EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

8ο Μάθημα – 30 Απριλίου 2009

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

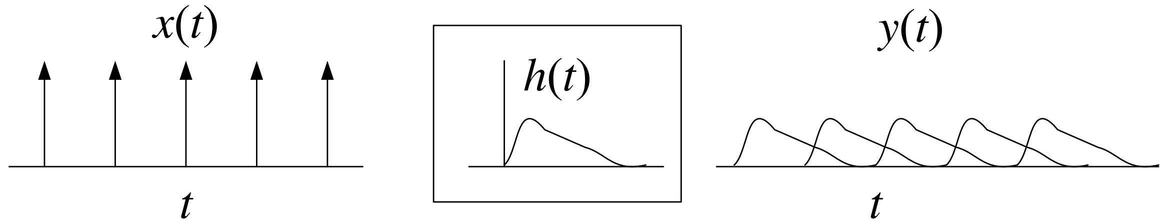
- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
  - Cioffi Ch. 3
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
- Decision Feedback Equalizer – DFE

Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή

- Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι το κανάλι $h(t)$ έχει άπειρο εύρος ζώνης και ότι η μόνη επίδρασή του επάνω στο σήμα είναι πολλαπλασιασμός με σταθερά ή/και καθυστέρηση.
- Στην πράξη τα κανάλια έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Επίσης, στη γενική περίπτωση, η απόκρισή τους είναι συνάρτηση της συχνότητας. Για τους λόγους αυτούς τα κανάλια παραμορφώνουν το σήμα.
- Η γραμμική παραμόρφωση μπορεί να αντιμετωπιστεί με χρήση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη. Υπάρχουν, ωστόσο, κάποιες λεπτομέρειες που πρέπει να προσεχτούν. Ενδέχεται, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις βάσης να μην είναι ορθογώνιες στην έξοδο του καναλιού. Ακόμα χειρότερα, ενδέχεται κάποιες να είναι και γραμμικά εξαρτημένες, με αποτέλεσμα να 'χάνουμε' κάποιες διαστάσεις (μη αντιστρέψιμος μετασχηματισμός). Απαιτείται, επομένως, προσεκτικός σχεδιασμός, ο οποίος εξαρτάται από το κανάλι.

Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Το πεπερασμένο εύρος ζώνης δημιουργεί διασυμβολική παρεμβολή (Inter-Symbol Interference – ISI). Αυτό συμβαίνει επειδή το κανάλι έχει μνήμη. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η έξοδος του καναλιού τη χρονική στιγμή t εξαρτάται όχι μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή t, αλλά και από την προηγούμενη είσοδο.



- Η αντιμετώπιση της διασυμβολικής παρεμβολής γίνεται με διάφορους τρόπους, μεταξύ των οποίων: Εξισωτές (ή Ισοσταθμιστές) (equalizers), Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας Ακολουθίας (MLSD), διαμόρφωση DMT/ODFM.

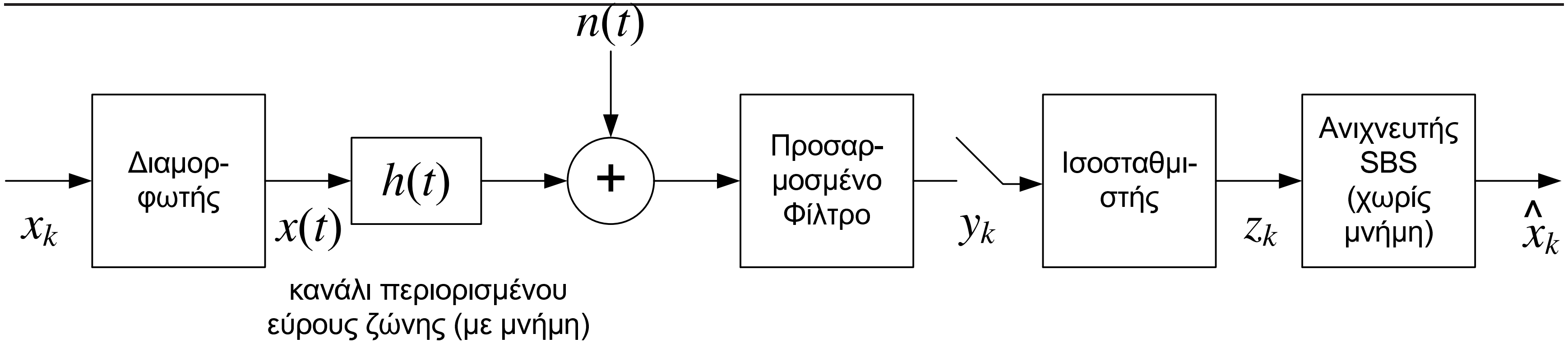
Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (3)

Η διασυμβολική παρεμβολή εμφανίζεται σε πολλά συστήματα μετάδοσης και αποθήκευσης: **modems** φωνητικών συχνοτήτων και συστήματα **DSL**, κανάλια κινητών επικοινωνιών λόγω πολλαπλής διόδευσης (**multipath**), συστήματα μαγνητικής και οπτικής αποθήκευσης, οπτικές ίνες (λόγω διασποράς τρόπων πόλωσης).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα εξής θέματα:

- Πώς μοντελοποιείται η διασυμβολική παρεμβολή;
- Ποια είναι η επίδρασή της σε ένα σύστημα;
- Με ποιες μεθόδους αντιμετωπίζεται;

Επικοινωνία δια μέσου καναλιού περιορισμένου εύρους ζώνης με χρήση ισοσταθμιστή



- Ο ισοσταθμιστής (equalizer) επιχειρεί να μετατρέψει το κανάλι με μνήμη σε κανάλι χωρίς μνήμη, της μορφής $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k + \mathbf{n}'_k$.

