ΕΕ725
Ειδικά Θέματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Δημήτρης-Αλέξανδρος Τουμπακάρης

Τμήμα ΗΜ&ΤΥ, Πανεπιστήμιο Πατρών

16 Μαρτίου 2011

Ψηφιακή Μετάδοση

Περιεχόμενα σημερινού μαθήματος

1. Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα
    - Ο χώρος $\mathcal{L}_2$, Ευκλείδειο μέτρο και εσωτερικό γινόμενο
    - Αναπαράσταση σημάτων με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων
    - Προβολή σε υπόχωρο και διαδικασία Gram-Schmidt
2. Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση
    - Διαμόρφωση και Αστερισμοί
    - Αποδιαμόρφωση και προσαρμοσμένο φίλτρο

Αντιστοιχία με συγγράμματα

- Cioffi: 1.1
- Barry, Lee & Messerschmitt (3rd ed.): 2.6

Αναπαράσταση κυματομορφών ως διανύσματα

- Είναι δυνατόν να αναπαραστήσουμε τις κυματομορφές ως διανύσματα (vectors), να ορίσουμε, δηλαδή, διανυσματικό χώρο (vector space) σημάτων.
- Η αναπαράσταση ως διανύσματα πολλές φορές απλοποιεί το σχεδιασμό και διευκολύνει την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Προτάθηκε αρχικά από τους Wozencraft και Jacobs.
- Στα επόμενα παρατίθεται η αντιστοιχία μεταξύ της αναπαράστασης σημάτων ως κυματομορφές και της αναπαράστασής τους ως διανύσματα.

Χώρος Σημάτων

- Ένας γραμμικός ή διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ αποτελείται από ένα σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{x}\}$ και από δύο πράξεις: πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με σταθερά.
  Διακριτά σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x[k],\ k \in \mathcal{S}$
  (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους).
  Συνεχή σήματα: $\mathbf{x} \leftrightarrow x(t),\ t \in \mathcal{S}$
  (ενδεχομένως το $\mathcal{S}$ να περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς).

Χώρος Σημάτων (2)

- Συνήθως υποθέτουμε ότι τα σήματα έχουν πεπερασμένη ενέργεια

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} |y[k]|^2 < \infty, \quad \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

- Ο χώρος σημάτων με πεπερασμένη ενέργεια συνήθως συμβολίζεται ως $\mathcal{L}_2$.[1]
- Τα σήματα ενδέχεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές, δηλαδή $x[k] \in \mathbb{C}$ ($x(t) \in \mathbb{C}$).

[1] Αποσιωπούμε εσκεμμένα πολλές μαθηματικές λεπτομέρειες, χώρους $\mathcal{L}_2$, L_2, τάξεις ισοδυναμίας σημάτων κτλ. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε A. Lapidoth, *A Foundation in Digital Communication*

Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός

- Πρόσθεση (υπέρθεση σημάτων): $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x[k]+y[k]\ \forall\ k \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \leftrightarrow x(t)+y(t)\ \forall\ t \in \mathcal{S}$, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Επίσης, ισχύει η αντιμεταθετική (commutative) και η προσεταιριστική (associative) ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης $\mathbf{0}$ (μηδενικό σήμα), καθώς και το αντίστροφο στοιχείο της πρόσθεσης $-\mathbf{x}$ (αντίθετο σήμα).
- Πολλαπλασιασμός με (μιγαδική) σταθερά (ενίσχυση-απόσβεση- περιστροφή): $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x[k]\ \forall\ k \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \leftrightarrow \alpha x(t)\ \forall\ t \in \mathcal{S}$, $\alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{V}$. $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα. Περιλαμβάνεται το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ($x[k] = 1\ \forall\ k \in \mathcal{S}$, $x(t) = 1\ \forall\ k \in \mathcal{S}$). Τέλος, ισχύει η επιμεριστική (distributive) ιδιότητα: $\alpha \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$, $(\alpha+\beta)\cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$.

