ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

7ο Μάθημα – 6 Απριλίου 2009

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος
  - Cioffi Ch. 1
- Ζωνοπερατά (bandpass) συστήματα.
- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή – Εισαγωγή

Έγχρωμος (**colored**) προσθετικός θόρυβος

- Σε πολλές περιπτώσεις ο θόρυβος ενδέχεται να μην είναι λευκός, δηλαδή, $R_n(\tau) \neq \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στην περίπτωση αυτή ο θόρυβος ονομάζεται έγχρωμος (colored).
- Ο έγχρωμος θόρυβος μπορεί να οφείλεται σε
  - Φίλτρα στο δέκτη τα οποία μεταβάλλουν το φάσμα του λευκού θορύβου
  - Ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές από άλλα συστήματα (RF Ingress)
  - Διαφωνία (crosstalk)
- Η σχεδίαση συστημάτων για Προσθετικό Έγχρωμο Γκαουσιανό Θόρυβο (ACGN) μπορεί να γίνει με <u>λεύκανση</u> του έγχρωμου θορύβου εφόσον γνωρίζουμε την αυτοσυσχέτισή του, $R_n(\tau)$ (ή τη φασματική πυκνότητα ισχύος $S_n(f)$).

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (**Whitening Filter**)

- Έστω το διανυσματικό μοντέλο καναλιού N διαστάσεων $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$, όπου $\mathbf{n}$ ACGN με $\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*] = \mathbf{R}_n = \bar{\mathbf{R}}_n \sigma^2$.

- Επομένως, εάν $\mathbf{R}_n \neq \mathbf{I}$, οι συνιστώσες του θορύβου στις διαφορετικές διαστάσεις είναι συσχετισμένες.

- Ο πίνακας $\bar{\mathbf{R}}_n$ είναι $N \times N$ και θετικά ορισμένος (Positive Definite), δηλαδή $\mathbf{z}^T \bar{\mathbf{R}}_n \mathbf{z} > 0$ για οποιοδήποτε $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^N$.

- Παραγοντοποίηση Cholesky: Ένας PD πίνακας $\mathbf{P}$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbf{L}\mathbf{L}^*$, όπου $\mathbf{L}$ κάτω τριγωνικός πίνακας (ο οποίος αποτελεί και τετραγωνική ρίζα, $\mathbf{P}^{1/2}$, του $\mathbf{P}$). Συνεπώς, $\bar{\mathbf{R}}_n = \bar{\mathbf{R}}_n^{1/2} \bar{\mathbf{R}}_n^{*/2}$, όπου $\bar{\mathbf{R}}_n^{1/2}$ κάτω τριγωνικός.

Φίλτρο Λεύκανσης για το διανυσματικό μοντέλο καναλιού (**Whitening Filter**) (2)

