

ΕΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης
7ο Μάθημα – 29 Νοεμβρίου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
 - Cioffi Ch. 3
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE

Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάρσης

- Έως τώρα χρησιμοποιήσαμε συναρτήσεις οι οποίες ήταν ορθογώνιες μεταξύ τους:

$$\int \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \delta_{i,j}.$$
- Για διαδοχική χρήση καναλιού, το μεταδιδόμενο σήμα έχει τη μορφή $x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{n=1}^N x_{k,n} \phi_n(t - kT) \right)$, όπου N η διάσταση του αστερισμού.
- Το ότι $\int \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \delta_{i,j}$ δε σημαίνει κατ' ανάγκη και ότι $\int \phi_i(t - kT) \phi_j^*(t - lT) dt = \delta_{i,j}$ για $k \neq l$. Επομένως, εάν επιχειρήσουμε να ανακτήσουμε την τιμή της συνιστώσας $x_{p,m}$ θα έχουμε διασυμβολική παρεμβολή από άλλες χρονικές στιγμές: $y_{p,m} = \int (x(t) + n(t)) \phi_m^*(t - pT) dt = \int \left(\sum_{n=1}^N x_{p,n} \phi_n(t - pT) + \sum_{k \neq p} \sum_{n=1}^N x_{k,n} \phi_n(t - kT) + n(t) \right) \phi_m^*(t - pT) dt = x_{p,m} + \underbrace{\sum_{k \neq p} \sum_{n=1}^N \int x_{k,n} \phi_n(t - kT) \phi_m^*(t - pT) dt}_{\text{ISI}} + \underbrace{\int n(t) \phi_m^*(t - pT) dt}_{\text{Θόρυβος}}.$

Διαδοχική Χρήση Καναλιού - Ορθογωνιότητα συναρτήσεων βάσης (2)

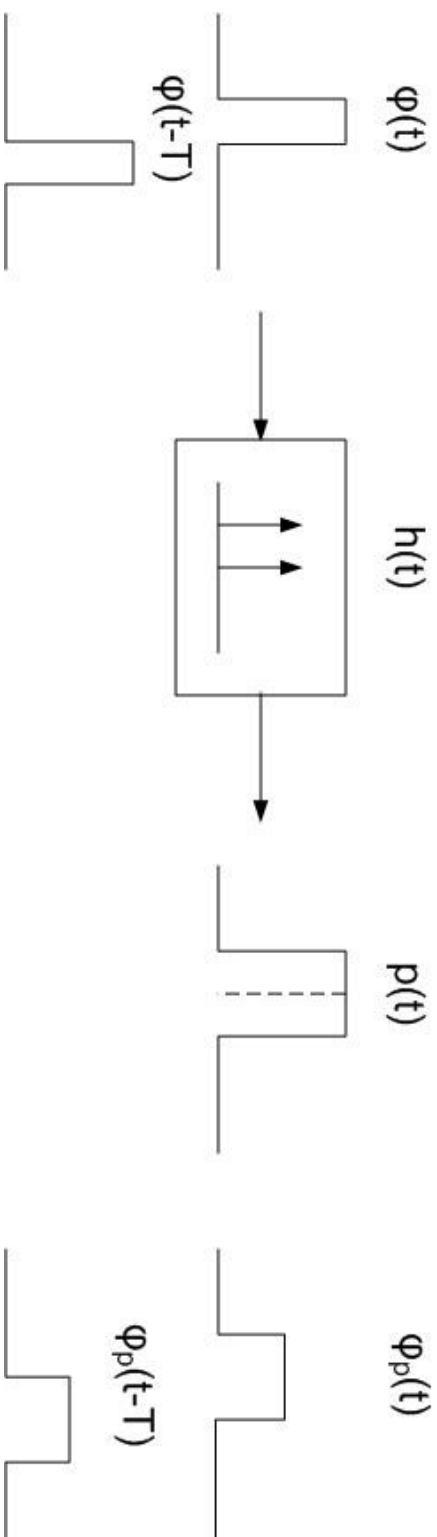
- Στην περίπτωση που οι $\phi_n(t - kT)$ και $\phi_n(t - lT)$ είναι ορθογώνιες για $k \neq l$ και σε κάποιο διάστημα ολοκλήρωσης, δεν εμφανίζεται **ISI** και το διανυσματικό κανάλι που προκύπτει δεν έχει μνήμη.
 - Παράδειγμα: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ εάν η δειγματοληψία γίνει τις χρονικές στιγμές kT .
- Ωστόσο, στη γενική περίπτωση, η ορθογωνιότητα χάνεται όταν οι συναρτήσεις βάσης περάσουν μέσα από το κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης $h(t)$, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται **ISI**.
- Μια λύση είναι να επιλεγούν κατάλληλες $\phi(t)$ των οποίων η συνένιξη με το κανάλι παράγει ορθογώνιες συναρτήσεις.
 - Συνήθως οι $\phi(t)$ εξαρτώνται από το κανάλι. Ωστόσο, υπάρχουν τρόποι διαμόρφωσης με $\phi(t)$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες του $h(t)$ (π.χ. **OFDM**).
- Αλλιώς, είτε εφαρμόζουμε ανίχνευση μέγιστης πιθανοφάνειας στο δέκτη, ή προσπαθούμε να δημιουργήσουμε προσεγγιστικά κανάλι χωρίς μνήμη στο δέκτη με χρήση εξίσωτών.

Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή

- Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ότι $N = 1$ διάσταση (για απλούστευση). Τα αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα σε 2 διαστάσεις με χρήση μιγαδικών ποσοτήτων.
- Επίσης, υπενθυμίζεται μια βασική υπόθεση που έχουμε κάνει έως τώρα (και που θα συνεχίσουμε να κάνουμε σε αυτό το μάθημα): Τα μεταδιδόμενα σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανοημένα (i.i.d.).
- Απόκριση Πάλιμου (pulse response) $p(t) \triangleq \phi(t) * h(t)$, όπου $\phi(t)$ η συνάρτηση βόσης που χρησιμοποιείται για τη μετάδοση.
- Επομένως, η έξοδος του καναλιού ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k \phi(t - kT) * h(t) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_k p(t - kT) + n(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k} \phi_p(t - kT) + n(t)$, όπου $\phi_p(t) = p(t) / \|p\|$ η κανονικοποιημένη απόκριση πάλιμου, $x_{p,k} = \|p\| x_k$ και $\|p\|^2 = \langle p(t), p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) p^*(t) dt$.
- Η συνάρτηση $\phi_p(t)$ είναι κανονικοποιημένη, αλλά όχι κατ' ανάγκη ορθογώνια με τις μετατοπίσεις της $\phi_p(t - kT)$.

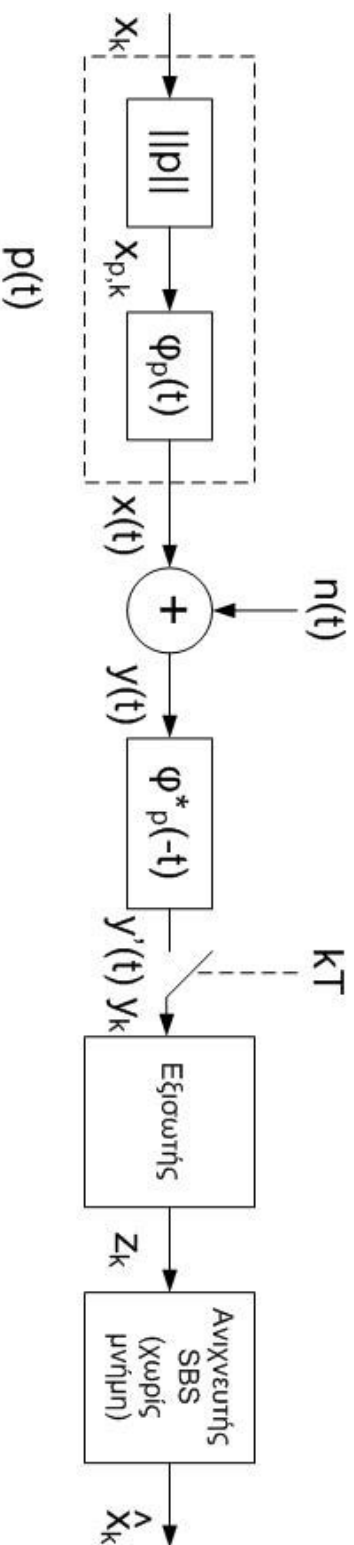
Παράδειγμα (Cioffi 3.1.2)

