε αυτές μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τις τιμές τους. Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων και των λαμβανόμενων σημάτων και, φυσικά, από τους αλγορίθμους ανίχνευσης που χρησιμοποιεί ο δέκτης.
- Η κατανομή των λαμβανόμενων σημάτων εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων σημάτων και από τον τρόπο που επιδρά σε αυτά το κανάλι.

Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων

1. Ψηφιακή Μετάδοση
2. Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων
   - Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων
   - Στοχαστικές Ανελίξεις
   - Συστήματα

Διευκρίνιση

Η επισκόπηση των εννοιών Θεωρίας Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Ανελίξεων και Σημάτων και Συστημάτων στις επόμενες διαφάνειες γίνεται εν είδει επανάληψης. Για το λόγο αυτό δίνεται προτεραιότητα στη σημασία και στην εφαρμογή των εννοιών στις Ψηφιακές Επικοινωνίες σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας και πληρότητας. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να ελέγχουμε εάν ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες και υποθέσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε κάποιο μαθηματικό εργαλείο για τους σκοπούς των Ψηφιακών Επικοινωνιών.

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.): Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω. Οι τιμές της μπορεί να είναι πραγματικές ή μιγαδικές, συνεχείς ή διακριτές.
    - Παράδειγμα 1.1: $A =$ Αποτέλεσμα του αγώνα Ολυμπιακός - Παναθηναϊκός. $\Omega = \{1, 2, X\}$.
    - Παράδειγμα 1.2: $B =$ Θερμοκρασία στην Πάτρα. $\Omega =?$
- Οι διακριτές τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) $p_X(x) = \Pr\{X = x\}$ (probability mass function - pmf). $\sum_{a\in\Omega} p_X(a) = 1$.
$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \sum_{a:a\leq x} p_X(a)$. Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (cumulative distribution function -- cdf).
    - Παράδειγμα 1.3 (ΟΣΦΠ-ΠΑΟ): $p_A(a = 1) = 1$, $p_A(a = X) = p_A(a = 2) = 0$.

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων (συνέχεια)

- Οι συνεχείς τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) (probability density function - pdf) $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$. $\int_\Omega f_X(x)dx = 1$.
  $\Pr\{X \in \mathcal{S}\} = \int_\mathcal{S} f_X(x)dx$.
- $f_X(x) \geq 0$, αλλά όχι, απαραίτητα, ≤ 1.
- Εναλλακτικά, αντί για pmf, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει pdf με συναρτήσεις Dirac $f_X(x) = \sum_{a\in\Omega} p_x(a)\delta(x-a)$.

Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

- Συνεχής κατανομή. Θα τη χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στα επόμενα. Η χρήση της δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem): Το άθροισμα N ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά τείνει στην γκαουσιανή κατανομή για $N \to \infty$ ανεξάρτητα από την κατανομή τους.
- Μοντελοποιεί πολύ καλά το θερμικό θόρυβο στα ηλεκτρονικά κυκλώματα (περισσότερα σύντομα).

Η συνάρτηση Q

- $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.
- Εάν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Δηλαδή, η $Q()$ δίνει το εμβαδόν της "ουράς" της Γκαουσιανής καμπύλης.
- Η συνάρτηση $Q()$ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Για μεγάλες τιμές του x προσεγγίζεται πολύ καλά από την $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- Χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος στα Ψηφιακά Συστήματα.

Σημαντικές Ποσότητες

- Μέση τιμή τ.μ. (mean value or expectation)
  $\mathbb{E}_p[X] = \sum_{x\in\Omega} x p_X(x)$ για διακριτές τ.μ.,
  $\mathbb{E}_f[X] = \int_\Omega x f_X(x) dx$ για συνεχείς.
- Μέση τιμή συνάρτησης $g(\cdot)$ τ.μ.
  $\mathbb{E}_f[g(X)] = \int_\Omega g(x) f_X(x) dx.$
  Αντίστοιχα για διακριτές τ.μ.
- Διασπορά τ.μ. (variance)
  $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$
  Για μιγαδικές τ.μ. $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[|(X - \mathbb{E}[X])|^2] = \mathbb{E}[XX^*] - (\mathbb{E}[X])(\mathbb{E}[X])^*.$
- Χαρακτηριστική Σύνάρτηση (Characteristic Function)
  $\Phi_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx.$

Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (joint cdf) δύο (συνεχών) τ.μ.
$F_{X,Y}(x,y) = \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(a,b) da db.$
- $f_{X,Y}(x,y)$: Από κοινού σ.π.π. (joint pdf).
- Περιθώρια σ.π.π. (marginal pdf) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy.$
- Δύο τ.μ. είναι (στατιστικώς) ανεξάρτητες όταν για οποιαδήποτε διαστήματα I και J, $\Pr\{X \in I \cap Y \in J\} = \Pr\{X \in I\} \Pr\{Y \in J\}$. Ισοδύναμα, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ ή $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$ ή $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ (ασυσχέτιστες).
- Ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι απαραίτητα και ανεξάρτητες. Ωστόσο, εάν οι τ.μ. είναι γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.