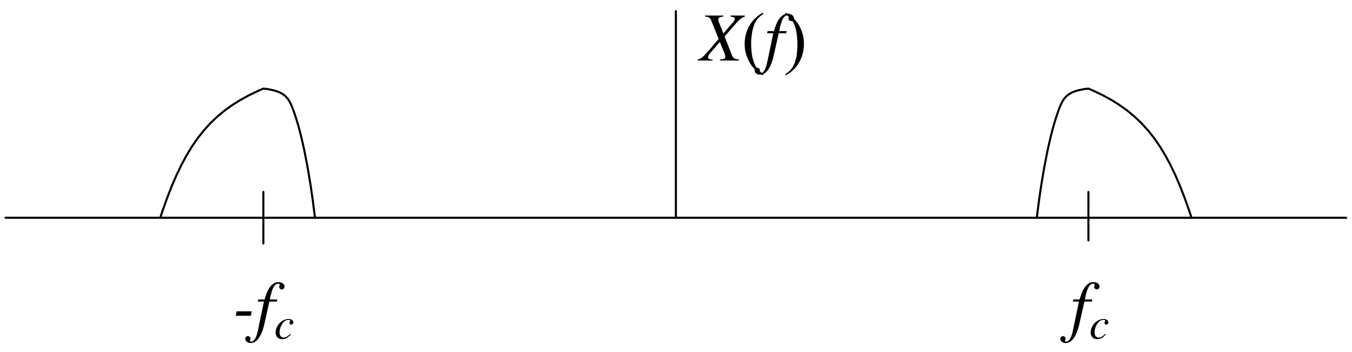
- Ορίζουμε $\tilde{\mathbf{y}} \triangleq \left(\bar{\mathbf{R}}_n^{1/2}\right)^{-1} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{R}}_n^{-1/2}\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.
- $E[\tilde{\mathbf{n}}\tilde{\mathbf{n}}^*] = E[\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\mathbf{n}\mathbf{n}^* \left(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\right)^*] = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2}E[\mathbf{n}\mathbf{n}^*]\bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \bar{\mathbf{R}}^{-1/2}\bar{\mathbf{R}}^{1/2}\bar{\mathbf{R}}^{*/2}\bar{\mathbf{R}}^{-*/2} = \mathbf{I}_N$.
- Επομένως, το κανάλι που προέκυψε από τον <u>αντιστρέψιμο</u> μετασχηματισμό του $\mathbf{y}$ στο $\tilde{\mathbf{y}}$ είναι AWGN.
- Έχουμε δεί ότι η απόδοση του ανιχνεύτή MAP (και ML) δεν επηρεάζεται από αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς.
- Επομένως, στο δέκτη μπορούμε να δουλέψουμε με το κανάλι AWGN $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{n}}$.
- Ένα σύστημα με έγχρωμο θόρυβο ενδέχεται να έχει καλύτερη απόδοση από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο. Βλ. π.χ. Cioffi Παράδειγμα 1.7.1., όπου ένα σύστημα QPSK με έγχρωμο θόρυβο χαρακτηρίζεται από μικρότερη πιθανότητα σφάλματος από ένα σύστημα με λευκό θόρυβο ίσης μέσης ισχύος.
- Αρκεί, βέβαια, ο δέκτης να είναι σχεδιασμένος για το σωστό κανάλι.

Ζωνοπερατά (**bandpass**) συστήματα

- Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος
- Ζωνοπερατά (bandpass) συστήματα
  - Cioffi Ch. 2, Proakis & Salehi 2.5
- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή – Εισαγωγή

Ζωνοπερατά (**bandpass**) σήματα και συστήματα

- Ζωνοπερατό (bandpass/narrowband) σήμα $x(t)$: Όταν η απόκριση συχνότητας $X(f)$ είναι μη μηδενική σε μια μικρή περιοχή συχνοτήτων γύρω από μια φέρουσα συχνότητα (carrier frequency) f_c. Δηλαδή, $X(f) = 0$ για $|f - f_c| \geq W$, με $W < f_c$.
- Ζωνοπερατό σύστημα $h(t)$: Ένα σύστημα που έχει μη μηδενική απόκριση συχνότητας $H(f)$ σε μια μικρή περιοχή συχνοτήτων γύρω από μια φέρουσα συχνότητα, δηλαδή δεν αφήνει να 'περάσουν' συχνότητες εκτός της περιοχής $|f - f_c| < W$.