- Θεωρούμε διαμόρφωση με χρήση της $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t - T))$ (τετραγωνικός παλμός) και κανάλι με $h(t) = \delta(t) + \delta(t - T)$.
- Η απόκριση παλμού ισούται με $p(t) = \phi(t) * h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t - T)) + \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t - T) - u(t - 2T)) = \frac{1}{\sqrt{T}}(u(t) - u(t - 2T))$.
- $\phi_p(t) = \frac{p(t)}{\|p\|} = \frac{1}{\sqrt{2T}}(u(t) - u(t - 2T))$.
- Παρόλο που οι $\phi(t)$ και $\phi(t - T)$ είναι ορθογώνιες, οι $\phi_p(t)$ και $\phi_p(t - T)$ δεν είναι.

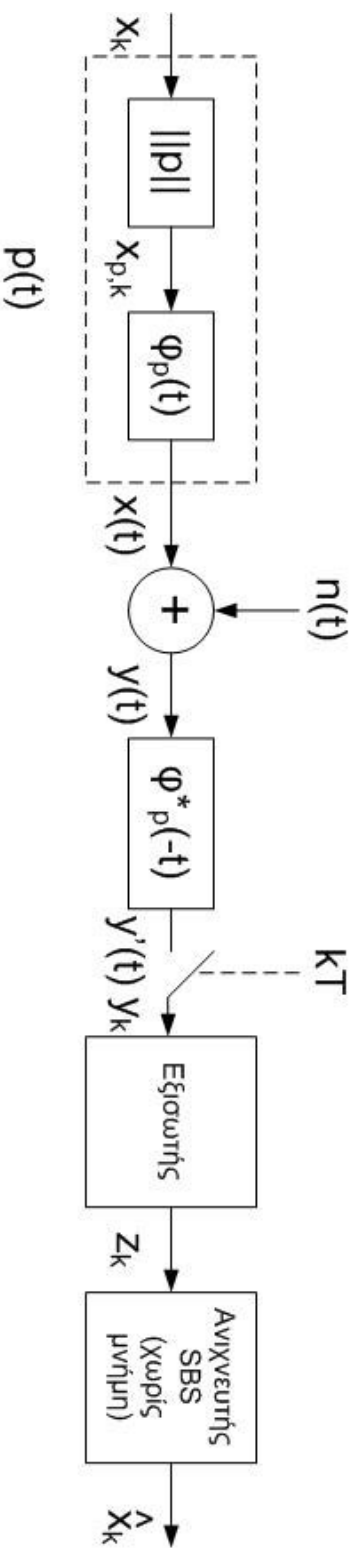


Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (2)

- Είδαμε ότι το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη ισούται με $y(t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k} \phi_p(t - kT) + n(t)$.
- Στα επόμενα θεωρούμε **AWGN** κανάλι (στην περίπτωση **ACGN** καναλιού μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ισοδύναμο **AWGN** κανάλι όπως περιγράφηκε προηγουμένως).
- Στο δέκτη χρησιμοποιούμε ανιχνευτή προσαρμοσμένου φίλτρου $\phi_p^*(-t)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Αποδεικνύεται ότι τα δείγματα y_k αρκούν για την περιγραφή του συνεχούς σήματος $y(t)$, αρκεί $\|p\| < \infty$.



