

ΕΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών  
Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάκης  
11ο Μάθημα – 2 Ιουλίου 2007

# Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

---

- **Εξισώσεις**

- I. Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE
  - II. Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE
  - III. Decision Feedback Equalizer - DFE
    - Cioffi Ch. 3
- Το ασύρματο (wireless) κανάλι (εισαγωγή).

## Υπενθύμιση: Τι αποπειράται να πετύχει ένας εξισωτής

---

- Είδαμε ότι ένα κανάλι με διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:  $y_k = \|\rho\| x_k * q_k + n_k$ .
- Το κανάλι δεν είναι πλέον **AWGN**. έχει μνήμη.
- Ο εξισωτής είναι ένα φίλτρο (γραμμικό ή μη γραμμικό) το οποίο επιχειρεί να μετατρέψει το κανάλι **ISI** σε κανάλι της μορφής  $z_k = x_k + n'_k$ .
- Αυτό δε σημαίνει ότι κατά τη μετατροπή δεν έχουμε απώλεια στην απόδοση του συστήματος. Στην γενική περίπτωση, ο δέκτης με εξισωτή δεν είναι βέλτιστος.



## Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE

---

- Ο πιο απλός εξισωτής, αλλά με τις μεγαλύτερες απώλειες (στη γενική περίπτωση)
- $y_k = \|p\|x_k * q_k + n_k \Rightarrow Y(z) = \|p\|X(z)Q(z) + N(z)$ .
- Η ιδέα: Να αγνοήσουμε το θόρυβο και χρησιμοποιήσουμε ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο  $W(z)$  το οποίο αντιστρέφει το κανάλι.
- $W(z)\|p\|X(z)Q(z) = X(z) \Rightarrow$ 

$W(z) = \frac{1}{Q(z)\ p\ }$
------------------------------
- Ο εξισωτής  $W(z)$  προσπαθεί να μηδενίσει τη διασυμβολική παρεμβολή και να προσεγγίσει το κριτήριο **Nyquist** στην έξοδό του την οποία στέλνει στον ανιχνευτή.

## Zero Forcing Linear Equalizer – ZF-LE (2)

---

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο θόρυβος στην έξοδο του ZF-LE είναι γκαουσιανός (αλλά όχι απαραίτητα λευκός) με PSD ανά διάσταση  $\bar{R}_{\text{ZF-LE}}(z) = \frac{N_0}{\|p\|_2^2 Q(z)}$ .
- Επομένως, ο θόρυβος ενισχύεται σε συχνότητες όπου το μέτρο της  $Q(z)$  είναι μικρό. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε μειωμένη απόδοση όταν η  $Q(z)$  παίρνει μικρές τιμές σε κάποιες από τις συχνότητες που χρησιμοποιεί ένα σύστημα.
- Μπορεί, επίσης, να αποδειχθεί ότι  $\text{SNR}_{\text{MFB}}/\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} = \gamma_{\text{ZF-LE}}$ , όπου  $\gamma_{\text{ZF-LE}} = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \frac{1}{Q(e^{-j\omega T})} d\omega = w_0 \|p\| \geq 1$  και  $w_0$  ο κεντρικός συντελεστής του φίλτρου  $W(z)$ .  $\gamma_{\text{ZF-LE}} = 1$  όταν  $Q(z) = 1$  (δηλαδή το κανάλι δεν έχει ISI).
- $P_{e, \text{ZF-LE}} \approx N_e Q\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_{\text{ZF-LE}}}\right)$ , όπου  $\sigma_{\text{ZF-LE}} = \sqrt{\frac{\xi_a}{\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}}}$ .
- Στην πράξη ο εξισωτής ZF-LE υλοποιείται ως φίλτρο FIR. Η απόδοση του εξισωτή σε σχέση με το μέγιστο  $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}}$  εξαρτάται από το μήκος του φίλτρου.

## Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE

---

- Η απόδοση του εξισωτή ZF-LE επηρεάζεται σημαντικά από περιοχές όπου η  $Q(z)$  βρίσκεται κοντά στο 0 λόγω της μεγάλης ενίσχυσης του θορύβου στις περιοχές αυτές.
- Έστω το σφάλμα εξισωτή  $e_k = x_k - z_k = x_k - w_k * y_k$  (χρησιμοποιούμε και πάλι γραμμικό φίλτρο).
- Η ιδέα: Να βρεθεί ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο φίλτρο  $W(z)$  το οποίο να ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MMSE)  $E[|e_k|^2] = E[|x_k - w_k * y_k|^2]$ .
- Το γραμμικό φίλτρο που ελαχιστοποιεί το MMSE δίνεται από τη σχέση

$$W(z) = \frac{1}{\|p\| \left( Q(z) + \frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}} \right)}.$$

- Συγκρίνοντας με το ZF-LE, έχει προστεθεί ο όρος  $\frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}}$  στον παρονομαστή, με αποτέλεσμα όταν το μέτρο της  $Q(z)$  είναι πολύ μικρό, ο θόρυβος να μην απειρίζεται.
- Ο MMSE-LE επιτυγχάνει μια εξισορρόπηση ανάμεσα στην καταπολέμηση του ISI και στην ισχύ του θορύβου που δημιουργεί στην έξοδό του.

## Minimum Mean Square Error Linear Equalizer – MMSE-LE (2)

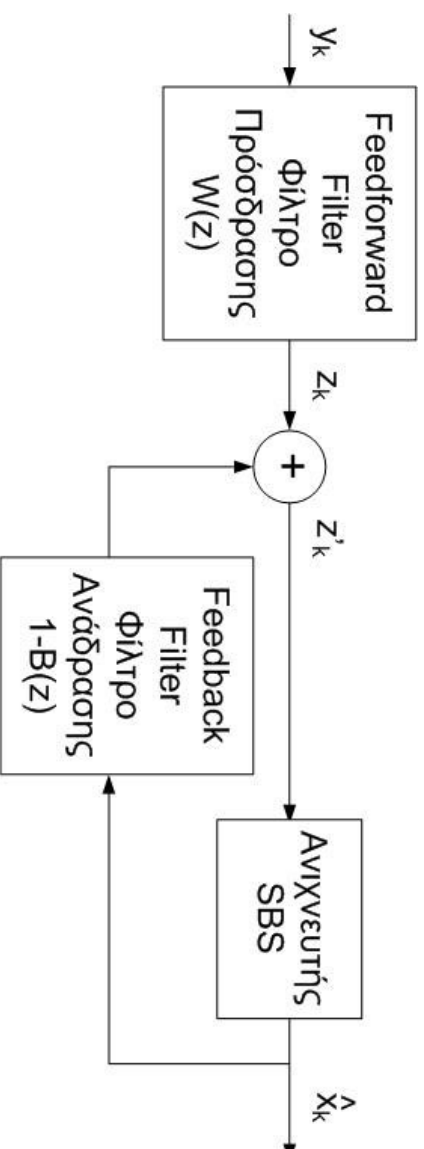
---

- Ο εξισωτής MMSE-LE είναι πολωμένος (biased), δηλαδή  $E[z_k|x_k] = \alpha x_k$ . Η πόλωση αιωλείφεται με πολυαπλασιασμό με  $1/\alpha$ .
- Αποδεικνύεται ότι  $\text{SNR}_{\text{RMMSE-LE}}/\text{SNR}_{\text{RMMSE-LE,U}} = \gamma_{\text{MMSE-LE}}$ , όπου  $\text{SNR}_{\text{RMMSE-LE,U}}$  ο σηματο-θρορυβικός λόγος μετά την απο-πόλωση. Επειδή ο εξισωτής MMSE-LE είναι πολωμένος η έκφραση για το  $\gamma_{\text{MMSE-LE}}$  είναι πιο πολύπλοκη από αυτή για το  $\gamma_{\text{ZF-LE}}$  (βλ. π.χ. Cioffi Ch. 3).
- Επίσης,  $\text{SNR}_{\text{ZF-LE}} \leq \text{SNR}_{\text{RMMSE-LE,U}} \leq \text{SNR}_{\text{RMMSE-LE}}$ . Επομένως, ο εξισωτής MMSE-LE έχει καλύτερο SNR από το ZF-LE το οποίο ήταν αναμενόμενο δεδομένου ότι εξ ορισμού ο MMSE-LE ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (και άρα το θόρυβο στην ανίχνευση του  $x_k$ ).
- $P_{e,\text{MMSE-LE}} \approx N_e Q\left(\sqrt{k \text{SNR}_{\text{RMMSE-LE,U}}}\right)$ , αν και ο θόρυβος δεν είναι γκαουσιανός (δεδομένου ότι το σφάλμα περιέχει και συνητωσά που εξαρτάται από το μη γκαουσιανό  $x_k$ ).
- Δεδομένου ότι τόσο ο ZF-LE όσο και ο MMSE-LE είναι γραμμικά φίλτρα τα οποία διαφέρουν μόνο στους συντελεστές, προτιμάται η χρήση του MMSE-LE.