- Επομένως, ο ανιχνευτής SBS (Symbol-by-Symbol) σχεδιάζεται όπως και στην περίπτωση του καναλιού AWGN που είδαμε στα προηγούμενα μαθήματα.

Επικοινωνία δια μέσου καναλιού περιορισμένου εύρους ζώνης με χρήση ισοσταθμιστή (2)

- Ο δέκτης με ισοσταθμιστή και ανιχνευτή SBS <u>δεν</u> είναι βέλτιστος. Χρησιμοποιείται για να απλοποιήσει το σχεδιασμό.

- Ωστόσο, πολλές φορές η απώλεια απόδοσης σε σχέση με το βέλτιστο δέκτη είναι ικανοποιητική δεδομένων των προδιαγραφών του συστήματος (BER, πολυπλοκότητα δέκτη κλπ.).

- Υπό ορισμένες συνθήκες και με ταυτόχρονη βελτιστοποίηση της μεταδιδόμενης ακολουθίας $\mathbf{x}_k$ (**transmit optimization**) είναι δυνατό να επιτευχθεί η βέλτιστη απόδοση για δεδομένο κανάλι.

Διαδοχική Χρήση Καναλιού

- Μεταδιδόμενο σήμα (K διαδοχικές μεταδόσεις, ρυθμός μετάδοσης $\frac{1}{T}$): $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k(t - kT)$, όπου $x_k(t - kT)$ μία από τις M κυματομορφές του αστερισμού η οποία μεταφέρει το $(k + 1)$-οστό μήνυμα.

- Η έξοδος του καναλιού ισούται με $y(t) = (h*x)(t)$ (για γραμμικό, χρονικώς αμετάβλητο σύστημα).

- Εάν ο αστερισμός αποτελείται από M κυματομορφές, ο αριθμός όλων των πιθανών κυματομορφών $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k(t - kT)$ που μπορεί να μεταδοθούν από τον πομπό ισούται με M^K.

- Επειδή έχουμε θεωρήσει το κανάλι $h(t)$ είναι νομοτελειακό (**deterministic**), σε κάθε $x(t)$ αντιστοιχεί μια <u>μοναδική</u> κυματομορφή $h(t) * x(t)$.

Διαδοχική Χρήση Καναλιού (2)

- Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη τη ληφθείσα κυματομορφή $y(t) = h(t) * x(t) + n(t)$ για να βρούμε ποια από τις M^K πιθανές κυματομορφές $x(t)$ μεταδόθηκε από τον πομπό (π.χ. με ανιχνευτή MAP/ML).
- Η πολυπλοκότητα αυξάνει εκθετικά! Για παράδειγμα, για να εφαρμόσουμε τις μεθόδους που έχουμε μάθει έως τώρα, θα χρειαζόμασταν M^K προσαρμοσμένα φίλτρα στο δέκτη.
  - Η πολυπλοκότητα γίνεται να μειωθεί με χρήση <u>ακολουθιακής ανίχνευσης</u> (**sequence detection**) π.χ. με χρήση αλγορίθμου **Viterbi**.
  - Η χρήση ισοσταθμιστή είναι μια μη βέλτιστη (αλλά σε αρκετές περιπτώσεις απλούστερη υπολογιστικά) λύση.
  - Με πολύ προσεκτικό (αλλά, συνήθως, και πολύ πολύπλοκο) σχεδιασμό μπορεί να επιτευχθεί βέλτιστη απόδοση με χρήση ισοσταθμιστών τύπου Generalized Decision Feedback (GDFE) σε συνδυασμό με βελτιστοποίηση του εκπεμπόμενου σήματος.
  - Μία άλλη τεχνική είναι η χρήση συστημάτων Multi-Modal και Vector Coding, μια ειδική περίπτωση των οποίων είναι τα συστήματα OFDM/DMT. Η ιδέα: Διαχωρισμός του καναλιού σε ορθογώνια υπο-κανάλια, το καθένα από τα οποία δεν υφίσταται διασυμβολική παρεμβολή, και 'βλέπει' μόνο ένα επίπεδο (flat) κανάλι.

Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης

- Έως τώρα χρησιμοποιούσαμε συναρτήσεις οι οποίες ήταν ορθογώνιες μεταξύ τους: $\int \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i,j}$.
- Για διαδοχική χρήση καναλιού, το μεταδιδόμενο σήμα έχει τη μορφή $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1}\left(\sum_{n=1}^{N} x_{k,n}\phi_n(t-kT)\right)$, όπου N η διάσταση του αστερισμού.
- Το ότι $\int \phi_i(t)\phi_j^*(t)dt = \delta_{i,j}$ δε σημαίνει, κατ΄ ανάγκη, και ότι $\int \phi_i(t-kT)\phi_j^*(t-lT)dt = \delta_{i,j}$ για $k \neq l$. Επομένως, εάν επιχειρήσουμε να ανακτήσουμε την τιμή της συνιστώσας $x_{p,m}$ θα έχουμε διασυμβολική παρεμβολή από άλλες χρονικές στιγμές: $y_{p,m} = \int \left(x(t)+n(t)\right)\phi_m^*(t-pT)dt = \int \left(\sum_{n=1}^{N} x_{p,n}\phi_n(t-pT) + \sum_{k\neq p}\sum_{n=1}^{N} x_{k,n}\phi_n(t-kT) + n(t)\right)\phi_m^*(t-pT)dt =$

$$x_{p,m} + \underbrace{\sum_{k\neq p}\sum_{n=1}^{N}\int x_{k,n}\phi_n(t-kT)\phi_m^*(t-pT)dt}_{\text{ISI}} + \underbrace{\int n(t)\phi_m^*(t-pT)dt}_{\text{Θόρυβος}}.$$

Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης (2)

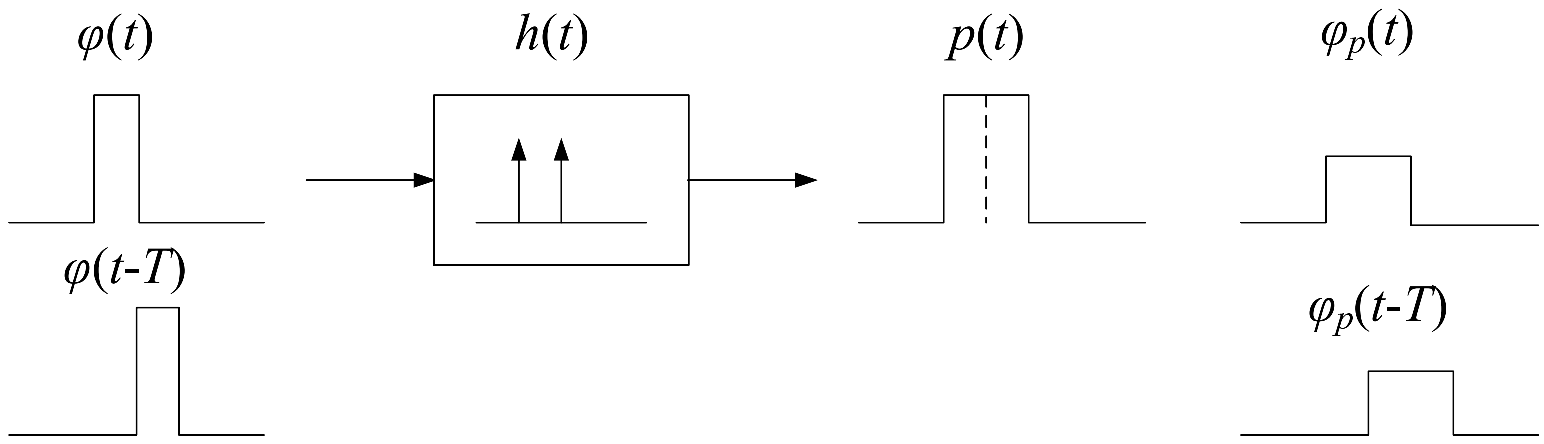
- Στην περίπτωση που οι $\phi_m(t-kT)$ και $\phi_n(t-lT)$ είναι ορθογώνιες για $k \neq l$ σε κάποιο διάστημα ολοκλήρωσης, δεν εμφανίζεται ISI και το διανυσματικό κανάλι που προκύπτει δεν έχει μνήμη.
  - Παράδειγμα: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ εάν η δειγματοληψία γίνει τις χρονικές στιγμές kT.
- Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, η ορθογωνιότητα χάνεται όταν οι συναρτήσεις βάσης περάσουν μέσα από το κανάλι πεπερασμένου εύρους ζώνης $h(t)$, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται ISI.
- Μια λύση είναι να επιλεγούν κατάλληλες $\phi(t)$ των οποίων η συνέλιξη με το κανάλι παράγει ορθογώνιες συναρτήσεις.
  - Συνήθως οι $\phi(t)$ εξαρτώνται από το κανάλι. Ωστόσο, υπάρχουν τρόποι διαμόρφωσης με $\phi(t)$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες του $h(t)$ (π.χ. OFDM).
- Αλλιώς, είτε εφαρμόζουμε ανίχνευση μέγιστης πιθανοφάνειας στο δέκτη ή προσπαθούμε να δημιουργήσουμε κανάλι χωρίς μνήμη στο δέκτη κατά προσέγγιση με χρήση ισοσταθμιστών.

Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή

- Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι $N = 1$ διάσταση (για απλούστευση). Τα αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα σε 2 διαστάσεις με χρήση μιγαδικών ποσοτήτων.
- Επίσης, υπενθυμίζεται μια βασική υπόθεση που έχουμε κάνει έως τώρα (και που θα συνεχίσουμε να κάνουμε σε αυτό το μάθημα): Τα μεταδιδόμενα σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανεμημένα (i.i.d.).
- Απόκριση Παλμού (pulse response) $p(t) \triangleq \phi(t) * h(t)$, όπου $\phi(t)$ η συνάρτηση βάσης που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση.
- Επομένως, η έξοδος του καναλιού ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k \phi(t - kT) * h(t) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k p(t - kT) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k \|p\| \phi_p(t - kT) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k} \phi_p(t - kT) + n(t)$, όπου $\phi_p(t) = p(t)/\|p\|$ η κανονικοποιημένη απόκριση παλμού, $x_{p,k} = \|p\| x_k$ και $\|p\|^2 = \langle p(t), p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) p^*(t) dt$.
- Η συνάρτηση $\phi_p(t)$ είναι κανονικοποιημένη, αλλά όχι κατ΄ ανάγκη ορθογώνια με τις μετατοπίσεις της, $\phi_p(t - kT)$.

