EE725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

1ο Μάθημα – 5 Μαρτίου 2009

Γενικές Πληροφορίες – Θέματα προς συζήτηση

- Διδάσκων: Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης. **dtouba@upatras.gr**.
- Σκοπός του μαθήματος:
  - Να εμβαθύνει σε κάποια θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών
  - Να συμβάλει στη βαθύτερη κατανόηση της Ψηφιακής Μετάδοσης.
  - Να βοηθήσει την έρευνά σας.
- Θέματα προς συζήτηση
  - Καθορισμός ωρών γραφείου κατά τις οποίες θα δίνεται προτεραιότητα σε όσους έχουν δηλώσει το μάθημα.
  - Καθορισμός τρόπου εξέτασης / αξιολόγησης.
  - Αλλαγή ώρας μαθήματος (;)

Σχετικά Βιβλία/Συγγράμματα

- Θα χρησιμοποιηθούν διαφάνειες. Δε θα δοθεί βιβλίο. Εάν ζητηθεί, θα υποδειχθούν κεφάλαια από Ελληνόγλωσσα βιβλία.
- Τα παρακάτω βιβλία/συγγράμματα καλύπτουν θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών. Θα είναι διαθέσιμα από το διδάσκοντα για δανεισμό για λίγες ώρες.
  - J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, Digital Communication, 3rd ed.
    Καλό βιβλίο, περισσότερο από την πλευρά της Επεξεργασίας Σήματος. Περιέχει και εισαγωγικά κεφάλαια. Η 3η έκδοση καλύπτει και συστήματα MIMO.
  - J. G. Proakis, Digital Communications, 4th ed.
    Κλασσικό βιβλίο Ψηφιακών Επικοινωνιών. Γενικά υπεισέρχεται σε περισσότερες λεπτομέρειες από τους Lee & Messerschmitt.
  - John M. Cioffi, Digital Communication, Class Reader,
    `http://www.stanford.edu/class/ee379a, ee379c, ee379b, ee479`.
    Καλύπτει ένα μεγάλο εύρος θεμάτων. Ωστόσο, προϋποθέτει καλή γνώση πιθανοτήτων, σημάτων και συστημάτων και στοχαστικών ανελίξεων. Εκτενής αναφορά σε συστήματα DMT, στη γενικευμένη θεωρία ισοσταθμιστών (GDFE) και σε συστήματα πολλών χρηστών (multiuser).

Σχετικά Βιβλία / Συγγράμματα (2)

- R. G. Gallager, Information Theory and Reliable Communication.
  Κλασικό βιβλίο Θεωρίας Πληροφορίας. Το 8ο κεφάλαιο περιέχει εκτενή ανάλυση της μετάδοσης σε συνεχή κανάλια πεπερασμένου εύρους ζώνης.
- S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing - Volume 1, Estimation Theory.
  Επικεντρώνεται στη Θεωρία Εκτίμησης.
- D. Tse and P. Viswanath, Fundamentals of Wireless Communications.
  Πολύ καλογραμμένο βιβλίο με σύγχρονα θέματα. Δεν καλύπτει λεπτομέρειες σχεδίασης συστημάτων. Αναλύει τα Ασύρματα Συστήματα από τη σκοπιά της Επεξεργασίας Σήματος και της Θεωρίας Πληροφορίας.
- A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 3rd ed.
  Κλασικό βιβλίο πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων. Πολύ χρήσιμο ως αναφορά.
- A. Leon-Garcia, Probability and Random Processes for Electrical Engineering, 2nd ed.
  Όπως φανερώνει και ο τίτλος του, είναι προσαρμοσμένο στις ανάγκες του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού.