Μοντέλο Καναλιού με Διασυμβολική Παρεμβολή (3)



- $y'(t) = y(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} x_{p,k} \phi_p(t - kT) * \phi_p^*(-t) + n(t) * \phi_p^*(-t) = \sum_{k=0}^{K-1} \|p\| x_k q(t - kT) + n'(t)$, όπου $q(t) \triangleq \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) = \frac{p(t) * p^*(-t)}{\|p\|^2}$.
- Αποδεικνύεται εύκολα ότι $q^*(-t) = q(t)$ και $q(0) = 1$.
- Έστω $y_k \triangleq y(kT)$, $q_k \triangleq q(kT)$ και $n'_k \triangleq n'(kT)$.

$$y_k = \underbrace{\|p\| x_k}_{\text{επιθυμητό σήμα (με διαφορετικό πλάτος)}} + \|p\| \underbrace{\sum_{m \neq k} x_m q_{k-m}}_{\text{ISI}} + \underbrace{n'_k}_{\text{θόρυβος}}$$

Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης

- $y_k = \|p\|x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k$.
- Κριτήριο Μέγιστης Παραμόρφωσης (Peak Distortion Criterion):
 $\mathcal{D}_p \triangleq |x|_{\max} \|p\| \sum_{m \neq 0} |q_m|$.
- Αντιστοιχεί στο χειρότερο σενάριο που μπορεί να συμβεί σε ένα κανάλι **ISI** (όλα τα παρεμβολάσιμα σύμβολα να έχουν το μέγιστο δυνατό πλάτος).
- $P_e \leq N_e Q \left(\frac{\|p\| \frac{d_{\min}}{2} - \mathcal{D}_p}{\sigma} \right)$ (εάν $2\mathcal{D}_p \leq \|p\|d_{\min}$).
- Συνήθως η ακραία αυτή περίπτωση εμφανίζεται σπάνια με αποτέλεσμα ο χαρακτηρισμός του **ISI** με χρήση της \mathcal{D}_p να οδηγεί σε πολύ απαισιόδοξες εκτιμήσεις.

Μέση Τετραγωνική Παραμόρφωση

- Εάν τα διαδοχικά σήματα x_k είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα (i.i.d.), η μέση τετραγωνική παραμόρφωση (Mean-Square Distortion) ορίζεται ως

$$\mathcal{D}_{ms} \triangleq \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} \right|^2 \right\} = \mathcal{E}_x \|p\|^2 \sum_{m \neq 0} |q_m|^2.$$

- Όταν χρησιμοποιούμε τη μέση τετραγωνική παραμόρφωση για το χαρακτηρισμό του ISI υποθέτουμε ότι η διασυμβολική παρεμβολή ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή και ότι είναι ασυσχέτιστη με το θόρυβο n'_k . Η προσέγγιση είναι πιο ακριβής σε συστήματα με μεγάλους αστερισμούς και κωδικοποίηση.

- $P_e \approx N_e Q \left(\frac{\|p\| d_{\min}}{2\sqrt{\sigma^2 + \mathcal{D}_{ms}}} \right)$.

Φράγμα Προσαρμοσμένου Φίλτρου – Matched Filter Bound

- Δεδομένης της παλμικής απόκρισης $p(t)$ και του ασπρισμού $\{x_k\}$, ο σηματο-θορυβικός λόγος του προσαρμοσμένου φίλτρου SNR_{MFB} ορίζεται ως

$$\text{SNR}_{\text{MFB}} = \frac{\bar{\xi}_x \|p\|^2}{\frac{N_0}{2}},$$

δηλαδή ο σηματοθορυβικός λόγος στο δέκτη όταν το κανάλι **ISI** χρησιμοποιείται για τη μετάδοση ενός μόνο συμβόλου (με αποτέλεσμα να μην εμφανίζεται **ISI**).

- Δεδομένου ότι η μετάδοση περισσότερων του ενός συμβόλων θα δημιουργήσει διασυμβολική παρεμβολή (εκτός εάν τα μεταδιδόμενα σύμβολα είναι συσχετισμένα και λαμβάνεται υπόψη το κανάλι), ο SNR_{MFB} είναι ο μέγιστος δυνατός **SNR** που μπορεί να εμφανιστεί στο δέκτη όταν τα x_k είναι **i.i.d.**
- Συχνά, η επίδοση των εξισωτών συγκρίνεται με τον SNR_{MFB} ο οποίος αποτελεί άνω φράγμα (για **i.i.d.** x_k). Ωστόσο αυτό δε σημαίνει ότι σε ένα κανάλι **ISI** μπορούμε πάντα να φτάσουμε τον SNR_{MFB} (εκτός εάν βελτιστοποιήσουμε και το μεταδιδόμενο σήμα (**transmit optimization**) με αποτέλεσμα τα x_k να μην είναι πλέον **i.i.d.** στη γενική περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση ενδέχεται να μπορούμε να υπερβούμε τον SNR_{MFB}).