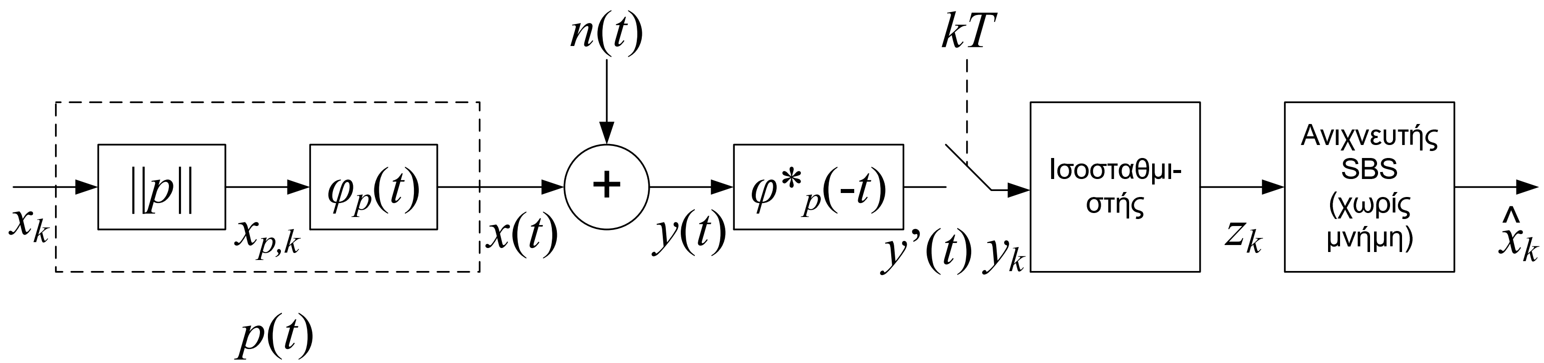
Παράδειγμα (**Cioffi 3.1.2**)

- Θεωρούμε διαμόρφωση με χρήση της $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-T))$ (τετραγωνικός παλμός) και κανάλι με $h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$.
- Η απόκριση παλμού ισούται με $p(t) = \phi(t) * h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-T)) + \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t-T) - u(t-2T)) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t-2T))$.
- $\phi_p(t) = \frac{p(t)}{\|p\|} = \frac{1}{\sqrt{2T}}(u(t) - u(t-2T))$.
- Παρόλο που οι $\phi(t)$ και $\phi(t-T)$ είναι ορθογώνιες, οι $\phi_p(t)$ και $\phi_p(t-T)$ δεν είναι.

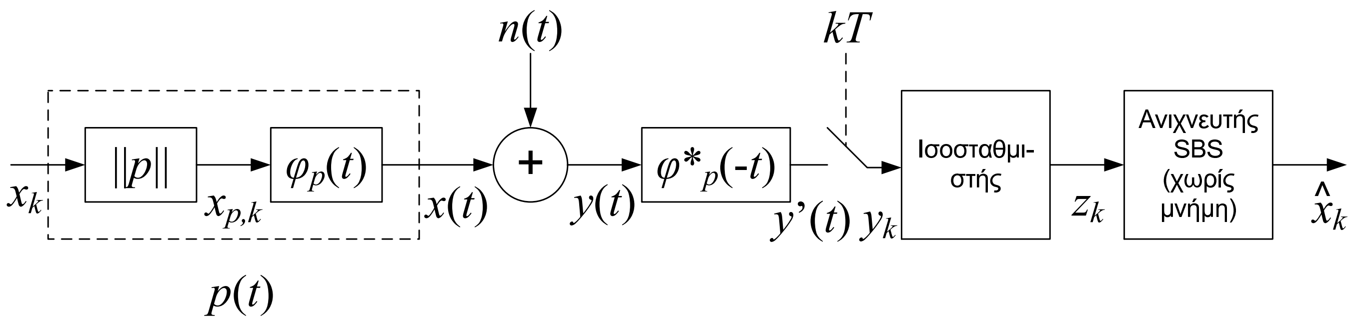


Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Είδαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k}\phi_p(t-kT) + n(t)$.
- Στα επόμενα θεωρούμε κανάλι AWGN (στην περίπτωση καναλιού ACGN μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ισοδύναμο κανάλι AWGN όπως περιγράφηκε προηγουμένως).
- Στο δέκτη χρησιμοποιούμε ανιχνευτή προσαρμοσμένου φίλτρου $\phi_p^*(-t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα y_k αρκούν για την περιγραφή του συνεχούς σήματος $y(t)$, αρκεί $||p|| < \infty$.



Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (3)



- $y'(t) = y(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k}\phi_p(t-kT) * \phi_p^*(-t) + n(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} \|p\| x_k q(t-kT) + n'(t)$, όπου $q(t) \triangleq \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) = \frac{p(t)*p^*(-t)}{\|p\|^2}$.
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι $q^*(-t) = q(t)$ και $q(0) = 1$.
- Έστω $y_k \triangleq y(kT)$, $q_k \triangleq q(kT)$ και $n'_k \triangleq n'(kT)$.

$$\boxed{y_k = \underbrace{\|p\| x_k}_{\text{επιθυμητό σήμα (με διαφορετικό πλάτος)}} + \underbrace{\|p\| \sum_{m\neq k} x_m q_{k-m}}_{\text{ISI}} + \underbrace{n'_k}_{\text{θόρυβος}}}$$

Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης

- $y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k$.
- Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης (Peak Distortion Criterion):

  $\mathcal{D}_p \triangleq |x|_{\max} \|p\| \sum_{m \neq 0} |q_m|$.
- Αντιστοιχεί στο χειρότερο σενάριο που μπορεί να συμβεί σε ένα κανάλι ISI (όλα τα παρεμβαλλόμενα σύμβολα να έχουν το μέγιστο δυνατό πλάτος).
- $P_e \leq N_e Q\left(\frac{\|p\| \frac{d_{\min}}{2} - \mathcal{D}_p}{\sigma}\right)$ (εάν $2\mathcal{D}_p \leq \|p\| d_{\min}$).
- Συνήθως η ακραία αυτή περίπτωση εμφανίζεται σπάνια με αποτέλεσμα ο χαρακτηρισμός του ISI με χρήση της $\mathcal{D}_p$ να οδηγεί σε πολύ απαισιόδοξες εκτιμήσεις.