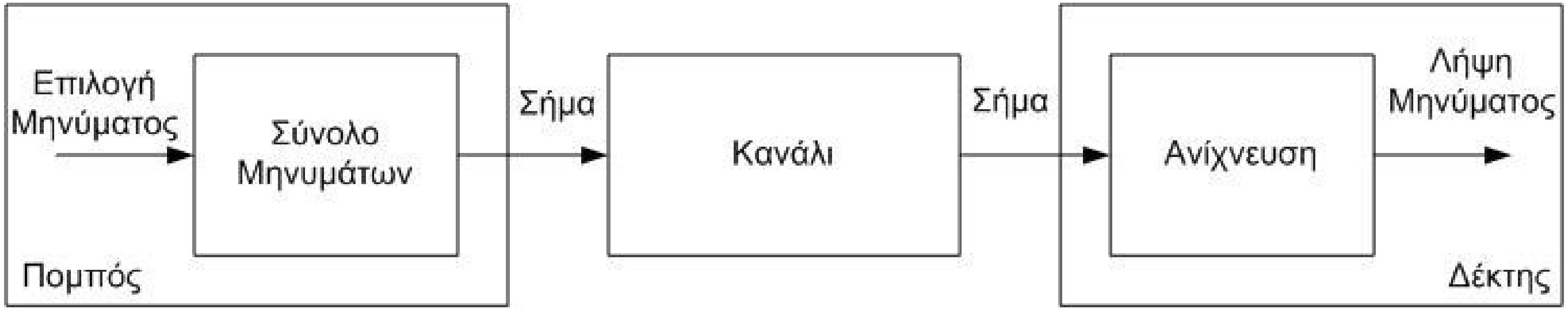
Ύλη Μαθήματος

- Η ακριβής ύλη θα καθοριστεί ύστερα από συζήτηση στο πρώτο μάθημα.
- Πιθανά θέματα που μπορούν να συμπεριληφθούν στην ύλη
  - Επανάληψη βασικών αρχών Ψηφιακής Μετάδοσης: Διανυσματική Αναπαράσταση Κυματομορφών, Κανάλι Γκαουσιανού Θορύβου, Βέλτιστη Ανίχνευση, Πιθανότητα Σφάλματος, Είδη Αστερισμών και Διαμόρφωσης, Ανάλυση βαθυπερατών συστημάτων.
  - Ανάλυση ζωνοπερατών Ψηφιακών Συστημάτων.
  - Διασυμβολική Παρεμβολή, Κριτήριο Nyquist, Ισοστάθμιση (ZF, MMSE, DFE), Προκωδικοποιητής Tomlinson.
  - Στοχαστικές Ανελίξεις. Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες και Είδη Θορύβου.
  - Συγχρονισμός συστημάτων. Εκτίμηση καναλιού.
  - Συστήματα DMT/OFDM.
  - Ασύρματα συστήματα. Χωρητικότητα καναλιών και τρόποι μετάδοσης. Συστήματα MIMO.

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Εισαγωγή
  - Ψηφιακή Μετάδοση: Cioffi Ch. 1, Proakis Ch. 1.
- Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων (1ο μέρος).

Ψηφιακή Μετάδοση



- Σκοπός της Ψηφιακής Μετάδοσης είναι να στείλει μηνύματα από τον πομπό στο δέκτη δια μεσου του καναλιού.
- Τα μηνύματα που στέλνονται ανήκουν σε ένα πεπερασμένο σύνολο.
- Η αποστολή των μηνυμάτων γίνεται με τη χρήση σημάτων (κυματομορφών).
- Επομένως, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, σε επίπεδο φυσικού καναλιού, αναλογική.
- Επίσης, η Ψηφιακή Μετάδοση είναι, στην ουσία, μετάδοση διακριτών μηνυμάτων. Εάν τα μηνύματα προέρχονται από ψηφία δια μέσου κάποιας απεικόνισης ή εάν τα αναπαραστήσουμε με ψηφία μπορούμε, ισοδύναμα, να θεωρήσουμε ότι στέλνουμε ομάδες ψηφίων.