Εσωτερικό γινόμενο

- Το εσωτερικό γινόμενο (inner product)$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ στο $N-$διάστατο Ευκλείδειο χώρο ορίζεται ως $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k^*$ (υποθέτουμε ότι τα διανύσματα είναι, στη γενική περίπτωση, μιγαδικά).
- Για το χώρο σημάτων, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής:
  - Διακριτά σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} x[k] y[k]^* = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$.
  - Συνεχή σήματα: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle^*$ (εάν ορίζεται).
- Ορίζουμε, επομένως, ένας διανυσματικό χώρος με εσωτερικό γινόμενο.
- Υπό την αυστηρή έννοια, δεν μπορούμε να ορίσουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο βάσει του $\mathcal{L}_2$ και πρέπει να ορίσουμε έναν άλλο χώρο, τον L_2. Για τους δικούς μας σκοπούς, αρκεί να θεωρήσουμε τον $\mathcal{L}_2$ με εσωτερικό γινόμενο.
- Το εσωτερικό γινόμενο σημάτων $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ είναι μιγαδικός αριθμός.

Γενικός ορισμός εσωτερικού γινομένου

- Αναφέρουμε (ενημερωτικά) το γενικό ορισμό του εσωτερικού γινομένου για διανυσματικούς χώρους επί του σώματος (field) $\mathbb{C}$, παρόλο που δε θα μας χρειαστεί στο μάθημα

Ορισμός 2.1. Το εσωτερικό γινόμενο (inner product) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ενός διανυσματικού χώρου στο $\mathbb{C}$ είναι μια πράξη που αντιστοιχίζει δύο διανύσματα, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ του χώρου σε μια βαθμωτή ποσότητα του $\mathbb{C}$ η οποία (πράξη) έχει τις εξής 4 ιδιότητες

- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$.
- $\langle \alpha\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle^*$.
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$, με $=$ εάν και μόνο εάν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

- Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο του χώρου θετικώς ημιορισμένων συμμετρικών μητρών (Positive Semi-Definite symmetric matrices) ορίζεται ως το ίχνος του γινομένου τους: $\langle U, V \rangle = \mathrm{tr}(UV^*)$.

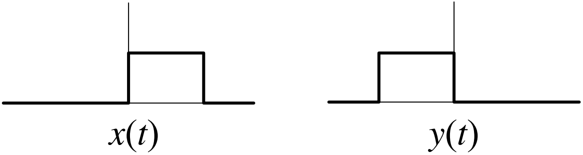
Ευκλείδειο μέτρο σήματος

- Το Ευκλείδειο μέτρο (Euclidean norm or norm-2), $||\mathbf{x}||_2$, ενός σήματος μπορεί να οριστεί ως:
$||\mathbf{x}||_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k \in \mathcal{S}} |x[k]|^2$,
$||\mathbf{x}||_2^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau$.

- Το Ευκλείδειο μέτρο (μήκος) ενός σήματος ισούται με την τετραγωνική ρίζα της ενέργειάς του (λογικό). Υπενθυμίζεται ότι έχει υποτεθεί πεπερασμένη ενέργεια (όχι σήμα ισχύος).

Ορθογώνια διανύσματα

- Επομένως, μπορούμε να φανταστούμε τα σήματα ως διανύσματα με μήκος, κατεύθυνση στο χώρο, "γωνία" μεταξύ τους (αν και το εσωτερικό γινόμενο σημάτων είναι μιγαδικό) κτλ.
- Δύο σήματα είναι ορθογώνια (orthogonal) όταν $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Για παράδειγμα, στο σχήμα, $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(\tau)^* d\tau = 0$.



- Ένα σύνολο N διανυσμάτων/σημάτων είναι ορθοκανονικά (orthonormal) όταν είναι ορθογώνια μεταξύ τους και το (Ευκλείδειο) μέτρο του καθενός ισούται με 1.

Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων

- Ένα σύνολο N διανυσμάτων είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (linearly independent) εάν κανένα διάνυσμα δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
  - Ισοδύναμα, τα διανύσματα $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, N$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα εάν
$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \; \forall i.$$
  - Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικώς εξαρτημένο με οποιοδήποτε διάνυσμα.
  - Θεώρημα 2.2. Ορθοκανονικά διανύσματα είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Τριγωνική Ανισότητα

- Η τριγωνική ανισότητα ισχύει (προφανώς) για τα σήματα, όπως και για τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:

$$|x[k] + y[k]|^2 \leq |x[k]|^2 + |y[k]|^2 \Rightarrow ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_2 + ||\mathbf{y}||_2.$$

- Γενικά, όπως και στον $\mathbb{R}^n$,

$$|||\mathbf{x}||_2 - ||\mathbf{y}||_2| \leq ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_2 + ||\mathbf{y}||_2.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

- Έστω δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ με $||\mathbf{x}||_2 < \infty$ και $||\mathbf{y}||_2 < \infty$.
- Ανισότητα Cauchy-Schwartz:
  Το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ορίζεται και
  $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}||_2 ||\mathbf{y}||_2$.
- Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\mathbf{x} = k \cdot \mathbf{y}$ ($k \in \mathbb{C}$ σταθερά) ή όταν το $\mathbf{x}$ ή το $\mathbf{y}$ ισούνται με $\mathbf{0}$ – θα μας χρειαστεί αργότερα.
- Για παράδειγμα, για συνεχή σήματα,

$$\left| \int_{\mathcal{S}} x(\tau) y^*(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_{\mathcal{S}} |x(\tau)|^2 d\tau \int_{\mathcal{S}} |y(\tau)|^2 d\tau.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwartz για τ.μ.

- Έστω τ.μ. X και Y με πεπερασμένη διασπορά.

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]},$$

με $=$ εάν και μόνο εάν $\Pr\{\alpha X = \beta Y\} = 1$ για κάποια α και $\beta \in \mathbb{R}$ με τουλάχιστον ένα από αυτά $\neq 0$.

Πόρισμα 2.3. Ανισότητα συνδιασποράς:
$|\mathrm{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων

- Έστω ένα διάνυσμα N διαστάσεων στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^N$ και N ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{e}_i$ (επίσης στον $\mathbb{R}^N$, για παράδειγμα, αλλά όχι απαραίτητα, $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ με 1 στη θέση i). Κάθε διάνυσμα, $\mathbf{x}$, του N-διάστατου χώρου μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των $\mathbf{e}_i$ τα οποία αποτελούν μια <u>βάση</u> του χώρου:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e_i} \rangle \mathbf{e}_i .$$

- Ισοδύναμα, μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση (ένα σήμα) με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (2)

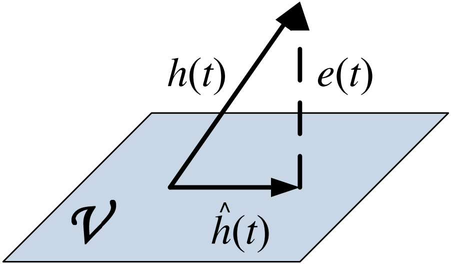
- Έστω N ορθοκανονικές συναρτήσεις $f_i(t)$:

$$\int_{\mathcal{S}} f_i(\tau) f_j^*(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

- Οι συναρτήσεις αυτές εκτείνουν (span) ένα χώρο συναρτήσεων $\mathcal{V}$ διάστασης N (είναι οι συναρτήσεις βάσης του χώρου). Ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου όλων των συναρτήσεων συνεχούς χρόνου (ο οποίος έχει άπειρη διάσταση).
- Εάν $g(x) \in \mathcal{V}$, $g(x) = \sum_{k=1}^{N} g_k f_k(x) \leftrightarrow \mathbf{g} = \sum_{k=1}^{N} g_k \mathbf{f}_k = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$, όπου $\langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_k \rangle = \int_{\mathcal{S}} g(\tau) f_k^*(\tau) d\tau$.
- Παραδείγματα:
  - Σειρές Fourier. Συναρτήσεις βάσης: $e^{\frac{j2\pi kt}{T}} = e^{j2\pi k f_c t}$.
  - Διαμόρφωση FSK. Συναρτήσεις βάσης: $\cos(2\pi k f_c t)$.