Από κοινού Γκαουσιανή Κατανομή

- Δύο (πραγματικών) μεταβλητών, $\mu = 0$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right],$$

όπου $\rho = \frac{\mathbb{E}[XY]}{\sigma^2}$ ο συντελεστής συσχέτισης.

- Γενική μορφή για M (πραγματικές) μεταβλητές

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{K}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})\right],$$

όπου $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T]$ ο πίνακας συνδιασποράς (covariance matrix) και $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = \mathbb{E}[\mathbf{X}]$.

- Οι περιθώριες σ.π.π. είναι και αυτές γκαουσιανές.
- Από γραμμικό μετασχηματισμό από κοινού γκαουσιανών τ.μ. προκύπτουν από κοινού γκαουσιανές τ.μ.

Δεσμευμένες Πιθανότητες και Κανόνας του Bayes

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ για τις τιμές του y όπου $f_Y(y) \neq 0$.
- Θεώρημα ολικής πιθανότητας:
  $p(y) = \sum_{x \in \Omega_x} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x \in \Omega_x} p_X(x) p_{Y|X}(y|x)$.
- Κανόνας Bayes: $f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$.
- Θεώρημα Bayes: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{\Omega_x} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}$.
- Για διακριτές τ.μ.: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}{\sum_{\Omega_x} p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}$.

Στοχαστικές Ανελίξεις (Random Processes)

- Υπενθυμίζεται ότι ένας χώρος πιθανότητας (probability space) είναι μια τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου Ω είναι το σύνολο των αποτελεσμάτων των πειραμάτων, $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο των ενδεχομένων και P είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει πιθανότητες σε ενδεχόμενα.
- Μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια απεικόνιση από το σύνολο Ω στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός Μια στοχαστική ανέλιξη/στοχαστική διαδικασία/τυχαία διαδικασία/τυχαία συνάρτηση (random process/stochastic process/random function) συνεχούς χρόνου $(X(t),\ t \in \mathcal{T})$ είναι μια οικογένεια τ.μ. με δείκτη t που ορίζονται σε κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Παρόλο που στις Ψηφιακές Επικοινωνίες ο δείκτης της στοχαστικής ανέλιξης είναι ο χρόνος, σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να είναι ο χώρος (π.χ. η θερμοκρασία κατά μήκος της Εθνικής Οδού σε μια δεδομένη χρονική στιγμή).

Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Μια στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου είναι μια απεικόνιση $\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
  - Σημείωση: Θα περιοριστούμε, αρχικά, σε *πραγματικές* στοχαστικές ανελίξεις. Θα μιλήσουμε για μιγαδικές στοχαστικές ανελίξεις σε επόμενα μαθήματα.
- Για δεδομένο ενδεχόμενο $\omega \in \Omega$, η $X(\omega, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι νομοτελειακή (deterministic) συνάρτηση του χρόνου t. Λέμε ότι η $X(\omega, t)$ είναι μία συνάρτηση-δείγμα (sample path/trajectory/sample function).
- Για δεδομένη χρονική στιγμή, t, η $X(\omega, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι (βαθμωτή) τ.μ.
- Επομένως, μπορούμε να δούμε μια στοχαστική ανέλιξη ως μια "τ.μ." της οποίας η τιμή αντί για μια βαθμωτή ποσότητα είναι μια κυματομορφή ή ως μια συνάρτηση η τιμή της οποίας σε κάθε χρονική στιγμή είναι τ.μ.

Στοχαστικές Ανελίξεις Διακριτού Χρόνου

- Στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Ένα σύνολο από ακολουθίες (δειγματικές συναρτήσεις διακριτού χρόνου), σε κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί μια μάζα πιθανότητας.
- Γενικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε τις στοχαστικές ανελίξεις διακριτού χρόνου ως ακολουθίες τ.μ., αλλά απαιτείται προσοχή από τη μαθηματική σκοπιά, ειδικά όταν δεν είναι εργοδικές.
- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια από τις 10 έως τις 11 π.μ. κάθε ημέρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).