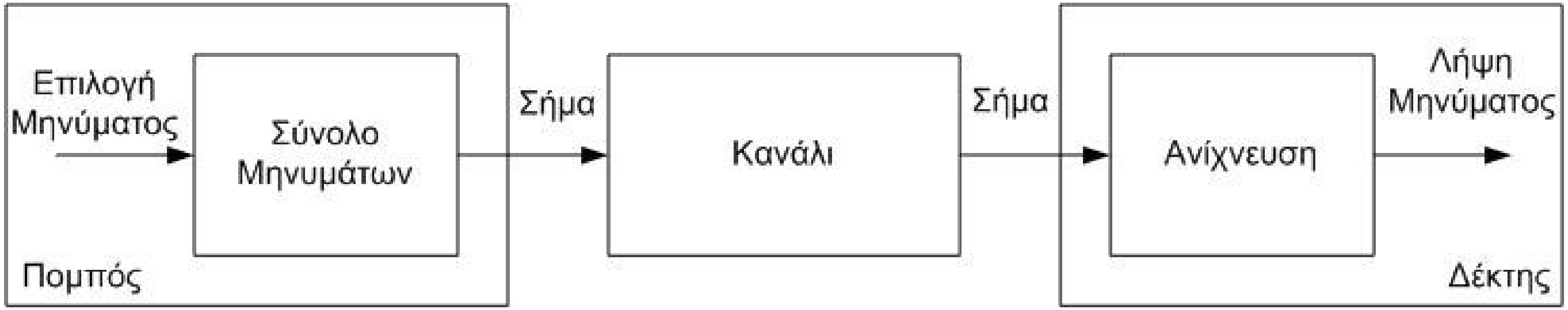
Ψηφιακή Μετάδοση (2)

- Η μετάδοση είναι επιτυχής όταν ο δέκτης ανιχνεύσει το ίδιο μήνυμα με αυτό που έστειλε ο πομπός.

- Στην πράξη, η μετάδοση αποτυγχάνει με κάποια <u>πιθανότητα σφάλματος</u> P_e λόγω
  - Θορύβου / μεταβολών του καναλιού / παραμόρφωσης, θορύβου του δέκτη
  - Ανεπαρκούς γνώσης του καναλιού
  - Μη βέλτιστης σχεδίασης του συστήματος ώστε να μειωθεί η πολυπλοκότητα και, επομένως, το κόστος ή/και η κατανάλωση ισχύος.

- Ακόμα και αν η σχεδίαση είναι η βέλτιστη υπάρχει κάποιο όριο στο ρυθμό με τον οποίο μπορούμε να μεταδώσουμε δια μέσου του καναλιού. Τα όρια στη μετάδοση μελετώνται από τη Θεωρία Πληροφορίας.

Ψηφιακή Μετάδοση (3)



- Αρχικά, η πληροφορία που θέλουμε να στείλουμε στο δέκτη μετατρέπεται σε κάποιο από τα μηνύματα με χρήση κωδικοποιητή.
- Στη συνέχεια τα μηνύματα μετατρέπονται σε (αναλογικές) κυματομορφές / ηλεκτρικά σήματα με τη χρήση διαμορφωτή και στέλνονται στο κανάλι για μετάδοση.
- Το κανάλι παραμορφώνει τις μεταδιδόμενες κυματομορφές τόσο με γνωστό τρόπο (π.χ. απόσβεση) όσο και με τυχαίο (θόρυβος, διασπορά, διαλείψεις **(fading)**).
- Στο δέκτη το σήμα αποδιαμορφώνεται, γίνεται ανίχνευση του μηνύματος που μεταδόθηκε και, στη συνέχεια, αποκωδικοποίηση.

Ψηφιακή Μετάδοση (4)

- Τα μηνύματα που στέλνει ο πομπός είναι <u>τυχαία</u> από τη σκοπιά του δέκτη (αλλιώς δε θα είχε νόημα η μετάδοση).
- Ο θόρυβος του καναλιού είναι ένα <u>άγνωστο</u> και, συνήθως, τυχαίο σήμα.
- Ακόμα και η παραμόρφωση καναλιού μπορεί να είναι τυχαία (για παράδειγμα, στα ασύρματα κανάλια που παρουσιάζουν διαλείψεις και πολλαπλή όδευση – **multipath**).
- Επομένως, τόσο τα μεταδιδόμενα όσο και τα λαμβανόμενα σήματα και μηνύματα είναι <u>στοχαστικά</u>.

Ψηφιακή Μετάδοση (5)

- Παρόλο που δε γνωρίζουμε εκ των προτέρων την τιμή των σημάτων, γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές τους. Βασιζόμενοι σε αυτές μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για τις τιμές τους. Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων και των λαμβανόμενων σημάτων και, φυσικά, από τους αλγορίθμους ανίχνευσης που χρησιμοποιεί ο δέκτης.

- Η κατανομή των λαμβανόμενων σημάτων εξαρτάται από την κατανομή των εκπεμπόμενων σημάτων και από τον τρόπο που επιδρά σε αυτά το κανάλι.