Αναπαράσταση συνάρτησης με χρήση ορθοκανονικών συναρτήσεων (3)

- Έστω μια συνάρτηση $h(t)$ η οποία ενδέχεται να μην ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Εάν $\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^{N} h_i f_i(t)$ (και, άρα, $\in \mathcal{V}$) πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές h_i ώστε να ελαχιστοποιηθεί το τετράγωνο του μέτρου της διαφοράς $e(t) = h(t) - \hat{h}(t)$;



Θεώρημα προβολής

- Μπορεί να αποδειχτεί μαθηματικά αυτό που περιμένουμε διαισθητικά από το σχήμα, ότι, δηλαδή, η συνάρτηση $\hat{h}(t)$ η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα ισούται με την προβολή της $h(t)$ στον υπόχωρο $\mathcal{V}$: $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{h}, \mathbf{f}_k \rangle \mathbf{f}_k$.
- Θεώρημα 2.4. (Προβολής) Έστω ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ και ένα διάνυσμα $\mathbf{x}$ του χώρου. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ για το οποίο ισχύει ότι

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0$$

για οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{y}$ του $\mathcal{V}$. Το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ ονομάζεται προβολή του $\mathbf{x}$ στον $\mathcal{V}$.

Θεώρημα προβολής (συνέχεια)

- Διαισθητικά, εάν το διάνυσμα $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{p}_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ δεν ήταν κάθετο στο $\mathcal{V}$ θα μπορούσαμε να προβάλουμε ένα μέρος του στο $\mathcal{V}$ με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\mathcal{V}}$ να προσεγγίσει ακόμα καλύτερα το διάνυσμα $\mathbf{x}$. Το $\mathbf{e}$ περιέχει μόνο την ποσότητα πληροφορίας του $\mathbf{x}$ η οποία βρίσκεται στο συμπλήρωμα (ορθογώνιο υπόχωρο), $\mathcal{V}^{\perp}$, του $\mathcal{V}$.

Διαδικασία Gram-Schmidt

- Η διαδικασία Gram-Schmidt είναι μια μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών διανυσμάτων.
- Έστω N διανύσματα $\mathbf{v}_i$ (όχι κατ' ανάγκη γραμμικώς ανεξάρτητα)
  - $\boxed{\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||}.}$
  - $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1.$ $\boxed{\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_2'}{||\mathbf{u}_2'||}.}$
  - $\mathbf{u}_3' = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2.$ $\boxed{\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}_3'}{||\mathbf{u}_3'||}.}$
  - κ.ο.κ.

Διαδικασία Gram-Schmidt (2)

- Σε κάθε βήμα προβάλλουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ στον υπόχωρο που δημιουργούν τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$, κρατάμε το υπόλοιπο που δεν ανήκει στον υπόχωρο και κανονικοποιούμε το μέτρο του στο 1. Το $\mathbf{u}_i$ περιέχει <u>μόνο</u> πληροφορία η οποία δεν περιέχεται στα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}\}$. Επαγωγικά, η πληροφορία που περιέχει το $\mathbf{u}_i$ δεν περιέχεται σε επόμενα διανύσματα $\mathbf{u}_k$. Άρα, τα $\mathbf{u}_i$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους.
- Η σειρά με την οποία επιλέγουμε τα $\mathbf{v}_i$ είναι αυθαίρετη. Τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν ενδέχεται να είναι διαφορετικά, αλλά ο αριθμός τους είναι ο ίδιος και ίσος με τη διάσταση του υποχώρου (η οποία ενδέχεται να είναι $< N$).
- Εάν η διάσταση του υποχώρου είναι $< N$, κάποια από τα $\mathbf{u}_i$ θα είναι μηδενικά (όλη η πληροφορία του $\mathbf{v}_i$ περιέχεται σε προηγούμενα διανύσματα).

Παραγοντοποίηση QR

- Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{v}_i$ είναι συνάρτηση μόνο των $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_i\}$.
  - $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 ||\mathbf{v}_1||$
  - $\mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + ||\mathbf{u}_2'||\mathbf{u}_2$
  - κ.ο.κ.

