ΕΕ725 - Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης - Αλέξανδρος Τουμπακάρης

3ο Μάθημα – 18 Μαΐου 2007

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
  - Proakis Ch. 4, Lee & Messerschmitt Ch. 2, Cioffi Ch. 1
  - Καλή αναφορά για θέματα άλγεβρας / διανυσματικών χώρων:
    S. Boyd, EE263 class notes: `www.stanford.edu/class/ee263/`.
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Είναι δυνατόν να παραστήσουμε τα σήματα σε ένα Ψηφιακό Σύστημα Επικοινωνιών ως διανύσματα (vectors), να ορίσουμε, δηλαδή, διανυσματικό χώρο (vector space) διακριτών και διανυσματικό χώρο συνεχών σημάτων.
- Η αναπαράσταση ως διανύσματα πολλές φορές απλοποιεί το σχεδιασμό και διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Προτάθηκε αρχικά από τους Wozencraft και Jacobs.
- Στα επόμενα παραθέτουμε την αντιστοιχία μεταξύ της αναπαράστασης σημάτων στο χώρο (ως κυματομορφές) και της αναπαράστασής τους ως διανύσματα.

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα (2)

- Ένας <u>γραμμικός</u> ή <u>διανυσματικός χώρος</u> $\mathcal{V}$ αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{x}\}$ και από δύο πράξεις: πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με σταθερά.

  Διακριτά σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x[k],\ k \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους).

  Συνεχή σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x(t),\ t \in \mathcal{S}$ (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς).
- Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σήματα έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$\sum_{k\in\mathcal{S}} |y[k]|^2 < \infty, \qquad \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- Πρόσθεση: $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x[k]+y[k] \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x(t)+y(t) \; \forall \; t \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Επίσης, ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $\mathbf{0}$ (μηδενικό σήμα), καθώς και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης $-\mathbf{x}$ (αντίθετο σήμα).
- Πολλαπλασιασμός με σταθερά: $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x[k] \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x(t) \; \forall \; t \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ($x[k] = 1 \; \forall \; k \in \mathcal{S}$, $x(t) = 1 \; \forall \; k \in \mathcal{S}$). Τέλος, ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$, $(\alpha+\beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.

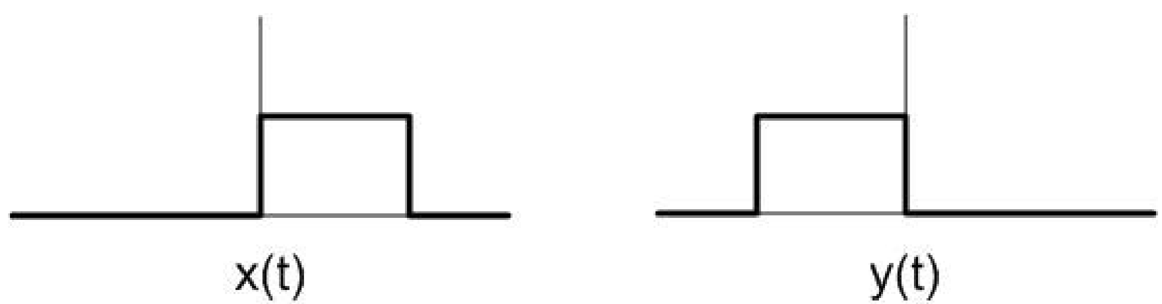
Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ στο $N-$διάστατο Ευκλείδειο χώρο ισούται με $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k^*$ (υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά).
- Για το χώρο σημάτων, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο (inner product) ως εξής:
  - Διακριτά σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} x[k] y[k]^*$.
  - Συνεχή σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau$.

  Ο διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert (εφόσον ο χώρος είναι πλήρης – υποθέτουμε ότι είναι).
- Το μέτρο (norm) $||\mathbf{x}||$ ενός σήματος μπορεί να οριστεί ανάλογα:
  $||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} |x[k]|^2$, $||\mathbf{x}||^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau$.
  Το μέτρο (μήκος) ενός σήματος ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειάς του (λογικό). Υπενθυμίζεται ότι έχει υποτεθεί πεπερασμένη ενέργεια.

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί

- Επομένως, μπορούμε να φανταστούμε τα σήματα ως διανύσματα με μήκος, κατεύθυνση στο χώρο, γωνία μεταξύ τους κλπ.
- Δύο σήματα είναι <u>ορθογώνια</u> όταν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Για παράδειγμα, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau)^* d\tau = 0$.