## Decision Feedback Equalizer – DFE

---

- Οι ZF-LE και MMSE-LE είναι γραμμικά φίλτρα.
- Ο DFE είναι ένα μη γραμμικό φίλτρο το οποίο αποτελείται από 2 γραμμικά φίλτρα και ένα κύκλωμα απόφασης (ανιχνευτής Symbol-by-Symbol).
- Η ιδέα: Εάν σε ένα κανάλι έχουμε εκτιμήσει σωστά τα προηγούμενα  $x_i$  που μεταδόθηκαν (έως και το  $x_{k-1}$ ), μπορούμε να τα αφαιρέσουμε από το  $y_k$  με αποτέλεσμα η ποσότητα που απομένει να εξαρτάται μόνο από το προς εκτίμηση σύμβολο  $x_k$ .





## Decision Feedback Equalizer – DFE (2)

---

- Η συμπεριφορά του DFE εξαρτάται από το αν οι αποφάσεις του ανιχνευτή είναι σωστές. Όταν γίνουν σφάλματα, επηρεάζουν και μελλοντικές αποφάσεις. Το πρόβλημα αυτό που χαρακτηρίζει τους εξισωτές DFE ονομάζεται διάδοση σφαλμάτων (*error propagation*).
- Η ανάλυση και η σχεδίαση του DFE γίνεται υποθέτοντας ότι δε γίνονται λάθη με αποτέλεσμα να μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές γραμμικών συστημάτων.
- Όπως και στα γραμμικά φίλτρα, υπάρχουν δύο τύποι DFE, ο ZF-DFE και ο MMSE-DFE. Στα επόμενα θα αναφερθούμε στον MMSE-DFE του οποίου ο ZF-DFE είναι ειδική περίπτωση.

## Decision Feedback Equalizer – DFE (3)

---

- Αποδεικνύεται ότι τα φίλτρα πρόσδρασης (feedforward filter) και ανάδρασης (feedback) ισούνται με

$$W(z) = \frac{1}{\|p\| \gamma_0 G^*(z^{-*})}, \text{ και } B(z) = G(z), \text{ αντίστοιχα,}$$

όπου  $G(z)$  είναι ο μοναδικός κανονικός παράγοντας της φασματικής παραγοντοποίησης  $Q(z) + \frac{1}{\text{SNR}_{\text{MFB}}} = \gamma_0 G(z) G^*(z^{-*})$ .

- Κανονικός παράγοντας: Αιτιατός ( $g_k = 0$  για  $k < 0$ ), monic ( $g_0 = 1$ ) και ελάχιστης φάσης (όλοι οι πόλοι εντός του μοναδιαίου κύκλου και όλα τα μηδενικά επάνω η μέσα στο μοναδιαίο κύκλο).