Μέση Τετραγωνική Παραμόρφωση

- Εάν τα διαδοχικά σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοίως κατανεμημένα (i.i.d.), η μέση τετραγωνική παραμόρφωση (Mean-Square Distortion) ορίζεται ως

$$\mathcal{D}_{ms} \triangleq \mathrm{E}\left\{\left|\sum_{m\neq k} x_m q_{k-m}\right|^2\right\} = \mathcal{E}_x \|p\|^2 \sum_{m\neq 0} |q_m|^2.$$

- Όταν χρησιμοποιούμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση για το χαρακτηρισμό του ISI υποθέτουμε ότι η διασυμβολική παρεμβολή ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή και ότι είναι ασυσχέτιστη με το θόρυβο n'_k. Η προσέγγιση είναι πιο ακριβής σε συστήματα με μεγάλους αστερισμούς και κωδικοποίηση.

- $P_e \approx N_e Q\left(\frac{\|p\| d_{\min}}{2\sqrt{\sigma^2+\mathcal{D}_{ms}}}\right).$

Φράγμα Προσαρμοσμένου Φίλτρου – **Matched Filter Bound**

- Δεδομένης της παλμικής απόκρισης $p(t)$ και του αστερισμού $\{x_k\}$, ο λόγος σήματος προς θόρυβο φράγματος προσαρμοσμένου φίλτρου $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}$ ορίζεται ως $\boxed{\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}} = \frac{\bar{\mathcal{E}}_x \|p\|^2}{\frac{\mathcal{N}_0}{2}},}$ δηλαδή ο λόγος σήματος προς θόρυβο στο δέκτη όταν το κανάλι ISI χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ενός μόνο συμβόλου (με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται ISI).
- Δεδομένου ότι η μετάδοση περισσότερων του ενός συμβόλων θα δημιουργήσει διασυμβολική παρεμβολή (εκτός εάν τα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι συσχετισμένα και λαμβάνεται υπόψιν το κανάλι), ο $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}$ είναι ο μέγιστος δυνατός SNR που μπορεί να εμφανιστεί στο δέκτη όταν τα x_k είναι i.i.d.
- Συχνά, η επίδοση των ισοσταθμιστών συγκρίνεται με τον $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}$ ο οποίος αποτελεί άνω φράγμα (για i.i.d. x_k). Ωστόσο αυτό δε σημαίνει ότι σε ένα κανάλι ISI μπορούμε πάντα να φτάσουμε τον $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}$ (εκτός εάν βελτιστοποιήσουμε και το μεταδιδόμενο σήμα (**transmit optimization**) με αποτέλεσμα τα x_k να μην είναι πλέον i.i.d. στη γενική περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση ενδέχεται να μπορούμε να υπερβούμε τον $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}$.

Κριτήριο **Nyquist**

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
  - Cioffi Ch. 3
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
- Decision Feedback Equalizer – DFE

Κριτήριο **Nyquist**

- Είδαμε ότι $y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k$.
- Κριτήριο Nyquist: Σε ένα κανάλι με παλμική απόκριση $p(t)$ δεν εμφανίζεται ISI όταν $q_k = \delta_k$ ή, ισοδύναμα, όταν

  $Q(e^{-j\omega T}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{-j\omega kT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(\omega + \frac{2\pi n}{T}) = 1$. $Q(\omega) = \mathcal{F}\{q(t)\}$.
- Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist ονομάζονται <u>παλμοί Nyquist</u>.
- Παράδειγμα: $q(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \to \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

  $q(t) = \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) \Rightarrow Q(f) = |\Phi_p(f)|^2 \Rightarrow |\Phi_p(f)|^2 = \mathcal{F}\left\{\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T\Pi(fT) \Rightarrow \Phi_p(f) = \sqrt{T}\Pi(fT) \Rightarrow \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.
- Όπως είδαμε, δεδομένου ότι $p(t) = \phi(t) * h(t)$, οι $q(t)$ και $\phi_p(t)$ εξαρτώνται από τη συνάρτηση βάσης $\phi(t)$ <u>και</u> από το κανάλι $h(t)$. Επομένως η $\phi(t)$ πρέπει να επιλεγεί με βάση το κανάλι $h(t)$.
- Πολλές φορές τα συστήματα επικοινωνιών χρησιμοποιούν συναρτήσεις Nyquist (ή σχεδόν Nyquist) ως συναρτήσεις βάσης $\phi(t)$. Αυτό δε σημαίνει, κατ΄ ανάγκη, ότι ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist στο δέκτη.

Παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου – **Raised Cosine Pulses**

- Ο παλμός sinc είναι ο παλμός με το μικρότερο εύρος ζώνης ο οποίος ικανοποιεί το κριτήριο Nyquist για ρυθμό μετάδοσης $\frac{1}{T}$.
- Ωστόσο, το πλάτος του μειώνεται γραμμικά με το χρόνο. Εάν η δειγματοληψία δε γίνει στις σωστές χρονικές στιγμές kT, το πλάτος της διασυμβολικής παρεμβολής από γειτονικά σύμβολα ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.
- Για το λόγο αυτό σε πολλά συστήματα επιλέγονται παλμοί Nyquist με μεγαλύτερο εύρος ζώνης των οποίων το πλάτος ελαττώνεται πιο απότομα με αποτέλεσμα να μειώνεται και η διασυμβολική παρεμβολή σε γειτονικά σύμβολα όταν υπάρχει σφάλμα στο χρόνο δειγματοληψίας.
- Σε πολλά συστήματα χρησιμοποιούνται παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου (Raised Cosine Pulses).

Παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου – **Raised Cosine Pulses** (2)

- $q(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\left[\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{T}\right)}{1-\left(\frac{2\alpha t}{T}\right)^2}\right]$, όπου $0 \leq \alpha \leq 1$ ισούται με το ποσοστό πλεονάζοντος εύρους ζώνης (percent excess bandwidth, αλλιώς rolloff factor).

- Ο παλμός raised cosine είναι μη μηδενικός στο διάστημα $|\omega| \in [-(1+\alpha)\frac{\pi}{T}, (1+\alpha)\frac{\pi}{T}]$. Για $\alpha > 0$, το πλάτος του ελαττώνεται $\sim \frac{1}{t^3}$.

- $\phi_p(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left([1+\alpha]\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{T\sin\left([1-\alpha]\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1-\left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2}$.

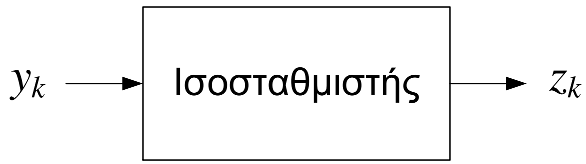
- Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. Cioffi Ch. 3.

Ισοσταθμιστής Επιβολής Μηδενισμών – **Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE**

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
  - Cioffi Ch. 3
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
- Decision Feedback Equalizer – DFE

Υπενθύμιση: Τι αποπειράται να πετύχει ένας ισοσταθμιστής

- Είδαμε ότι ένα κανάλι με διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: $y_k = \|p\| x_k * q_k + n_k$.
- Το κανάλι δεν είναι πλέον AWGN· έχει μνήμη.
- Ο ισοσταθμιστής είναι ένα <u>φίλτρο</u> (γραμμικό ή μη γραμμικό) το οποίο επιχειρεί να μετατρέψει το κανάλι ISI σε κανάλι της μορφής $z_k = x_k + n'_k$ (χωρίς μνήμη).
- Αυτό δε σημαίνει ότι κατά τη μετατροπή δεν έχουμε απώλεια στην απόδοση του συστήματος. Στη γενική περίπτωση, ο δέκτης με ισοσταθμιστή <u>δεν</u> είναι βέλτιστος.



Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE

- Ο πιο απλός ισοσταθμιστής, αλλά με τις μεγαλύτερες απώλειες (στη γενική περίπτωση).

- $y_k = \|p\| x_k * q_k + n_k \Rightarrow Y(z) = \|p\| X(z) Q(z) + N(z)$.

- <u>Η ιδέα:</u> Να αγνοήσουμε το θόρυβο και χρησιμοποιήσουμε ένα <u>γραμμικό</u>, χρονικώς αμετάβλητο φίλτρο $W(z)$ το οποίο αντιστρέφει το κανάλι.

- $W(z)\|p\| X(z) Q(z) = X(z) \Rightarrow \boxed{W(z) = \frac{1}{Q(z)\|p\|}.}$

- Ο ισοσταθμιστής $W(z)$ προσπαθεί να μηδενίσει τη διασυμβολική παρεμβολή και να προσεγγίσει το κριτήριο Nyquist στην έξοδό του την οποία στέλνει στον ανιχνευτή. ‘Επιβάλλει’ μηδενισμούς σε όλα τα q_k εκτός από το q_0.

Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE (2)

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο θόρυβος στην έξοδο του ZF-LE είναι γκαουσιανός (αλλά όχι, απαραίτητα, λευκός) με PSD ανά διάσταση $\bar{R}_{\text{ZF-LE}}(z) = \frac{\frac{\mathcal{N}_0}{2}}{\|p\|^2 Q(z)}$.
- Επομένως, ο θόρυβος ενισχύεται σε συχνότητες όπου το μέτρο της $Q(z)$ είναι μικρό. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένη απόδοση όταν η $Q(z)$ παίρνει μικρές τιμές σε κάποιες από τις συχνότητες που χρησιμοποιεί ένα σύστημα.
- Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί ότι $\text{SNR}_{\text{MFB}}/\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} = \gamma_{\text{ZF-LE}}$, όπου $\gamma_{\text{ZF-LE}} = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{Q\left(e^{-j\omega T}\right)} d\omega = w_0\|p\| \geq 1$ και w_0 ο κεντρικός συντελεστής του φίλτρου $W(z)$. $\gamma_{\text{ZF-LE}} = 1$ όταν $Q(z) = 1$ (δηλαδή το κανάλι δεν έχει ISI).
- $P_{e,\text{ZF-LE}} \approx N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_{\text{ZF-LE}}}\right)$, όπου $\sigma_{\text{ZF-LE}} = \sqrt{\frac{\bar{\mathcal{E}}_x}{\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}}}$.
- Στην πράξη ο ισοσταθμιστής ZF-LE υλοποιείται ως φίλτρο FIR. Η απόδοση του ισοσταθμιστή σε σχέση με το μέγιστο $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}$ εξαρτάται από το μήκος του φίλτρου.