Στοχαστικές Ανελίξεις (3)

- Παρόλο που οι στοχαστικές ανελίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.
- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα X_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_k\}$ να ισούνται με $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ισούται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τ.μ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανέλιξης: $m_k = \mathbb{E}[X_k]$, $m(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή, k!).
- Αυτοσυσχέτιση: $R_{XX}(k, l) = \mathbb{E}[X_k X_l]$, $R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$.

  - Παράδειγμα 1.4: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι ασυσχέτιστα.
  - Παράδειγμα 1.5: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

Στοχαστικές Ανελίξεις – Στασιμότητα

Ορισμός Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά την Αυστηρή Έννοια (Strict-Sense Stationary - SSS) όταν $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \ldots, x_{t_k+t})$. Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η SSS για στοχαστικές ανελίξεις διακριτού χρόνου).

Θεώρημα Μια στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου είναι SSS εάν και μόνο εάν, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, για όλα τα k και για οποιαδήποτε $n_1, \ldots, n_l$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$, οι τ.μ. $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_{n_j}$ και $\sum_{j=1}^{l} \alpha_j X_{n_j+k}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.

Στασιμότητα κατά την ευρεία έννοια

Ορισμός Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια (Wide-Sense Stationary - WSS) όταν

- Οποιοδήποτε δείγμα της στο χρόνο έχει πεπερασμένη διασπορά: $Var[X(t)] < \infty \; \forall t$.
- $m(t) = \mu$ (σταθερή) και
- $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).

Θεώρημα WSS $\Rightarrow Var[X(t)] = \sigma^2$ (σταθερή)

Θεώρημα SSS & $Var[X(t)] < \infty \; \forall t \;\; \Rightarrow$ WSS.

Θεώρημα WSS + γκαουσιανή $\Rightarrow$ SSS.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις – Αυτοδιασπορά

- Έστω πραγματική στοχαστική ανέλιξη WSS διακριτού χρόνου, $\{X_n\}$

Ορισμός Η Συνάρτηση Αυτοδιασποράς (Autocovariance function) $K_{XX} : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ στοχαστικής ανέλιξης WSS διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$K_{XX}(k) \triangleq Cov[X_{n+k}, X_n], \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

- Η $K_{XX}(k)$ δεν εξαρτάται από το n (λόγω στασιμότητας).
- Επίσης, $K_{XX}(k) = \mathbb{E}[X_{n+k}X_n] - \mu^2$.
- Παρόμοιοι ορισμοί και συμπεράσματα ισχύουν και για στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις – Αυτοδιασπορά (2)

Θεώρημα Η αυτοδιασπορά πραγματικής στοχαστικής ανέλιξης WSS διακριτού χρόνου είναι θετικώς ορισμένη συνάρτηση (positive definite function). Ως θετικώς ορισμένη συνάρτηση έχει τις εξής ιδιότητες:

- Συμμετρία: $K_{XX}(-k) = K_{XX}(k),\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l K_{XX}(k-l) \geq 0$.

Θεώρημα Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση $K : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τα παραπάνω, υπάρχει πραγματική στοχαστική ανέλιξη WSS διακριτού χρόνου η συνάρτηση αυτοδιασποράς της οποίας είναι η $K_{XX}(k)$.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις – Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

- Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;).
- Επομένως, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης.
- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα "απο-συσχετίζεται" ένα σήμα, σε αναλογία με το Φάσμα ενός νομοτελειακού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα.
- Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει τη μέση κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (2)

Ορισμός Έστω πραγματική στοχαστική ανέλιξη WSS διακριτού χρόνου. Η φασματική πυκνότητα ισχύος, $S_{XX}(\theta)$, εάν υπάρχει, είναι μια ολοκληρώσιμη απεικόνιση από το διάστημα $[-1/2, 1/2)$ στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$K_{XX}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(\theta) e^{-j2\pi k\theta} d\theta,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Θεώρημα Εάν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |K_{XX}(k)| < \infty$, η $S(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{XX}(k) e^{j2\pi k\theta}$, $\theta \in [-1/2, 1/2]$ είναι PSD της στοχαστικής ανέλιξης με αυτοδιασπορά $K_{XX}(k)$.