Βασικές έννοιες πιθανοτήτων και στοχαστικών ανελίξεων (1ο μέρος)

- Εισαγωγή
- Βασικές έννοιες στοχαστικών ανελίξεων και σημάτων και συστημάτων (1ο μέρος).
  - Proakis Ch. 2, Lee & Messerschmitt Ch. 3

Διευκρίνιση

Η επισκόπηση των εννοιών Θεωρίας Πιθανοτήτων, Στοχαστικών Ανελίξεων και Σημάτων και Συστημάτων στις επόμενες διαφάνειες γίνεται εν είδει επανάληψης. Για το λόγο αυτό δίνεται προτεραιότητα στη σημασία και στην εφαρμογή των εννοιών στις Ψηφιακές Επικοινωνίες σε βάρος της μαθηματικής αυστηρότητας και πληρότητας. Είναι, ωστόσο, σημαντικό να ελέγχουμε εάν ισχύουν οι απαραίτητες συνθήκες και υποθέσεις κάθε φορά που χρησιμοποιούμε κάποιο μαθηματικό εργαλείο για τους σκοπούς των Ψηφιακών Επικοινωνιών.

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

- Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.): Μια συνάρτηση η οποία παίρνει τυχαίες τιμές από το δειγματικό χώρο Ω. Μπορεί να είναι πραγματική ή μιγαδική, συνεχής ή διακριτή.
  - Παράδειγμα 1.1: A = Αποτέλεσμα του αγώνα Ολυμπιακός - Παναθηναϊκός. $\Omega = \{1, 2, X\}$.
  - Παράδειγμα 1.2: B = Θερμοκρασία στην Πάτρα. $\Omega =?$
- Οι διακριτές τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας (σ.μ.π.) $p_X(x) = \Pr\{X = x\}$ (probability mass function - pmf). $\sum_{a\in\Omega} p_X(a) = 1$. $F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \sum_{a:a\leq x} p_X(a)$. Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (cumulative distribution function – cdf).
  - Παράδειγμα 1.3 (ΟΣΦΠ-ΠΑΟ): $p_A(a = 1) = 1$, $p_A(a = X) = p_A(a = 2) = 0$.
- Οι συνεχείς τ.μ. περιγράφονται με χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) (probability density function - pdf) $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$. $\int_\Omega f_X(x)dx = 1$. $\Pr\{X \in \mathcal{S}\} = \int_\mathcal{S} f_X(x)dx$.
- Εναλλακτικά, αντί για pmf, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει pdf με συναρτήσεις Dirac $f_X(x) = \sum_{a\in\Omega} p_x(a)\delta(x - a)$.

Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

- Συνεχής κατανομή. Θα τη χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον στα επόμενα. Η χρήση της δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (**Central Limit Theorem**): Το άθροισμα N ανεξάρτητων και ομοιόμορφα κατανεμημένων (i.i.d.) τυχαίων μεταβλητών με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά τείνει στην γκαουσιανή κατανομή για $N \rightarrow \infty$ ανεξάρτητα από την κατανομή τους.
- Μοντελοποιεί πολύ καλά το θερμικό θόρυβο στα ηλεκτρονικά κυκλώματα.
- $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{a^2}{2}} da = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. $\Pr\{X > x\} = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Η συνάρτηση $Q()$ δεν έχει αναλυτική έκφραση. Για μεγάλες τιμές του x προσεγγίζεται πολύ καλά από την $\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Χρησιμοποιείται ευρέως για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος στα Ψηφιακά Συστήματα.

Σημαντικές Ποσότητες

- <u>Μέση τιμή τ.μ.</u> (mean value or expectation) $E_p[X] = \sum_{x \in \Omega} x p_X(x)$ για διακριτές τ.μ.,

  $E_f[X] = \int_\Omega x f_X(x) dx$ για συνεχείς.

- <u>Μέση τιμή συνάρτησης $g(\cdot)$ τ.μ.</u> $E_f[g(X)] = \int_\Omega g(x) f_X(x) dx$. Αντίστοιχα για διακριτές τ.μ.

- <u>Διασπορά τ.μ.</u> (variance) $\sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$. Για μιγαδικές τ.μ. $\sigma_X^2 = E[|(X - E[X])|^2] = E[XX^*] - (E[X])(E[X])^*$.

- <u>Χαρακτηριστική Σύνάρτηση</u> (Characteristic Function) $\Phi_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx$.

Συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών

- Από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**joint cdf**) δύο (συνεχών) τ.μ. $F_{X,Y}(x,y) = \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(a,b)\,da\,db$.

- $f_{X,Y}(x,y)$: Από κοινού σ.π.π. (**joint pdf**).

- Περιθώρια σ.π.π. (**marginal pdf**) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$.

- Δύο τ.μ. είναι (στατιστικά) ανεξάρτητες όταν για οποιαδήποτε διαστήματα I και J, $\Pr\{X \in I \cap Y \in J\} = \Pr\{X \in I\}\Pr\{Y \in J\}$. Ισοδύναμα, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ ή $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ ή $E[XY] = E[X]E[Y]$ (ασυσχέτιστες).

- Ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι απαραίτητα και ανεξάρτητες. Ωστόσο, εάν οι τ.μ. είναι γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, τότε είναι και ανεξάρτητες.

Από κοινού Γκαουσιανή Κατανομή

- Δύο (πραγματικών) μεταβλητών, $\mu = 0$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)} \right],$$

  όπου $\rho = \frac{E[XY]}{\sigma^2}$ ο συντελεστής συσχέτισης.
- Γενική μορφή για M (πραγματικές) μεταβλητές

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{K}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}}) \right]$$

  όπου $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} = E[(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T]$ ο πίνακας συσχέτισης και $\mathbf{m}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}]$.
- Οι περιθώριες $\boldsymbol{\sigma}$.π.π. είναι και αυτές γκαουσιανές.
- Από γραμμικό μετασχηματισμό από κοινού γκαουσιανών τ.μ. προκύπτουν από κοινού γκαουσιανές τ.μ.

Δεσμευμένες Πιθανότητες και Κανόνας του **Bayes**

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ για τις τιμές του y όπου $f_Y(y) \neq 0$.
- Κανόνας Bayes: $f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$.
- Θεώρημα Bayes: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}{\int_{\Omega_x} f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx}$.
- Για διακριτές τ.μ.: $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}{\sum_{\Omega_x} p_{Y|X}(y|x) p_X(x)}$.

Στοχαστικές Ανελίξεις (**Random Processes**)

- Διακριτού χρόνου $\{X_k\}$: Μια ακολουθία τ.μ. $\{X_k\}$ με ακέραιο δείκτη k.

- Συνεχούς χρόνου $\{X(t)\}$: Μια συνάρτηση του χρόνου t της οποίας τα δείγματα $X(t = \tau)$ είναι τ.μ.

- Οι τιμές μιας στοχαστικής ανέλιξης μπορεί να είναι διακριτές (π.χ. αριθμός αυτοκινήτων που περνούν από τα διόδια από τις 10 έως τις 11 π.μ. κάθε ημέρα) ή συνεχείς (π.χ. η θερμοκρασία στην Πάτρα).

- Μια στοχαστική ανέλιξη αποτελείται από ένα σύνολο (πιθανώς άπειρων) δειγματικών <u>συναρτήσεων</u>.

- Παρόλο που οι στοχαστικές ανελίξεις είναι τυχαίες, γνωρίζουμε, όπως και στην περίπτωση των τ.μ., κάποιες ιδιότητές τους.

Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Γενική Περιγραφή: με χρήση από κοινού σ.π.π. (ή σ.μ.π.). Για παράδειγμα, η πιθανότητα τα δείγματα $k = 1, 2, \ldots, N$ της στοχαστικής ανέλιξης $\{X_k\}$ να ισούνται με x_k ισούται με $p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
- Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι γκαουσιανή εάν οποιοδήποτε σύνολο δειγμάτων της είναι από κοινού γκαουσιανές τ.μ.
- Μέση τιμή στοχαστικής ανέλιξης: $m_k = E[X_k]$, $m(t) = E[X(t)]$ (στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τη χρονική στιγμή!).
- Αυτοσυσχέτιση: $R_{XX}(k, l) = E[X_k X_l^*]$, $R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^*]$.
  - Παράδειγμα 1.4: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει διαδοχική ρίψη κέρματος: Δύο οποιαδήποτε δείγματα είναι ασυσχέτιστα (εάν το κέρμα δεν είναι ‘πειραγμένο’).
  - Παράδειγμα 1.5: Στοχαστική ανέλιξη που περιγράφει τη θερμοκρασία στην Πάτρα: Η αυτοσυσχέτιση είναι μη μηδενική.