Κριτήριο Nyquist

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
 - Cioffi Ch. 3
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE

Κριτήριο Nyquist

- Είδαμε ότι $y_k = \|p\| x_k + \|p\| \sum_{m \neq k} x_m q_{k-m} + n'_k$.
- Κριτήριο Nyquist: Σε ένα κανάλι με παλμική απόκριση $p(t)$ δεν εμφανίζεται ISI όταν $q_k = \delta_k$ ή, ισοδύναμα, όταν

$$Q(e^{-j\omega T}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{-j\omega k T} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(\omega + \frac{2\pi n}{T}) = 1. \quad Q(\omega) = \mathcal{F}\{q(t)\}.$$

- Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν το κριτήριο Nyquist ονομάζονται παλμοί Nyquist.
- Παράδειγμα: $q(t) = \text{sinc}(\frac{t}{T}) \rightarrow \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(\frac{t}{T})$
 $q(t) = \phi_p(t) * \phi_p^*(-t) \Rightarrow Q(f) = |\Phi_p(f)|^2 \Rightarrow |\Phi_p(f)|^2 = \mathcal{F}\{\text{sinc}(\frac{t}{T})\} = T\Pi(fT) \Rightarrow \Phi_p(f) = \sqrt{T}\Pi(fT) \Rightarrow \phi_p(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{sinc}(\frac{t}{T})$.
- Όπως είδαμε, δεδομένου ότι $p(t) = \phi(t) * h(t)$, οι $q(t)$ και $\phi_p(t)$ εξαρτώνται από τη συναρτηση βάσης $\phi(t)$ και από το κανάλι $h(t)$. Επομένως η $\phi(t)$ πρέπει να επιλεγεί με βάση το κανάλι $h(t)$.
- Πολλές φορές τα συστήματα επικοινωνιών χρησιμοποιούν συναρτήσεις Nyquist (ή σχεδόν Nyquist) ως συναρτήσεις βάσης $\phi(t)$. Αυτό δε σημαίνει, κατ' ανάγκη, ότι ικανοποιείται το κριτήριο Nyquist στο δέκτη.

Παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου – **Raised Cosine Pulses**

- Ο παλμός **sinc** είναι ο παλμός με το μικρότερο εύρος ζώνης ο οποίος ικανοποιεί το κριτήριο **Nyquist** για ρυθμό μετάδοσης $\frac{1}{T}$.
- Ωστόσο, το πλάτος του μειώνεται γραμμικά με το χρόνο. Εάν η δειγματοληψία δε γίνει στις σωστές χρονικές στιγμές kT , το πλάτος της διασυμβολικής παρεμβολής ελαττώνεται γραμμικά με το χρόνο.
- Για το λόγο αυτό σε πολλά συστήματα επιλέγονται παλμοί **Nyquist** με μεγαλύτερο εύρος ζώνης των οποίων το πλάτος ελαττώνεται πιο απότομα με αποτέλεσμα να μειώνεται και η διασυμβολική παρεμβολή σε γειτονικά σύμβολα όταν υπάρχει σφάλμα στο χρόνο δειγματοληψίας.
- Σε πολλά συστήματα χρησιμοποιούνται παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου (**Raised Cosine Pulses**).

Παλμοί ανυψωμένου συνημιτόνου – **Raised Cosine Pulses** (2)

- $q(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\alpha t}{T}\right)^2} \right]$, όπου $0 \leq \alpha \leq 1$ ισούται με το ποσοστό πλεονάζοντος εύρους ζώνης (percent excess bandwidth, αλλιώς rolloff factor).
- Ο παλμός **raised cosine** είναι μη μηδενικός στο διάστημα $|\omega| \in [-(1 + \alpha)\frac{\pi}{T}, (1 + \alpha)\frac{\pi}{T}]$. Για $\alpha > 0$, το πλάτος του ελαττώνεται $\sim \frac{1}{t^3}$.
- $\phi_p(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T}} \frac{\cos\left([1+\alpha]\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{T \sin\left([1-\alpha]\frac{\pi t}{T}\right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2}$.
- Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. Cioffi Ch. 3.