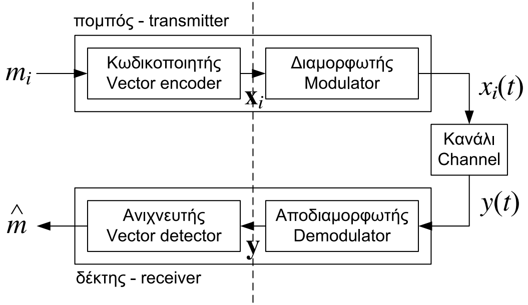
  Μπορούμε, επομένως να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_N \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_M \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \ldots & r_{1,N} \\ 0 & r_{2,2} & \ldots & r_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & r_{M,N} \end{bmatrix}}_{R}$$

- Ο πίνακας R είναι κλιμακωτός άνω τριγωνικός (κλιμακωτός όταν κάποια από τα διανύσματα $\mathbf{v}_i$ είναι εξαρτημένα ($M < N$)). Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.
- Η παραγοντοποίηση QR χρησιμοποιείται συχνά για αποδείξεις και για απλοποίηση εκφράσεων και υλοποιήσεων.

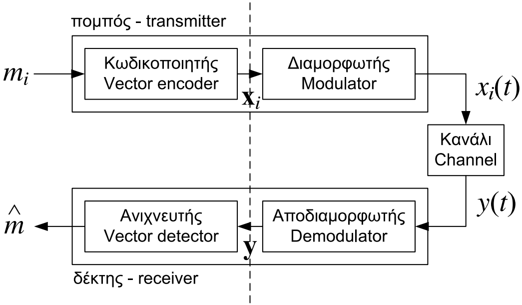
Διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση

Ψηφιακή Μετάδοση



- m_i: Ένα από M πιθανά μηνύματα. Αντιστοιχίζεται από τον κωδικοποιητή σε ένα διάνυσμα (σύμβολο) $\mathbf{x}_i$. Ο διαμορφωτής επιλέγει μια <u>αναλογική</u> κυματομορφή $x_i(t)$ με βάση την έξοδο του κωδικοποιητή. Στο δέκτη η ληφθείσα κυματομορφή αποδιαμορφώνεται στο διάνυσμα $\mathbf{y}$. Ο ανιχνευτής αποφασίζει ποιο μήνυμα μεταδόθηκε με βάση το $\mathbf{y}$ και, στη γενική περίπτωση, πληροφορία από προηγούμενες λήψεις.

Ψηφιακή Μετάδοση (2)



- Εάν δουλέψουμε με διανύσματα, μπορούμε να διαχωρίσουμε τη διαμόρφωση/αποδιαμόρφωση από την κωδικοποίηση/ανίχνευση $\rightarrow$ πλεονέκτημα αναπαράστασης με διανύσματα.
- Έστω ότι ο πομπός στέλνει ένα μήνυμα ανά T s (symbol period). Ο <u>ρυθμός μετάδοσης</u> (data rate) ισούται με $R = \frac{log_2 M}{T}$ bits/s.

Σχετικά με το διαχωρισμό κωδικοποίησης-διαμόρφωσης και αποκωδικοποίησης-αποδιαμόρφωσης

- Όπως θα δούμε, ο διαχωρισμός κωδικοποίησης-διαμόρφωσης και αποκωδικοποίησης-αποδιαμόρφωσης μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε την ανάλυση και, επίσης, να εξαγάγουμε γενικευμένα συμπεράσματα και αλγορίθμους.
- Αποδεικνύεται, μάλιστα, ότι, στη γενική περίπτωση, ο διαχωρισμός αυτός δεν επηρεάζει το σωστό σχεδιασμό του συστήματος. Δηλαδή, γενικά, οι μέθοδοι σχεδιασμού του ζεύγους κωδικοποιητή/αποκωδικοποιητή δεν εξαρτώνται από τη διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση. Αντιστρόφως, οι αρχές σχεδίασης του ζεύγους διαμορφωτή/αποδιαμορφωτή δεν αλλάζουν όταν μεταβάλλουμε τον αλγόριθμο κωδικοποίησης/αποκωδικοποίησης.
- Φυσικά, ανάλογα με τον κωδικοποιητή/αποκωδικοποιητή πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες παραμέτρους στο διαμορφωτή/αποδιαμορφωτή (και αντιστρόφως).