- Ένα σύνολο N διανυσμάτων/σημάτων είναι <u>ορθοκανονικά</u> όταν είναι μεταξύ τους ορθογώνια και το μέτρο του καθενός ισούται με 1.

Άλλες ιδιότητες – ορισμοί (2)

- Ένα σύνολο N διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εάν κανένα διάνυσμα δε μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει (προφανώς) για τα σήματα, όπως και για τα διανύσματα: $||x[k] + y[k]|| \leq ||x[k]|| + ||y[k]||$.
- Ανισότητα Cauchy-Schwartz: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||$.
  Η ισότητα ισχύει όταν $\mathbf{x} = k \cdot \mathbf{y}$ (k σταθερά) – θα μας χρειαστεί αργότερα.
  π.χ. για συνεχή σήματα

$$\left| \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau \right|^2 \leq \left| \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau \right| \left| \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau \right| .$$

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων

- Έστω ένα διάνυσμα N διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο, και $\mathbf{e}_i$ N ορθοκανονικά διανύσματα (π.χ. $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ με 1 στη θέση i). Ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του N-διάστατου χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των διανυσμάτων βάσης $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e_i} \rangle \mathbf{e}_i.$$

- Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (2)

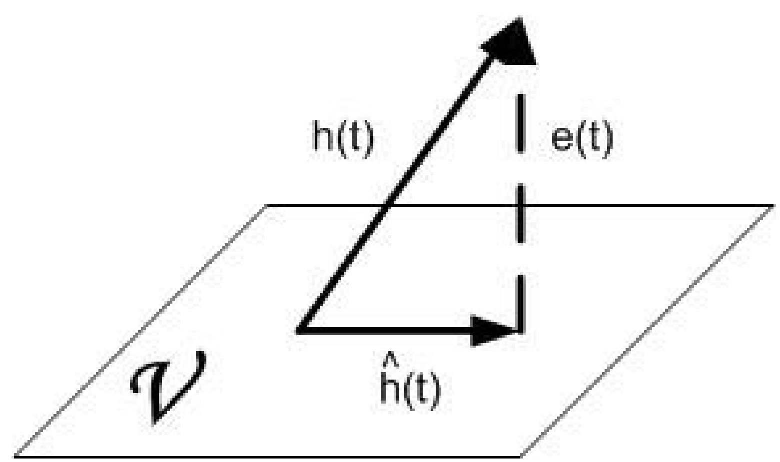
- Έστω N ορθοκανονικές συναρτήσεις $f_i(t)$:

$$\int_{\mathcal{S}} f_i(\tau) f_j^*(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις αυτές καλύπτουν ένα χώρο συναρτήσεων $\mathcal{V}$ διάστασης N (είναι οι συναρτήσεις βάσης του χώρου). Ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου (ο οποίος έχει άπειρη διάσταση).
- Εάν $g(x) \in \mathcal{V}$, $g(x) = \sum_{k=1}^{N} g_i f_i(x) \leftrightarrow \mathbf{g} = \sum_{k=1}^{N} g_i \mathbf{f}_i = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle \mathbf{f}_i$.
- Παραδείγματα:
  - Σειρές Fourier. Συναρτήσεις βάσης: $e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = e^{j2\pi k f_c t}$.
  - Διαμόρφωση FSK. Συναρτήσεις βάσης: $\cos(2\pi k f_c t)$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (3)

- Έστω μια συνάρτηση $h(t)$ η οποία ενδέχεται να μην ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Εάν $\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^{N} h_i f_i(t)$ πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές h_i ώστε να μειωθεί το τετράγωνο της διαφοράς $e(t) = h(t) - \hat{h}(t)$;



Θεώρημα προβολής

- Μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά αυτό που περιμένουμε διαισθητικά από το σχήμα, ότι, δηλαδή, η συνάρτηση $\hat{h}(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα ισούται με την προβολή της $h(t)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$: $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{h}, \mathbf{f} \rangle \mathbf{f}_k$.
- Θεώρημα Προβολής: Έστω ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathcal{H}$. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0$$

  για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathcal{V}$. Το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ ονομάζεται προβολή του $\mathbf{x}$ στον $\mathcal{V}$.
- Διαισθητικά, εάν το διάνυσμα $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ δεν ήταν κάθετο στον $\mathcal{V}$ θα μπορούσαμε να προβάλουμε ένα μέρος του στον $\mathcal{V}$ με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ να προσεγγίσει ακόμα καλύτερα το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Το $\mathbf{e}$ περιέχει μόνο την ποσότητα πληροφορίας του $\mathbf{x}$ η οποία βρίσκεται στο συμπλήρωμα (ορθογώνιο υπόχωρο) $\mathcal{V}^{\perp}$ του $\mathcal{V}$.