Εξισωτής Επιβολής Μηδενισμών –

Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
- Κριτήριο Nyquist
- Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
 - Cioffi Ch. 3
- Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE

Υπενθύμιση: Τι αποπειράται να πετύχει ένας εξισωτής

- Είδαμε ότι ένα κανάλι με διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: $y_k = \underbrace{\|p\|}_{\text{απόδοση}} x_k + n_k$.
- Το κανάλι δεν είναι πλέον **AWGN**. έχει μνήμη.
- Ο εξισωτής είναι ένα φίλτρο (γραμμικό ή μη γραμμικό) το οποίο επιχειρεί να μετατρέψει το κανάλι **ISI** σε κανάλι της μορφής $z_k = x_k + n'_k$ (χωρίς μνήμη).
- Αυτό δε σημαίνει ότι κατά τη μετατροπή δεν έχουμε απώλεια στην απόδοση του συστήματος. Στην γενική περίπτωση, ο δέκτης με εξισωτή δεν είναι βέλτιστος.



Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE

- Ο πιο απλός εξισωτής, αλλά με τις μεγαλύτερες απώλειες (στη γενική περίπτωση)
- $y_k = \|p\| x_k * q_k + n_k \Rightarrow Y(z) = \|p\| X(z)Q(z) + N(z)$.
- Η ιδέα: Να αγνοήσουμε το θόρυβο και χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο $W(z)$ το οποίο αντιστρέφει το κανάλι.
- $W(z)\|p\|X(z)Q(z) = X(z) \Rightarrow$

$W(z) = \frac{1}{Q(z)\ p\ }$

- Ο εξισωτής $W(z)$ προσπαθεί να μηδενίσει τη διασυμβολική παρεμβολή και να προσεγγίσει το κριτήριο **Nyquist** στην έξοδό του την οποία στέλνει στον ανιχνευτή. ‘Επιβάλλει’ μηδενισμούς σε όλα τα q_k εκτός από το q_0 .

Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE (2)

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο θόρυβος στην έξοδο του ZF-LE είναι γκαουσιανός (αλλά όχι απαραίτητα λευκός) με PSD ανά διάσταση $\bar{R}_{\text{ZF-LE}}(z) = \frac{N_0}{\|p\|_2^2 Q(z)}$.
- Επομένως, ο θόρυβος ενισχύεται σε συχνότητες όπου το μέτρο της $Q(z)$ είναι μικρό. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένη απόδοση όταν η $Q(z)$ παίρνει μικρές τιμές σε κάποιες από τις συχνότητες που χρησιμοποιεί ένα σύστημα.
- Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί ότι $\text{SNR}_{\text{MFB}}/\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} = \gamma_{\text{ZF-LE}}$, όπου $\gamma_{\text{ZF-LE}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{Q(e^{-j\omega T})} d\omega = w_0 \|p\| \geq 1$ και w_0 ο κεντρικός συντελεστής του φίλτρου $W(z)$. $\gamma_{\text{ZF-LE}} = 1$ όταν $Q(z) = 1$ (δηλαδή το κανάλι δεν έχει ISI).
- $P_{e, \text{ZF-LE}} \approx N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_{\text{ZF-LE}}}\right)$, όπου $\sigma_{\text{ZF-LE}} = \sqrt{\frac{\xi_a}{\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}}}$.
- Στην πράξη ο εξισωτής ZF-LE υλοποιείται ως φίλτρο FIR. Η απόδοση του εξισωτή σε σχέση με το μέγιστο $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}$ εξαρτάται από το μήκος του φίλτρου.

Εξισωτής Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος – **MMSE-LE**

- Διαδοχική μετάδοση και διασυμβολική παρεμβολή
 - Κριτήριο Nyquist
 - Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
 - Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
- Cioffi Ch. 3

Εξισωτής Ελάχιστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE

- Η απόδοση του εξισωτή ZF-LE επηρεάζεται σημαντικά από περιοχές όπου η $Q(z)$ βρίσκεται κοντά στο 0 λόγω της μεγάλης ενίσχυσης του θορύβου στις περιοχές αυτές.
- Έστω το σφάλμα εξισωτή $e_k = x_k - z_k = x_k - w_k * y_k$ (Χρησιμοποιούμε και πάλι γραμμικό φίλτρο).
- Η ιδέα: Να βρεθεί ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο $W(z)$ το οποίο να ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MMSE) $E[|e_k|^2] = E[|x_k - w_k * y_k|^2]$.