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης

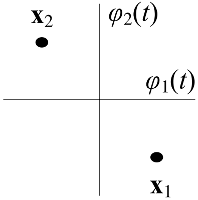
- Έστω το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f(t)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^T |f(\tau)|^2 d\tau < \infty$. Ο χώρος με εσωτερικό γινόμενο στον οποίο ανήκουν οι $f(t)$ ονομάζεται $\mathcal{L}_2[0, T]$ και έχει άπειρη διάσταση.
- Σημείωση: Όπως προαναφέρθηκε, ο $\mathcal{L}_2$ δεν είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο υπό την αυστηρή έννοια. Αλλά, για τους σκοπούς του μαθήματος θα υποθέσουμε ότι είναι.
- Μια συνάρτηση $x(t)$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα συναρτήσεων βάσης: $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \phi_n(t)$. Στη γενική περίπτωση το N ισούται με ∞. Τα παραπάνω ισχύουν και όταν τα όρια του διαστήματος τείνουν στο $+\infty$ (ή -∞).

Χρήση διανυσμάτων για την αναπαράσταση των αναλογικών κυματομορφών μετάδοσης (2)

- Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε M συναρτήσεις $x(t)$ για τη διαμόρφωση, οι οποίες ανήκουν σε έναν υπόχωρο $\mathcal{V}$ του $\mathcal{L}_2[0, T]$ διάστασης N ($\leq M$ - γιατί;). Επομένως, κάθε συνάρτηση $x_m(t)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\sum_{n=1}^{N} x_{m,n}\phi_n(t)$, όπου $\phi_n(t)$ οι συναρτήσεις βάσης του $\mathcal{V}$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $x_m(t) \leftrightarrow \mathbf{x}_m = [x_{m,1}\ x_{m,2}\ \ldots\ x_{m,N}]^T$.
- Τα σύμβολα $\mathbf{x}_m,\ m = 1, 2, \ldots, M$ αποτελούν εναν <u>αστερισμό</u> (constellation). Με χρήση διανυσμάτων μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν αστερισμό στον Ευκλείδειο χώρο (παρόλο που στην πραγματικότητα ο αστερισμός είναι ένα σύνολο συνεχών κυματομορφών).
- Αποδεικνύεται ότι αυτός ο ισομορφισμός, δηλαδή η αναπαράσταση ενός διανυσματικού χώρου με αντίστοιχο διανυσματικό χώρο στο $\mathbb{R}^N$ ισχύει για οποιονδήποτε χώρο πεπερασμένης διάστασης, N.

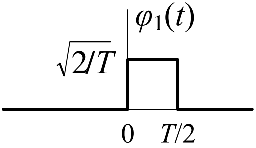
Παράδειγμα Αστερισμού: Μετάδοση BPSK

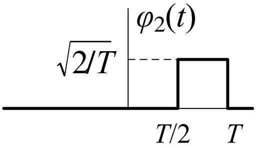
- $\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)$, $\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ και $\phi_1(t) = \phi_2(t) = 0$ εκτός του διαστήματος.
  - Οι συναρτήσεις βάσης είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και το μέτρο τους ισούται με $1 \rightarrow$ ορθοκανονική βάση υπόχωρου διάστασης $N = 2$.
  - Χρησιμοποιούμε δύο σύμβολα: $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = -\frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{T}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$
    (Υπενθύμιση: $\cos(A) - \cos(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$).
  - Επομένως, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ \ 1]^T$.



Παράδειγμα Αστερισμού: Διαμόρφωση Manchester

- Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί διαμόρφωση Manchester.





- Υποθέτουμε και πάλι ότι χρησιμοποιούμε $x_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$ και $x_2(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$. Άρα, και σε αυτήν την περίπτωση, $M = 2$, $\mathbf{x}_1 = [1 \ -1]^T$ και $\mathbf{x}_2 = [-1 \ 1]^T$.
- Παρόλο που οι κυματομορφές είναι διαφορετικές, η αναπαράστασή τους στον Ευκλείδειο χώρο είναι η ίδια!
- Εναλλακτικά, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τόσο στην περίπτωση BPSK όσο και στη Manchester με χρήση μίας μόνο συνάρτησης βάσης (πώς;)