Διαδικασία **Gram-Schmidt**

- Η διαδικασία Gram-Schmidt είναι μια μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών διανυσμάτων.
- Έστω N διανύσματα $\mathbf{v}_i$ (όχι κατ' ανάγκη γραμμικά ανεξάρτητα)
  - $\boxed{\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}.}$
  - $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1.$ $\boxed{\mathbf{u}_2 = \dfrac{\mathbf{u}_2'}{||\mathbf{u}_2'||}.}$
  - $\mathbf{u}_3' = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$ $\boxed{\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{u}_3'}{||\mathbf{u}_3'||}.}$
  - κ.ο.κ.

Διαδικασία **Gram-Schmidt** (2)

- Σε κάθε βήμα προβάλλουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ στον υπόχωρο που δημιουργούν τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$ και κανονικοποιούμε το μέτρο στο 1. Το $\mathbf{u}_i$ περιέχει <u>μόνο</u> πληροφορία η οποία δεν περιέχεται στα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. Επαγωγικά, η πληροφορία που περιέχει το $\mathbf{u}_i$ δεν περιέχεται σε επόμενα διανύσματα $\mathbf{u}_k$. Άρα, τα $\mathbf{u}_i$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα $\mathbf{v}_i$ είναι αυθαίρετη. Τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν ενδέχεται να είναι διαφορετικά, αλλά ο αριθμός τους είναι ο ίδιος και ίσος με τη διάσταση του υπόχωρου (η οποία ενδέχεται να είναι $< N$).
- Εάν η διάσταση του υπόχωρου είναι $< N$, κάποια από τα $\mathbf{u}_i$ θα είναι μηδενικά (όλη η πληροφορία του $\mathbf{v}_i$ περιέχεται σε προηγούμενα διανύσματα).

Παραγοντοποίηση **QR**

- Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ είναι συνάρτηση μόνο των $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.
  - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 ||\mathbf{v}_1||$
  - $\mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + ||\mathbf{u}_2'|| \mathbf{u}_2$
  - κ.ο.κ.

  Μπορούμε, επομένως να γράφουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \ldots & r_{1,N} \\ 0 & r_{2,2} & \ldots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & r_{M,N} \end{bmatrix}}_{R}$$

- Ο πίνακας R είναι κλιμακωτός άνω τριγωνικός (κλιμακωτός όταν κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{v}_i$ είναι εξαρτημένα $(M < N)$). Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
- Η παραγοντοποίηση QR χρησιμοποιείται συχνά για αποδείξεις και απλοποίηση εκφράσεων και υλοποιήσεων.

Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες

- Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα.
- Θόρυβος στις Ψηφιακές Επικοινωνίες
  - Lee & Messerschmitt Ch. 3, 5 (<u>2nd</u> ed.).

Θόρυβος

- Ο θόρυβος είναι ένα άγνωστο σήμα.
- Μπορεί να οφείλεται σε φυσικά φαινόμενα (π.χ. θερμικός θόρυβος, ηλεκτρικές εκκενώσεις), στον ανθρώπινο παράγοντα (π.χ. κινητήρες, παρεμβολές στις ραδιοσυχνότητες) ή στα συστήματα επικοινωνιών (διαφωνία, θόρυβος κβαντισμού).
- Κατηγορίες θορύβου
  - Ανάλογα με το πώς υπερτίθεται στο σήμα: Αθροιστικός / Πολλαπλασιαστικός / Θόρυβος φάσης.
  - Ανάλογα με τη στατιστική του κατανομή: στάσιμος, μη στάσιμος, κρουστικός (impulse/burst).
- Το ποσό της πληροφορίας που μπορούμε να μεταδώσουμε εξαρτάται (και) από το θόρυβο.