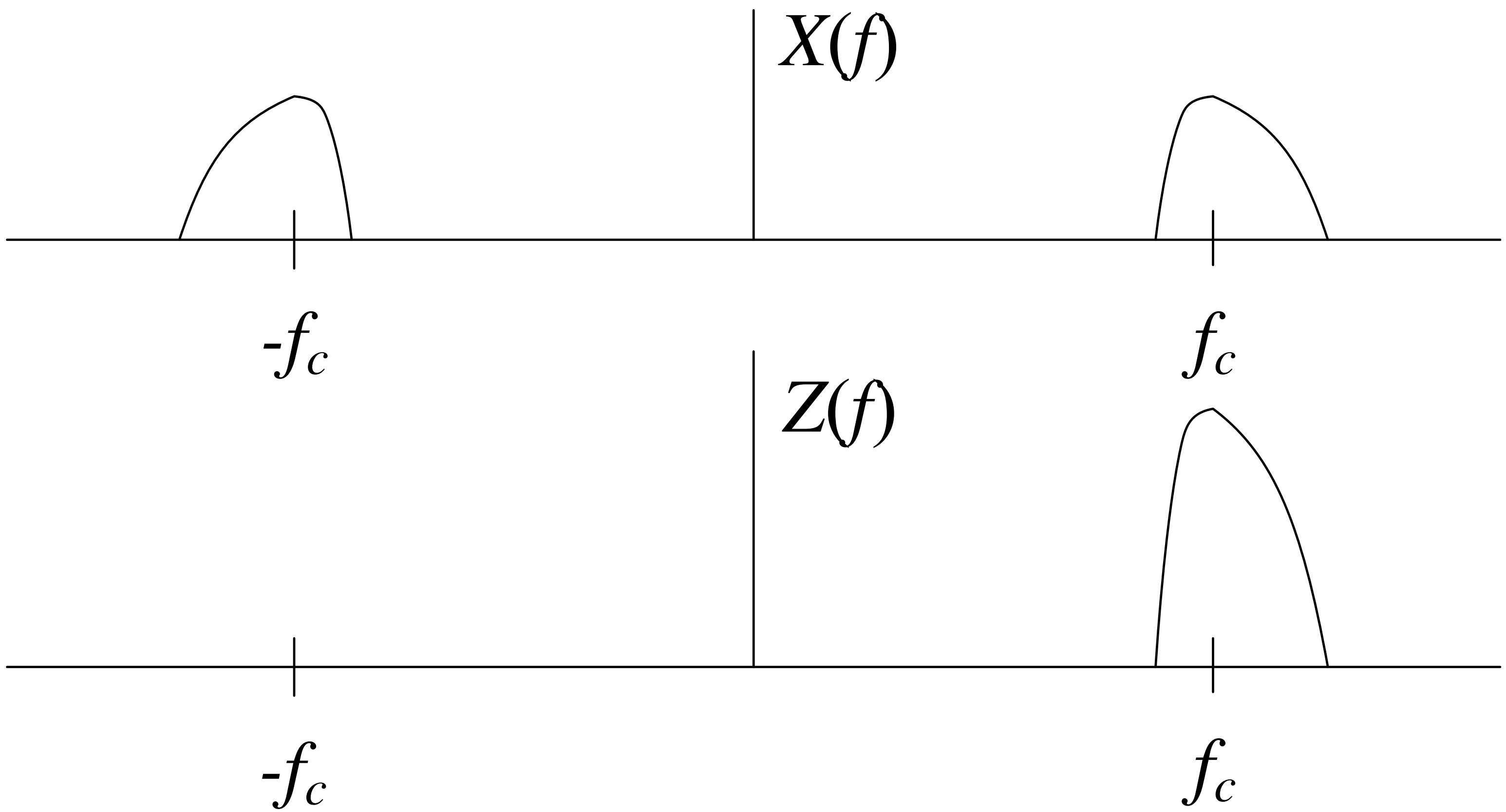
Αναλυτικό σήμα και μετασχηματισμός **Hilbert**

- Το <u>αναλυτικό σήμα</u> (analytic signal) $z(t)$ ορίζεται ως $Z(f) \triangleq 2u(f)X(f)$ όπου $u(f) = 0$ για $f < 0$, και $u(t) = 1$ για $f > 0$ (step function).

- Αποδεικνύεται ότι (βλ. π.χ. Proakis & Salehi) $\boxed{z(t) = x(t) + j\hat{x}(t),}$ όπου $\hat{x}(t) \triangleq \frac{1}{\pi t} * x(t)$ είναι ο μετασχηματισμός Hilbert του $x(t)$.

- $\hat{X}(f) = -j\text{sgn}(f)$. Επομένως, ο μετασχηματισμός Hilbert είναι ένα φίλτρο που μεταθέτει τη φάση των θετικών συχνοτήτων κατά $-\frac{\pi}{2}$ και τη φάση των αρνητικών συχνοτήτων κατά $\frac{\pi}{2}$.