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (2)

- Αποδεικνύεται ότι το γραμμικό φίλτρο που ελαχιστοποιεί το MMSE δίνεται από τη σχέση

$$W(z) = \frac{1}{\|p\| \left(Q(z) + \frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}} \right)}.$$

- Συγκρίνοντας με το ZF-LE, έχει προστεθεί ο όρος $\frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}}$ στον παρονομαστή, με αποτέλεσμα, όταν το μέτρο της $Q(z)$ είναι πολύ μικρό, ο θόρυβος να μην απειρίζεται. Για να γίνει αυτό πρέπει να 'περάσει' ένα μέρος του ISI στην έξοδο (δεδομένου ότι δεν αντιστρέφεται πλήρως το κανάλι).
- Ο MMSE-LE επιτυγχάνει μια εξισορρόπηση ανάμεσα στην καταπολέμηση του ISI και στην ισχύ του θορύβου που δημιουργεί στην έξοδό του. Δηλαδή, χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η μέση ενέργεια του αθροίσματος του εναπομείναντος ISI και του θορύβου όταν δε μηδενίζεται όλο το ISI είναι μικρότερη από την ενέργεια του θορύβου εάν η απαίτηση είναι να μην παραμείνει καθόλου ISI στην έξοδο του εξισωτή.

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (3)

- Ο εξισωτής MMSE-LE είναι πολωμένος (biased), δηλαδή $E[z_k|x_k] = \alpha x_k$. Η πόλωση αιτιάζεται με πολλαπλασιασμό με $1/\alpha$.
- $\alpha = \left(1 - \frac{\sigma_x^2 \text{MMSE-LE}}{\mathcal{E}_x} \right)$, $\sigma_x^2 \text{MMSE-LE} = w_0 \frac{N_0/2}{\|p\|}$, όπου w_0 ο κεντρικός συντελεστής του φίλτρου $W(z)$.
- Αποδεικνύεται ότι $\text{SNR}_{\text{MFB}}/\text{SNR}_{\text{MMSE-LE,U}} = \gamma_{\text{MMSE-LE}}$, όπου $\text{SNR}_{\text{MMSE-LE,U}}$ ο σηματο-θρομβικός λόγος μετά την απο-πόλωση. Επειδή ο εξισωτής MMSE-LE είναι πολωμένος η έκφραση για το $\gamma_{\text{MMSE-LE}}$ είναι πιο πολύπλοκη από αυτή για το $\gamma_{\text{ZF-LE}}$ (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 3).

Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (4)

- Αποδεικνύεται, επίσης, ότι $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} \leq \text{SNR}_{\text{MMSE-LE}, U} \leq \text{SNR}_{\text{MMFB}}$. Επιπλέον, ο εξισωτής MMSE-LE έχει καλύτερο SNR από το ZF-LE το οποίο ήταν αναμενόμενο δεδομένου ότι εξ ορισμού ο MMSE-LE ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (και άρα το θόρυβο στην ανίχνευση του x_k).
- $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} \approx \text{SNR}_{\text{MMSE-LE}, U}$ για μεγάλα SNR ή για κανάλια χωρίς ISI ($Q(z) = 1$).
- $P_{e, \text{MMSE-LE}} \approx N_e Q \left(\sqrt{k \text{SNR}_{\text{MMSE-LE}, U}} \right)$, αν και ο θόρυβος δεν είναι γκαουσιανός (δεδομένου ότι το σφάλμα περιέχει και συνιστώσα που εξαρτάται από το μη γραμμισιανό x_k).
- Δεδομένου ότι τόσο ο ZF-LE όσο και ο MMSE-LE είναι γραμμικά φίλτρα τα οποία δε διαφέρουν στην πολυπλοκότητα παρά μόνο στους συντελεστές, προτιμάται η χρήση του MMSE-LE.