Λευκός Θόρυβος (**White Noise**)

- Ας περιοριστούμε, προς το παρόν, στην κατηγορία του WSS αθροιστικού θορύβου.
- Παρόλο που δε γνωρίζουμε τις ακριβείς τιμές του θορύβου, ενδέχεται να γνωρίζουμε κάποιες ιδιότητές του (π.χ. μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση).
- Έστω η WSS στοχαστική ανέλιξη διακριτού χρόνου $\{n_k\}$ με $m = 0$ και $R(l) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta_l$ (δέλτα του Kronecker).
  - Η $\{n_k\}$ εξελίσσεται όσο πιο τυχαία γίνεται στο χρόνο k (γιατί;)
  - Η PSD είναι επίπεδη. Διαισθητικά, η $\{n_k\}$ μπορεί να μεταβληθεί εξίσου πιθανά με οποιαδήποτε ‘ταχύτητα’.
- Μια στοχαστική ανέλιξη με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση $R(t_1, t_2) = K\delta(t_1 - t_2)$ ονομάζεται λευκή (σε αναλογία με το λευκό φως το οποίο περιέχει όλες τις συχνότητες του ορατού φάσματος).

Λευκός Θόρυβος (**White Noise**) (2)

- Έστω τώρα η WSS στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου $\{n(t)\}$ με $m = 0$ και $R(\tau) = \frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(\tau)$.
- Στη φύση είναι αδύνατο να υπάρχει τέτοιο σήμα (συνεχής λευκός θόρυβος) (γιατί;)
- Ας υποθέσουμε, όμως, ότι η $\{n(t)\}$ έχει επίπεδη PSD στις συχνότητες που μας ενδιαφέρουν. Εάν γίνει δειγματοληψία σε αυτές τις συχνότητες (μετά, βέβαια, από κατάλληλο βαθυπερατό φίλτρο), η διακριτή στοχαστική ανέλιξη $\{n_k\}$ που προκύπτει έχει επίπεδη PSD. Άρα, στο ψηφιακό πεδίο η $\{n_k\}$ είναι λευκή.

Θερμικός θόρυβος (**Johnson**)

- Οφείλεται στη θερμική κίνηση των ηλεκτρονίων. Εμφανίζεται σε οποιοδήποτε σύστημα λειτουργεί σε μη μηδενική θερμοκρασία. Η (μονόπλευρη) PSD του θερμικού θορύβου ισούται με

$$S(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kTn}} - 1},$$

  όπου h η σταθερά του Planck, k η σταθερά του Boltzmann ($= 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joules ανά βαθμό Kelvin) και T_n η θερμοκρασία σε βαθμούς Kelvin.

- Η (μονόπλευρη) PSD για συχνότητες έως και τα 300, περίπου, GHz ισούται με kT_n (επίπεδη). Επομένως, στο ψηφιακό πεδίο, και εφόσον η δειγματοληψία γίνεται κάτω από τα 300 GHz, ο θερμικός θόρυβος μπορεί να θεωρηθεί λευκός.
- Στην ουσία, ο θερμικός θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά στην περιοχή ‘ταχυτήτων’ έως και 300 GHz. Για τα ψηφιακά συστήματα τα οποία λειτουργούν κάτω από τα 300 GHz ο θόρυβος μεταβάλλεται εξίσου πιθανά σε όλες τις χρησιμοποιούμενες συχνότητες.

Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος (**AWGN**)

- Το γεγονός ότι η αυτοσυσχέτιση του λευκού θορύβου ισούται με $\frac{\mathcal{N}_0}{2}\delta(t)$ δε δίνει καμια πληροφορία για την κατανομή των τιμών του. Για παράδειγμα, μια λευκή στοχαστική ανέλιξη ενδέχεται να παίρνει τιμές μόνο 0 και 1 (Bernoulli).
- Λευκός Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Λευκός θόρυβος τα δείγματα του οποίου είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανεμημένες (iid) γκαουσιανές μεταβλητές.
- Ο AWGN είναι το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο θορύβου. Ο λόγος είναι ότι μοντελοποιεί πολύ καλά ένα μεγάλο ποσοστό θορύβου που εμφανίζεται στις Ψηφιακές Επικοινωνίες.
  - Λευκότητα: Αποτέλεσμα της τυχαιότητας της κίνησης των ηλεκτρονίων.
  - Γκαουσιανός: Δικαιολογείται από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Ο συνολικός θόρυβος είναι αποτέλεσμα της αθροιστικής συμβολής ενός πολύ μεγάλου αριθμού (iid) πηγών θορύβου.
  - Ο θερμικός θόρυβος μοντελοποιείται ως AWGN.
- Έγχρωμος (colored) Προσθετικός Γκαουσιανός Θόρυβος: Η PSD δεν είναι επίπεδη. Μοντελοποιεί θόρυβο λόγω διαφωνίας (crosstalk), φίλτρων.