- Παρατηρήστε ότι $S_{XX}(\theta) \in \mathbb{R}$ (γιατί;).
- Όπως θα δούμε αργότερα, αυτό ισχύει και στην περίπτωση μιγαδικών στοχαστικών ανελίξεων.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Διευκρίνιση

Για την PSD χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό $K_{XX}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(\theta)e^{-j2\pi k\theta}d\theta,\ k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή η $S_{XX}(\theta)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $K_{XX}(k)$. Διαισθητικά, είναι πιο σωστό η $S_{XX}(\theta)$ να είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $K_{XX}(k)$ και πολλές φορές αυτός είναι ο τρόπος που ορίζεται η $S_{XX}(\theta)$. Ωστόσο, επειδή η $K_{XX}(k)$ είναι συμμετρική, ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ταυτίζονται.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (3)

- Ισχύς στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης:
  $Var[X] = Cov[X_n, X_n] = K_{XX}(0) = \mathbb{E}[|X_k|^2] - \mu^2$
  $\Rightarrow \mathbb{E}[|X_k|^2] = K_{XX}(0) + \mu^2$
  Ομοίως, για στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς χρόνου,
  $\mathbb{E}[|X(t)|^2] = K_{XX}(0) + \mu^2$.
- Με χρήση ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier,
  $K_{XX}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_{XX}(\theta)d\theta$, $K_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f)df$.

Θεώρημα Εάν η $S_{XX}(\theta)$ είναι PSD πραγματικής στοχαστικής ανέλιξης,

- $S_{XX}(\theta) \geq 0$ και
- $S_{XX}(\theta) = S_{XX}(-\theta)$.

Αντίστροφα, αν μια συνάρτηση $S : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, μη αρνητική και συμμετρική ως προς το 0, τότε υπάρχει πραγματική στοχαστική ανέλιξη WSS με PSD $S(\theta)$.

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (4)

- Η PSD δεν ορίζεται για οποιαδήποτε $K_{XX}(\theta)$.
- Γενικά, ο χαρακτηρισμός των $K_{XX}(k)$ για τις οποίες υπάρχει PSD δεν είναι εύκολος.
- Όπως είδαμε, μια αναγκαία συνθήκη (αλλά όχι ικανή) είναι να ισχύει $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |K_{XX}(k)| < \infty$.
- Στις περιπτώσεις που δεν υπάρχει PSD, η $K_{XX}(k)$ πρέπει να μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση τ.μ. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε π.χ. Lapidoth.
- Δε θα ασχοληθούμε με τις μαθηματικές λεπτομέρειες. Απλώς γίνεται μια απλή αναφορά για όσους ενδιαφέρονται.

Αυτοσυσχέτιση

- Σε αναλογία με την αυτοδιασπορά, η αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) πραγματικής WSS στοχαστικής ανέλιξης ορίζεται ως

$$R_{XX}(k) \triangleq \mathbb{E}[X_{n+k}X_n], \; k \in \mathbb{Z}.$$

- Συχνά, η PSD ορίζεται βάσει της $R_{XX}(k)$ αντί για την $S_{XX}(k)$.
- Στην πράξη, δεν έχει ιδιαίτερη σημασία ποια από τις δύο χρησιμοποιούμε, δεδομένου ότι, για WSS στοχαστικές ανελίξεις, $K_{XX}(k) = R_{XX}(k) - \mu^2$.

Ετεροσυσχέτιση, Από Κοινού Στασιμότητα

- Ετεροσυσχέτιση (cross-correlation): $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)Y^*(t_2)]$.
- Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι από κοινού στάσιμες κατά την ευρεία έννοια (jointly WSS) εάν
  - η καθεμία τους είναι WSS και
  - $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$

Γραμμικά, Χρονικώς Αμετάβλητα Συστήματα

- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου του στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i s(x_i)$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξάρτητα με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_i ($h(t)$).
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ ($H(s)$) και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(\theta)$ ($H(f)$).
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικώς Μεταβαλλόμενο σύστημα;

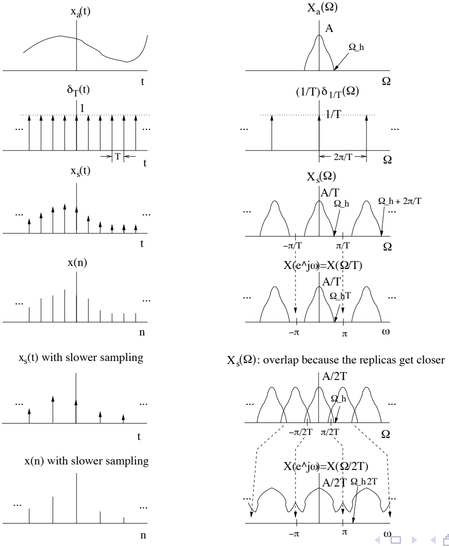
Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist

- Έστω συνεχές σήμα $x(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ το οποίο δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο δειγματοληψίας T.
- Ο μετασχηματισμός Fourier του διακριτού σήματος $x_k = x(kT)$ ισούται με

$$X(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\frac{\theta - k}{T}\right),$$

όπου $X_c(f)$ ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$.

Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (2)

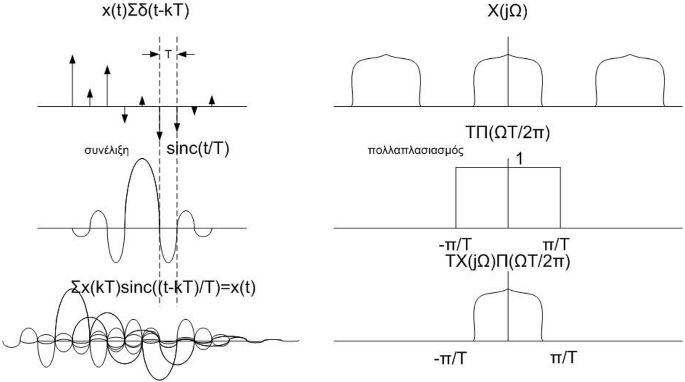


Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (3)

- Επομένως, η ανακατασκευή ενός συνεχούς σήματος από τα δείγματά του είναι πάντοτε δυνατή εφόσον η δειγματοληψία γίνει με ρυθμό τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης συχνότητας του σήματος.
- Ικανή, αλλά όχι αναγκαία συνθήκη (γιατί;)
- Ανακατασκευή σήματος. Με χρήση επίπεδου ιδανικού βαθυπερατού φίλτρου. Στο πεδίο του χρόνου:

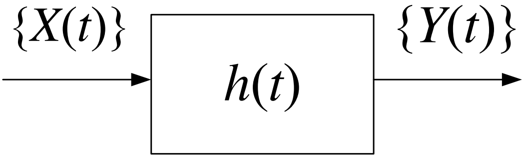
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\sin\left[\frac{\pi(t-kT)}{T}\right]}{\frac{\pi(t-kT)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \text{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right).$$

Θεώρημα Δειγματοληψίας Shannon/Nyquist (4)



- Το ιδανικό φίλτρο είναι υλοποιήσιμο; Η sinc;

Συστήματα και Στοχαστικές Ανελίξεις



- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ ($\{X_k\}$) η οποία διέρχεται από το LTI σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$. Μπορεί να αποδειχθεί (με πράξεις) ότι:
  - $m_Y = m_X H(0)$ ($m_Y = m_X H(z=1)$)
  - $R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) * R_{XX}(\tau)$ ($R_{YY}(k) = h_k * h^*_{-k} * R_{XX}(k)$)
  - $S_{YY}(f) = S_{XX}(f)|H(f)|^2$ ($S_{YY}(\theta) = S_{XX}(\theta)|H(\theta)|^2$)
  - $S_{YY}(s) = S_{XX}(s)H(s)H^*(-s^*)$ ($S_{YY}(z) = S_{XX}(z)H(z)H^*(1/z^*)$).

Στοχαστικές Ανελίξεις και Δειγματοληψία

- Έστω μια WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$ η οποία δειγματοληπτείται ομοιόμορφα με περίοδο T: $Y_k = X(kT)$.
  - $R_{YY}(k,l) = \mathbb{E}[X(kT)X(lT)^*] = R_{XX}((k-l)T)$.
    Άρα, η αυτοσυσχέτιση της ακολουθίας $\{Y_k\}$ προκύπτει από την αυτοσυσχέτιση της $\{X(t)\}$ με δειγματοληψία.
  - $S_{YY}(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_{XX}(\frac{\theta-k}{T})$,
    παρόμοια με την περίπτωση νομοτελειακών σημάτων.
- Επομένως, η ανακατασκευή της συνεχούς στοχαστικής ανέλιξης γίνεται με χρήση βαθυπερατού φίλτρου (παλμών sinc). Ωστόσο, σε αντίθεση με τα νομοτελειακά σήματα, για την ανακατασκευασμένη στοχαστική ανέλιξη $\{\hat{Y}(t)\}$ ισχύει $\mathbb{E}[(\hat{Y}(t)-Y(t))^2] = 0$ και όχι $\hat{Y}(t) = Y(t)$, δηλαδή υπάρχει περίπτωση οι $\hat{Y}(t)$ και $Y(t)$ να διαφέρουν σε ένα σύνολο τιμών του t με μηδενικό μέτρο Lebesgue. Για τους δικούς μας σκοπούς (ανάλυση και σχεδίαση Ψηφιακών Συστημάτων Επικοινωνιών) η συνθήκη $\mathbb{E}[(\hat{Y}(t)-Y(t))^2] = 0$ είναι επαρκής.