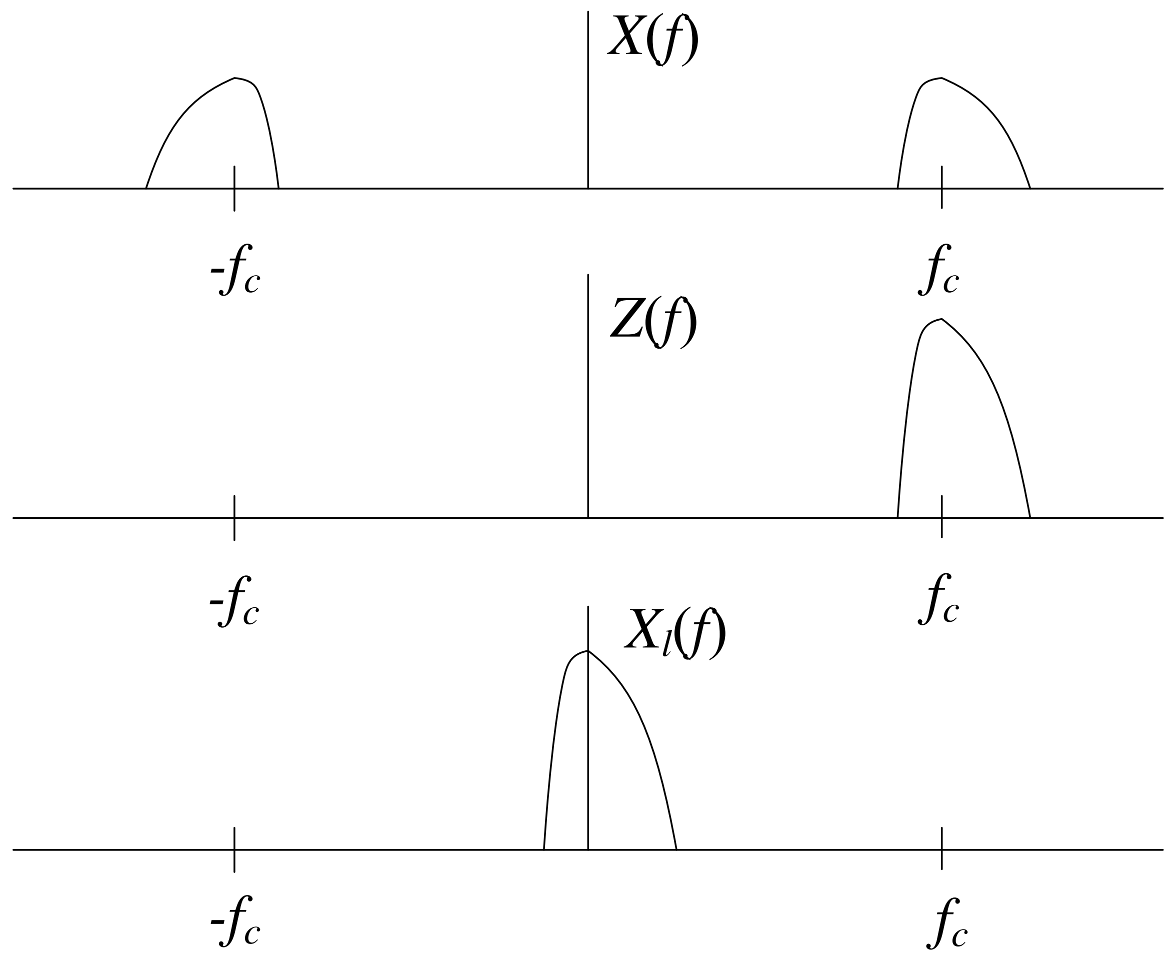
Αναλυτικό σήμα και μετασχηματισμός **Hilbert**



Βαθυπερατό Ισοδύναμο

- Το βαθυπερατό ισοδύναμο σήμα (bandpass equivalent signal) $x_l(t)$ ορίζεται ως $X_l(f) \triangleq Z(f+f_c) = 2u(f+f_c)X(f+f_c)$.
- Επομένως, $x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_c t} = x_c(t) + jx_s(t)$ (μιγαδικό σήμα στη γενική περίπτωση!).
- Με πράξεις, $x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_c t) - x_s(t)\sin(2\pi f_c t)$ και $\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_c t) + x_s(t)\cos(2\pi f_c t)$
- Αντίστροφα, $x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_c t)$ και $x_s(t) = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_c t) - x(t)\sin(2\pi f_c t)$.
- Για μια καλή επισκόπηση σχέσεων μεταξύ ζωνοπερατών, αναλυτικών και βαθυπερατών ισοδύναμων εκφράσεων, δείτε τον Πίνακα 2.2 των Proakis & Salehi.
- Ισχύει $X_l(f) = 0$ για $|f| \geq W$.