## Decision Feedback Equalizer – DFE (4)

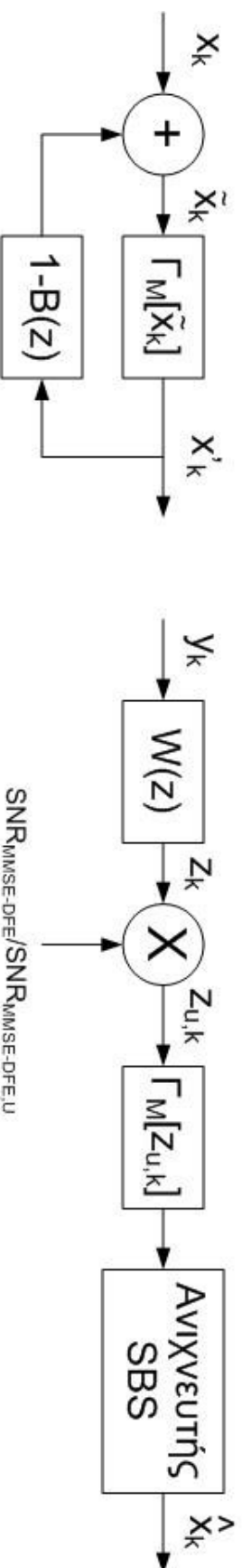
---

- Ο MMSE-DFE είναι πολλαπλός.
- Αποδεικνύεται ότι  $\text{SNR}_{\text{MMSE-DFE},U} = \gamma_0 \text{SNR}_{\text{MFB}} - 1$ , όπου  $\gamma_0 = \frac{1 + \text{SNR}_{\text{MFB}}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} |g_i|^2}$ .
- Εάν δε γίνονται λάθη στην εκτίμηση των  $x_k$ , ο MMSE-DFE είναι τουλάχιστον όσο καλός είναι και ένας MMSE-LE, δεδομένου ότι ο τελευταίος είναι μια ειδική περίπτωση MMSE-LE με  $B(z) = 1$ .
- Ωστόσο, η απόδοση του MMSE-DFE μπορεί να μην είναι καλή σε κανάλια με σχετικά υψηλή πιθανότητα σφάλματος όπου εμφανίζεται συχνά διάδοση σφαλμάτων.

## Ο προκωδικοποιητής (precoder) Tomlinson-Harashima

---

- Ένας τρόπος για να αντιμετωπιστεί η διάδοση σφαλμάτων στο DFE είναι με χρήση προκωδικοποιητή Tomlinson-Harashima.
- Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συνδυασμός πομπού και δέκτη του σχήματος έχει ίδια απόδοση με το DFE, χωρίς να εμφανίζεται διάδοση σφάλματος. Ο  $\Gamma_M(\cdot)$  είναι ο τελεστής υπολοίπου (modulo operator).  $\Gamma_M(x) = x - Md \lfloor \frac{x + \frac{Md}{2}}{Md} \rfloor$  για PAM και SQ-QAM.
- Το κόστος: Μικρή αύξηση της απαιτούμενης ισχύος για τη μετάδοση: κατά  $\frac{M^2}{M^2-1}$  για QAM, περισσότερο για μη τετραγωνικούς αστερισμούς.
- Πάντως, η αύξηση της ισχύος είναι της τάξης των λίγων dB.



## Το ασύρματο (**wireless**) κανάλι

---

- Εξισωτές
- Το ασύρματο (**wireless**) κανάλι (εισαγωγή).
  - Tse & Viswanath, Ch.2

## Το ασύρματο (**wireless**) κανάλι

---

- Αλλαγή πλεύσης
- Μέχρι τώρα είδαμε πώς μπορούμε να μεταδώσουμε από ένα σημείο σε ένα άλλο (**point-to-point**). Θεωρήσαμε σταθερό και δεδομένο κανάλι, γνωστό τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη. Η μόνη άγνωστη ποσότητα (επιπλέον των μεταδιδόμενων μηνυμάτων) ήταν ο θόρυβος.
- Στην πράξη, το κανάλι μπορεί να μην είναι γνωστό στον πομπό ή στο δέκτη ή και στους δύο. Για να επιτευχθεί επικοινωνία με σύμφωνη (**coherent**) μετάδοση πρέπει να εκτιμηθεί το κανάλι στο δέκτη, αλλιώς πρέπει χρησιμοποιηθεί ασύμφωνη (**non-coherent**) μετάδοση.
- Εάν το κανάλι είναι γνωστό και στον πομπό, ενδέχεται να είναι δυνατή περαιτέρω αύξηση του ρυθμού μετάδοσης με χρήση βελτιστοποιήσης εκπεμπόμενου σήματος (**transmit optimization**).
- Πολλά ασύρματα κανάλια όχι μόνο δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων, αλλά, επιπλέον, μεταβάλλονται στο χρόνο.

## Το ασύρματο ( **wireless** ) κανάλι (2)

---

Στις επόμενες δύο διαλέξεις θα δούμε

- Ποια φαινόμενα επηρεάζουν τα σήματα στα ασύρματα κανάλια;
- Πώς μοντελοποιούμε τα ασύρματα κανάλια;
- Τι είδους προβλήματα και προκλήσεις παρουσιάζει η χρήση ασύρματων καναλιών;
- Κάποιους από τους τρόπους αύξησης του ρυθμού μετάδοσης ή της αξιοπιστίας μετάδοσης σε ασύρματα κανάλια.