Στοχαστικές Ανελίξεις (3) – Στασιμότητα

- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά τη Στενή Έννοια (Strict Sense Stationary - SSS) όταν $f(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_k}) = f(x_{t_1+t}, x_{t_2+t}, \ldots, x_{t_k+t})$. Όταν, δηλαδή, η από κοινού σ.π.π. εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και όχι από τις ακριβείς τους χρονικές στιγμές (παρόμοια ορίζεται η SSS για διακριτές στοχαστικές ανελίξεις).

- Μια στοχαστική ανέλιξη είναι Στάσιμη κατά την Ευρεία Έννοια (Wide Sense Stationary - WSS) όταν
  - $m(t) = \mu$ (σταθερή) και
  - $R_{XX}(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$ (εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των δειγμάτων).

- SSS $\Rightarrow$ WSS. WSS + γκαουσιανή $\Rightarrow$ SSS.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις

- Μια στάσιμη στοχαστική ανέλιξη έχει άπειρη ενέργεια (γιατί;).
- Επομένως, δεν είναι δυνατόν να οριστεί μετασχηματισμός Fourier μιας στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης.
- Για τη στατιστική περιγραφή στάσιμων στοχαστικών ανελίξεων στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (ή Φάσμα Ισχύος) (Power Spectral Density - PSD).
- Όπως θα δούμε, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει πόσο γρήγορα 'απο-συσχετίζεται' ένα σήμα, σε αναλογία με το Φάσμα ενός νομοτελειακού σήματος το οποίο περιγράφει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται το σήμα. Επομένως, η Φασματική Πυκνότητα Ισχύος περιγράφει τη μέση κατανομή της ισχύος στο πεδίο της συχνότητας.

Στάσιμες Στοχαστικές Ανελίξεις (2)

- Ισχύς στάσιμης στοχαστικής ανέλιξης: $R_x(0) = E[|X_k|^2]$, $R_x(0) = E[|X(t)|^2]$.

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος: $S_X(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-j\omega kT}$, $S_X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$.

- Με χρήση ιδιοτήτων μετασχηματισμού Fourier, $R_x(0) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} S_X(e^{j\omega T}) d\omega$, $R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(j\omega) d\omega$.

- Η αυτοσυσχέτιση είναι συζυγώς συμμετρική (conjugate symmetric): $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \Rightarrow$ η $S(j\omega)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί εύκολα ότι η $S(j\omega)$ είναι μη αρνητική (π.χ. Lee & Messerschmitt Prob. 3-9).

Ετεροσυσχέτιση, Αμοιβαία Στασιμότητα

- Ετεροσυσχέτιση (**cross-correlation**): $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y^*(t_2)]$.

- Οι $\{X(t)\}$ και $\{Y(t)\}$ είναι αμοιβαία στάσιμες κατά την ευρεία έννοια (jointly WSS) εάν
  - η καθεμία τους είναι WSS και
  - $R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1 - t_2)$

Γραμμικά, Χρονικώς Αμετάβλητα Συστήματα

- Σύστημα S: Μια απεικόνιση της εισόδου του στην έξοδο: $y = s(x)$.
- Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν ισχύουν οι αρχές της ομοιογένειας και της υπέρθεσης: $s(\sum_i \alpha_i x_i) = \sum_i \alpha_i s(x_i)$.
- Ένα σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο όταν έχει την ίδια έξοδο για μια δεδομένη είσοδο, ανεξάρτητα με το πότε η είσοδος εφαρμόζεται στο σύστημα.
- Ένα γραμμικό χρονικώς αμετάβλητο σύστημα (Linear Time Invariant - LTI) μπορεί να περιγραφεί
  - Στο χρόνο με χρήση της κρουστικής απόκρισης (impulse response) h_i ($h(t)$).
  - Στη συχνότητα με χρήση της συνάρτησης μεταφοράς (transfer function) $H(z)$ ($H(s)$) και της απόκρισης συχνότητας (frequency response) $H(e^{j\omega T})$ ($H(j\omega)$).
- Πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα Γραμμικό, Χρονικώς Μεταβαλλόμενο σύστημα;