Βαθυπερατό Ισοδύναμο (2)



Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο;

- Γνωρίζουμε ότι, για Γραμμικά και Χρονικώς Αμετάβλητα (**LTI**) συστήματα, ισχύει $y(t) = h(t) * x(t)$ και, ισοδύναμα, $Y(f) = H(f)X(f)$.
- Εάν, τόσο το σήμα $x(t)$ όσο και το σύστημα $h(t)$ είναι ζωνοπερατά στην περιοχή της f_c και ισχύει $X(f) = 0$ και $H(f) = 0$ για $|f - f_c| \geq W$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
Y(f) &= H(f)X(f) \Rightarrow \\
Z(f) &= 2u(f)Y(f) = 2u(f)H(f)X(f) \Rightarrow \\
Y_l(f) &= 2u(f+f_c)H(f+f_c)X(f+f_c) \\
&= \frac{1}{2}\left(2u(f+f_c)H(f+f_c)\right)\left(2u(f+f_c)X(f+f_c)\right) \Rightarrow \\
Y_l(f) &= \frac{1}{2}H_l(f)X_l(f) \Rightarrow \\
y_l(t) &= \frac{1}{2}h_l(t) * x_l(t).
\end{aligned}$$

Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο; (2)

- Επομένως, αντί να αναλύσουμε το ζωνοπερατό σύστημα $h(t)$ με ζωνοπερατή είσοδο $x(t)$, μπορούμε να αναλύσουμε το ισοδύναμο βαθυπερατό σύστημα $h_l(t)$ με είσοδο $x_l(t)$.

- Η βαθυπερατή περιγραφή είναι πολύ χρήσιμη γιατί μπορεί να απλοποιήσει την ανάλυση, αλλά και την υλοποίηση.

- Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα, εάν επεξεργαζόμαστε το βαθυπερατό σήμα (baseband processing) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ίδια κυκλώματα ανεξαρτήτως της φέρουσας συχνότητας.

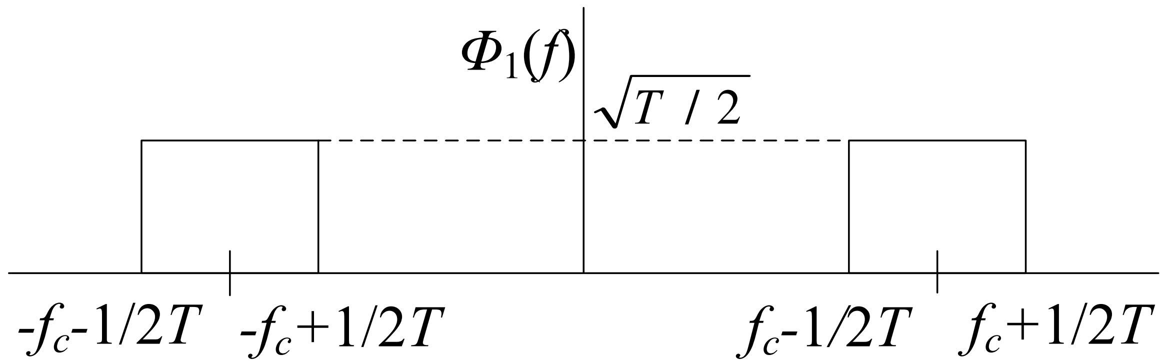
Σε τι χρησιμεύει το βαθυπερατό ισοδύναμο; (3)

- Τα περισσότερα συστήματα επικοινωνιών λειτουργούν με βάση αυτήν την αρχή: Το σήμα μεταφέρεται γύρω από τη μηδενική συχνότητα (**downconversion**) ή σε μια ενδιάμεση συχνότητα f_{IF} και η επεξεργασία του γίνεται στις χαμηλές συχνότητες.

- Τα βαθυπερατά σήματα και συστήματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά. Ωστόσο, το ζωνοπερατό σήμα/σύστημα στο οποίο αντιστοιχούν είναι πραγματικό (σε συστήματα επικοινωνιών).

Παράδειγμα: **QAM**

- Είδαμε ότι ως συναρτήσεις βάσης του αστερισμού QAM μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$ και $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t)$. Με μετασχηματισμό Fourier,
  $\Phi_1(f) = \sqrt{\frac{T}{2}}\{\Pi(T(f-f_c)) + \Pi(T(f+f_c))\}$ και
  $\Phi_2(f) = j\sqrt{\frac{T}{2}}\{-\Pi(T(f-f_c)) + \Pi(T(f+f_c))\}$.
- Οι $\phi_i(t)$ είναι ζωνοπερατές με μέτρο $\sqrt{\frac{T}{2}}$ στο διάστημα $|f-f_c| \le \frac{1}{2T}$.



Παράδειγμα: **QAM** (συνέχεια)

- Έστω ένα σήμα QAM: $x(t) = a\phi_1(t)+b\phi_2(t) = a\sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)+ b\sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)\sin(2\pi f_c t)$. Με επισκόπηση ή πράξεις, $x_c(t) = a\sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ και $x_s(t) = -b\sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.