Ισοσταθμιστής Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος – **MMSE-LE**

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
  - Cioffi Ch. 3
- Decision Feedback Equalizer – DFE

Ισοσταθμιστής Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος **Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE**

- Η απόδοση του ισοσταθμιστή ZF-LE επηρεάζεται σημαντικά από περιοχές όπου η $Q(z)$ βρίσκεται κοντά στο 0 λόγω της μεγάλης ενίσχυσης του θορύβου στις περιοχές αυτές.

- Έστω το σφάλμα ισοσταθμιστή $e_k = x_k - z_k = x_k - w_k * y_k$ (χρησιμοποιούμε και πάλι γραμμικό φίλτρο).

- <u>Η ιδέα:</u> Να βρεθεί ένα γραμμικό, χρονικώς αμετάβλητο φίλτρο $W(z)$ το οποίο να ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) $E[|e_k|^2] = E[|x_k - w_k * y_k|^2]$.

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (2)

- Αποδεικνύεται ότι το γραμμικό φίλτρο που ελαχιστοποιεί το MSE δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{W(z) = \frac{1}{\|p\| \left(Q(z) + \frac{1}{\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}} \right)}.}$$

- Συγκρίνοντας με το ZF-LE, έχει προστεθεί ο όρος $\frac{1}{\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}}$ στον παρονομαστή, με αποτέλεσμα, όταν το μέτρο της $Q(z)$ είναι πολύ μικρό, ο θόρυβος να μην απειρίζεται. Για να γίνει αυτό πρέπει να 'περάσει' ένα μέρος του ISI στην έξοδο (δεδομένου ότι δεν αντιστρέφεται πλήρως το κανάλι).
- Ο MMSE-LE επιτυγχάνει μια εξισορρόπηση ανάμεσα στην καταπολέμηση του ISI και στην ισχύ του θορύβου που δημιουργεί στην έξοδό του. Δηλαδή, χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η μέση ενέργεια του αθροίσματος του εναπομείναντος ISI και του θορύβου όταν δε μηδενίζεται όλο το ISI είναι μικρότερη από την ενέργεια του θορύβου εάν η απαίτηση είναι να μην παραμείνει καθόλου ISI στην έξοδο του ισοσταθμιστή.

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (3)

- Ο ισοσταθμιστής MMSE-LE είναι πολωμένος (biased), δηλαδή $E[z_k|x_k] = \alpha x_k$. Η πόλωση απαλείφεται με πολλαπλασιασμό με $1/\alpha$.

- $\alpha = \left(1 - \frac{\sigma^2_{\text{MMSE-LE}}}{\bar{\mathcal{E}}_x}\right)$, $\sigma^2_{\text{MMSE-LE}} = w_0 \frac{\mathcal{N}_0/2}{\|p\|}$, όπου w_0 ο κεντρικός συντελεστής του φίλτρου $W(z)$.

- Αποδεικνύεται ότι $\text{SNR}_{\text{MFB}}/\text{SNR}_{\text{MMSE-LE,U}} = \gamma_{\text{MMSE-LE}}$, όπου $\text{SNR}_{\text{MMSE-LE,U}}$ ο λόγος σήματος προς θόρυβο μετά την απο-πόλωση. Επειδή ο ισοσταθμιστής MMSE-LE είναι πολωμένος η έκφραση για το $\gamma_{\text{MMSE-LE}}$ είναι πιο πολύπλοκη από αυτή για το $\gamma_{\text{ZF-LE}}$ (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 3).

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (4)

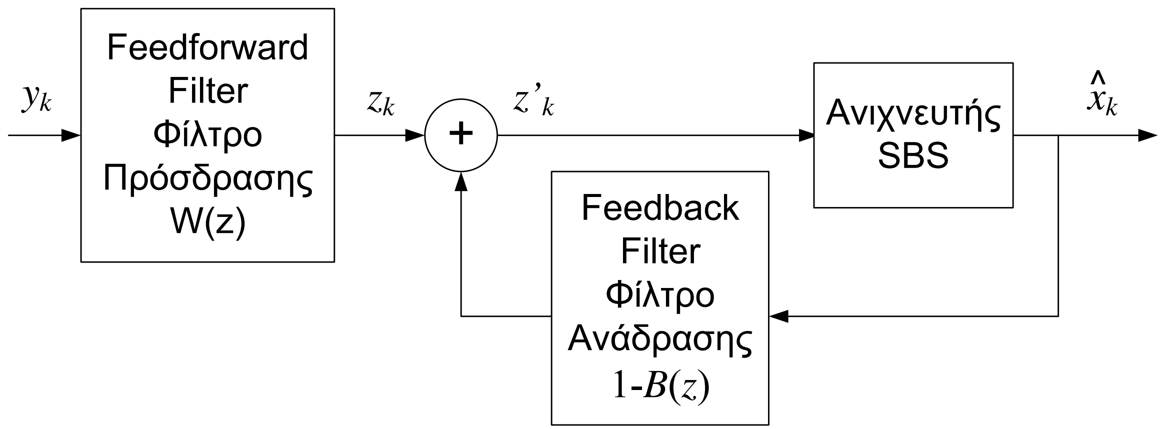
- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} \leq \text{SNR}_{\text{MMSE-LE, U}} \leq \text{SNR}_{\text{MFB}}$. Επομένως, ο ισοσταθμιστής MMSE-LE έχει καλύτερο SNR από το ZF-LE. Αυτό ήταν αναμενόμενο δεδομένου ότι, εξ ορισμού, ο MMSE-LE ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (και άρα το θόρυβο στην ανίχνευση του x_k).
- $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} \approx \text{SNR}_{\text{MMSE-LE, U}}$ για μεγάλα SNR ή για κανάλια χωρίς ISI ($Q(z) = 1$).
- $P_{e,\text{MMSE-LE}} \approx N_e Q\left(\sqrt{k\text{SNR}_{\text{MMSE-LE,U}}}\right)$, αν και ο θόρυβος δεν είναι γκαουσιανός (δεδομένου ότι το σφάλμα περιέχει και συνιστώσα που εξαρτάται από το μη γκαουσιανό x_k).
- Δεδομένου ότι τόσο ο ZF-LE όσο και ο MMSE-LE είναι γραμμικά φίλτρα τα οποία δε διαφέρουν στην πολυπλοκότητα παρά μόνο στους συντελεστές, προτιμάται η χρήση του MMSE-LE.