Μέση ενέργεια/μέση ισχύς αστερισμού

- Μέση ενέργεια αστερισμού $\mathcal{E}_x \triangleq \mathbb{E}[\|x\|^2] = \sum_{m=0}^{M-1} \|x_m\|^2 p_x(m)$, όπου $\|x_m\|$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο του συμβόλου m του αστερισμού.
- Στη συνέχεια του μαθήματος, $\|\cdot\|$ υπονοεί $\|\cdot\|_2$.
- Εάν ο ρυθμός μετάδοσης ισούται με $\frac{1}{T}$ symbols/s, η μέση ισχύς του αστερισμού ισούται με $P_x \triangleq \frac{\mathcal{E}_x}{T}$.
- Δύο αντικρουόμενοι στόχοι: Για να ελαχιστοποιήσουμε την απαιτούμενη μέση ενέργεια/ισχύ μετάδοσης επιθυμούμε μικρή απόσταση μεταξύ των συμβόλων ενός αστερισμού. Από την άλλη, όπως θα δούμε, όσο μικραίνει η απόσταση αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη λόγω θορύβου.

Διατήρηση ενέργειας (Θεώρημα Parseval)

- Έστω $u(t) = \sum_{n=1}^{N} u_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{u} \triangleq [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$ και $v(t) = \sum_{n=1}^{N} v_n \phi_n(t) \leftrightarrow \mathbf{v} \triangleq [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$. Μπορεί να αποδειχτεί ότι

$$\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

  Επομένως, για να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $u(t)$ και $v(t)$ που ανήκουν σε υπόχωρο του $\mathcal{L}_2$ διάστασης $\leq N$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναπαράστασή τους ως διανύσματα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^N$ (χρησιμοποιούμε, δηλαδή, ισομορφισμό μεταξύ του $\mathcal{L}_2$ και του $\mathbb{R}^N$).

- Προσοχή: το εσωτερικό γινόμενο αριστερά είναι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων του $\mathcal{L}_2$, ενώ το εσωτερικό γινόμενο δεξιά είναι διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο – αλλάξαμε λίγο το συμβολισμό σε σχέση με τις πρώτες σελίδες των διαφανειών.

Θεώρημα Parseval (συνέχεια)

- Συνεπώς, εάν $u(t) = v(t)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)|^2 d\tau\right] = \mathbb{E}[\langle u, u\rangle] = E[\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle] = \mathcal{E}_x.$$

- Επομένως, η μέση ενέργεια ενός αστερισμού δεν εξαρτάται από την επιλογή των συναρτήσεων βάσης, αρκεί αυτές να είναι ορθοκανονικές.
- Εδώ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Parseval για την ειδική περίπτωση μετασχηματισμού από υπόχωρο του $\mathcal{L}_2$ στον $\mathbb{R}^N$.
- Το Θεώρημα του Parseval ισχύει γενικά για οποιοδήποτε ορθογώνιο μετασχηματισμό (π.χ. μετασχηματισμός Fourier).

Αποδιαμόρφωση - Το προσαρμοσμένο φίλτρο (Matched Filter)

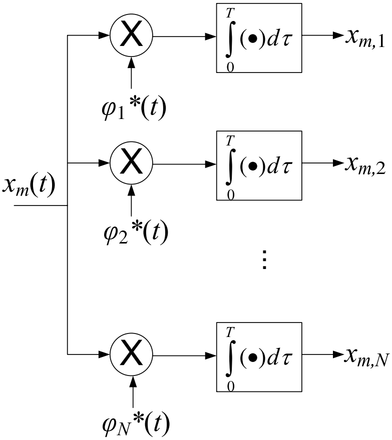
- Έστω ότι ο πομπός μεταδίδει μια κυματομορφή $x_m(t)$ η οποία ανήκει σε υπόχωρο του $\mathcal{L}_2[0,T]$ διάστασης N. Οι συνιστώσες $x_{m,n}$ του συμβόλου (διανύσματος) $\mathbf{x}_m$ μπορούν να βρεθούν με χρήση της σχέσης

$$
\begin{aligned}
x_{m,n} = \langle x_m, \phi_n \rangle &= \int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(\tau)d\tau \\
&= \left. \int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(-t+\tau+T)d\tau \right|_{t=T} = \\
&= \left. x_m(t) * \phi_n^*(T-t) \right|_{t=T}.
\end{aligned}
$$