- $x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t) = (a - jb)\sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.

- Επομένως, μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα (πραγματικό) δισδιάστατο ζωνοπερατό σήμα QAM με ένα μιγαδικό μονοδιάστατο βαθυπερατό σήμα με συνάρτηση βάσης $\phi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\mathsf{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$.

Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή

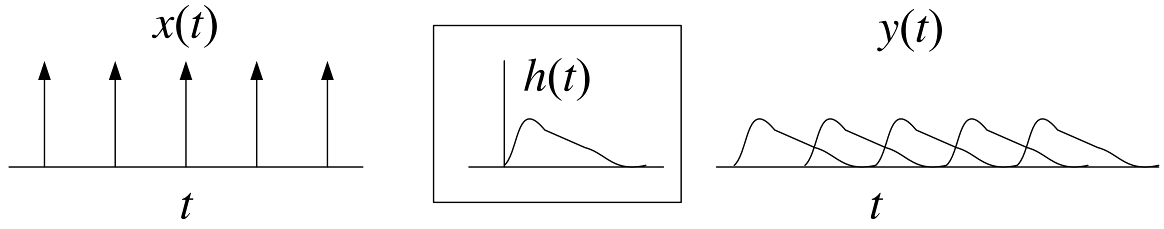
- Έγχρωμος (colored) προσθετικός θόρυβος
- Ζωνοπερατά (bandpass) συστήματα
- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή – Εισαγωγή
  - Cioffi Ch. 3

Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή

- Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι το κανάλι $h(t)$ έχει άπειρο εύρος ζώνης και ότι η μόνη επίδρασή του επάνω στο σήμα είναι πολλαπλασιασμός με σταθερά ή/και καθυστέρηση.
- Στην πράξη τα κανάλια έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Επίσης, στη γενική περίπτωση, η απόκρισή τους είναι συνάρτηση της συχνότητας. Για τους λόγους αυτούς τα κανάλια παραμορφώνουν το σήμα.
- Η γραμμική παραμόρφωση μπορεί να αντιμετωπιστεί με χρήση του προσαρμοσμένου φίλτρου στο δέκτη. Υπάρχουν, ωστόσο, κάποιες λεπτομέρειες που πρέπει να προσεχτούν. Ενδέχεται, για παράδειγμα, οι συναρτήσεις βάσης να μην είναι ορθογώνιες στην έξοδο του καναλιού. Ακόμα χειρότερα, ενδέχεται κάποιες να είναι και γραμμικά εξαρτημένες, με αποτέλεσμα να ‘χάνουμε’ κάποιες διαστάσεις (μη αντιστρέψιμος μετασχηματισμός). Απαιτείται, επομένως, προσεκτικός σχεδιασμός, ο οποίος εξαρτάται από το κανάλι.

Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Το πεπερασμένο εύρος ζώνης δημιουργεί διασυμβολική παρεμβολή (**Inter-Symbol Interference – ISI**). Αυτό συμβαίνει επειδή το κανάλι έχει μνήμη. Όπως φαίνεται στο σχήμα, η έξοδος του καναλιού τη χρονική στιγμή t εξαρτάται όχι μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή t, αλλά και από την προηγούμενη είσοδο.



- Η αντιμετώπιση της διασυμβολικής παρεμβολής γίνεται με διάφορους τρόπους, μεταξύ των οποίων: Εξισωτές (ή Ισοσταθμιστές) (**equalizers**), Ανίχνευση Μέγιστης Πιθανοφάνειας Ακολουθίας (**MLSD**), διαμόρφωση **DMT/ODFM**.

Παραμόρφωση και Διασυμβολική Παρεμβολή (3)

Η διασυμβολική παρεμβολή εμφανίζεται σε πολλά συστήματα μετάδοσης και αποθήκευσης: **modems** φωνητικών συχνοτήτων και συστήματα **DSL**, κανάλια κινητών επικοινωνιών λόγω πολλαπλής διόδευσης (**multipath**), συστήματα μαγνητικής και οπτικής αποθήκευσης, οπτικές ίνες (λόγω διασποράς τρόπων πόλωσης).

Στα επόμενα μαθήματα θα ασχοληθούμε με τα εξής θέματα:

- Πώς μοντελοποιείται η διασυμβολική παρεμβολή;
- Ποια είναι η επίδρασή της σε ένα σύστημα;
- Με ποιες μεθόδους αντιμετωπίζεται;