Ισοσταθμιστής Ανάδρασης Αποφάσεων – **Decision Feedback Equalizer – DFE**

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
- Decision Feedback Equalizer – DFE
  - Cioffi Ch. 3

Decision Feedback Equalizer – DFE

- Οι ZF-LE και MMSE-LE είναι γραμμικά φίλτρα.
- Ο DFE είναι ένα μη γραμμικό φίλτρο το οποίο αποτελείται από 2 γραμμικά φίλτρα και ένα κύκλωμα απόφασης (ανιχνευτής Symbol-by-Symbol).
- Η ιδέα: Εάν σε ένα κανάλι έχουμε εκτιμήσει σωστά τα προηγούμενα x_l που μεταδόθηκαν (έως και το x_{k-1}), μπορούμε να τα αφαιρέσουμε από το y_k με αποτέλεσμα η ποσότητα που απομένει να εξαρτάται μόνο από το προς εκτίμηση σύμβολο x_k.



Decision Feedback Equalizer – DFE (2)

- Η συμπεριφορά του DFE εξαρτάται από το αν οι αποφάσεις του ανιχνευτή είναι σωστές. Όταν γίνουν σφάλματα, επηρεάζουν και μελλοντικές αποφάσεις. Το πρόβλημα αυτό που χαρακτηρίζει τους εξισωτές DFE ονομάζεται διάδοση σφαλμάτων (error propagation).

- Η ανάλυση και η σχεδίαση του DFE γίνεται υποθέτοντας ότι δε γίνονται λάθη με αποτέλεσμα να μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές γραμμικών συστημάτων.

- Όπως και στα γραμμικά φίλτρα, υπάρχουν δύο τύποι DFE, ο ZF-DFE και ο MMSE-DFE. Στα επόμενα θα αναφερθούμε στον MMSE-DFE του οποίου ο ZF-DFE είναι ειδική περίπτωση (και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας SNR$\to\infty$).

Decision Feedback Equalizer – DFE (3)

- Όπως και στον MMSE-LE, σκοπός του MMSE-DFE είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος $e_k = x_k - z'_k$ (βλ. σχήμα DFE σε προηγούμενη διαφάνεια).
- Αποδεικνύεται ότι τα φίλτρα πρόσδρασης (feedforward filter) και ανάδρασης (feedback) ισούνται με

$$W(z) = \frac{1}{\|p\|\gamma_0 G^*(z^{-*})}, \text{ και } B(z) = G(z), \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου $G(z)$ είναι ο μοναδικός κανονικός παράγοντας της φασματικής παραγοντοποίησης $Q(z) + \frac{1}{\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}} = \gamma_0 G(z) G^*(z^{-*})$.

- Κανονικός παράγοντας: Αιτιατός ($g_k = 0$ για $k < 0$), monic ($g_0 = 1$) και ελάχιστης φάσης (όλοι οι πόλοι εντός του μοναδιαίου κύκλου και όλα τα μηδενικά επάνω η μέσα στο μοναδιαίο κύκλο).

Decision Feedback Equalizer – DFE (4)

- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος z_k του φίλτρου πρόσδρασης εξαρτάται μόνο από εισόδους για χρονικές στιγμές $\leq k$. Οπότε, εάν έχουμε βρει τα x_l, $l < k$, χωρίς σφάλμα, μπορούμε να τα αφαιρέσουμε από τη z_k (με κατάλληλα βάρη που δίνονται από τη $G(z)$) ώστε να ανακτήσουμε, τελικα, τη $z'_k = x_k + e_k$.
- Ο MMSE-DFE είναι πολωμένος.
- Αποδεικνύεται ότι $\mathsf{SNR}_{\mathsf{MMSE\text{-}DFE,U}} = \gamma_0 \mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}} - 1$, όπου $\gamma_0 = \frac{1+\frac{1}{\mathsf{SNR}_{\mathsf{MFB}}}}{1+\sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2}$.
- Εάν δε γίνονται λάθη στην εκτίμηση των x_k, ο MMSE-DFE είναι τουλάχιστον όσο καλός είναι και ένας MMSE-LE, δεδομένου ότι ο τελευταίος είναι μια ειδική περίπτωση MMSE-LE με $B(z) = 1$.
- Ωστόσο, η επίδοση του MMSE-DFE μπορεί να μην είναι καλή σε κανάλια με σχετικά υψηλή πιθανότητα σφάλματος όπου εμφανίζεται συχνά διάδοση σφαλμάτων.