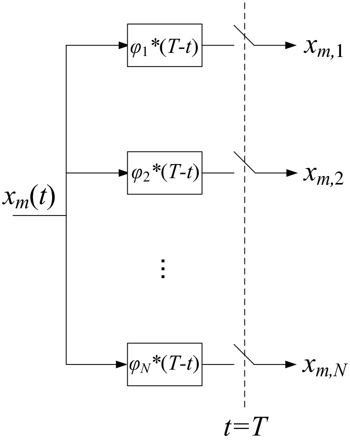
Το προσαρμοσμένο φίλτρο (2)

- $x_{m,n} = \int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(\tau)d\tau = x_m(t) * \phi_n^*(T-t)\big|_{t=T}$, για κάθε μήνυμα m και διάσταση n.
- Επομένως, (αγνοώντας, προς το παρόν, το θόρυβο) ο δέκτης μπορεί να μετατρέψει τη ληφθείσα κυματομορφή σε διάνυσμα είτε με χρήση πολλαπλασιασμού και ολοκλήρωσης (correlative demodulation), είτε με χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων (matched filters) $\phi_m^*(T-t)$ και δειγματοληψία ανά T s.
- Σε επίπεδο υλοποίησης, ενδέχεται να μην υπάρχει καμία διαφορά μεταξύ του αποδιαμορφωτή συσχέτισης και του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένου φίλτρου.
- Τα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης στις οποίες μπορούν να αναλυθούν τα εκπεμπόμενα σήματα (και τις οποίες χρησιμοποιεί ο διαμορφωτής).

Αποδιαμόρφωση (2)



συσχετιστικός αποδιαμορφωτής



αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων

Το προσαρμοσμένο φίλτρο (3)

- Επιστρέφοντας στο προσαρμοσμένο φίλτρο, παρατηρούμε ότι, αντί για

$$\int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(-t+\tau+T)d\tau\Big|_{t=T} = x_m(t) * \phi_n^*(T-t)|_{t=T},$$

θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει

$$\int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^T x_m(\tau)\phi_n^*(-t+\tau+T_0)d\tau\Big|_{t=T_0} = x_m(t) * \phi_n^*(T_0-t)|_{t=T_0},$$

αν, βέβαια, επιτρέπεται οι $\phi^*(t)$ να εκτείνονται και εκτός του διαστήματος $[0, T]$.

Το προσαρμοσμένο φίλτρο (4)

- Στην πράξη, δεν υπάρχει καμία διαφορά. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα φίλτρο που αποκρίνεται άμεσα στη διέγερση ($x(t)$) στην είσοδό του (αν υποθέσουμε ότι η $\phi_n(t)$ είναι μη μηδενική τη χρονική στιγμή T), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το φίλτρο αποκρίνεται μετά από $T_0 - T$ s (ή $T - T_0$ s ενωρίτερα).
- Χωρίς βλάβη της γενικότητας, από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε σήματα που εκτείνονται από το $-\infty$ στο $+\infty$ (όχι, πλέον, μέσα στο $[0, T]$) και θα ορίζουμε το *προσαρμοσμένο φίλτρο που αντιστοιχεί στο σήμα* $\phi_n(t)$ ως το φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$\phi_n^*(-t).$$

Το προσαρμοσμένο φίλτρο (5)

- Είδαμε ότι ένας τρόπος να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, \phi_n \rangle$ είναι εφαρμόζοντας είσοδο $x(t)$ στο προσαρμοσμένο φίλτρο $\phi_n^*(-t)$ και παρατηρώντας την έξοδό του τη χρονική στιγμή 0.
- Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι το εσωτερικό γίνομενο $\langle x, \phi_{n,t_0} \rangle$, όπου $\phi_{n,t_0}(t) = \phi_n(t - t_0)$, ισούται με την έξοδο του *ίδιου* προσαρμοσμένου φίλτρου $\phi_n^*(-t)$ τη χρονική στιγμή t_0.
- Συνεπώς, αν οι συναρτήσεις βάσης, $\phi_n(t)$, μπορούν να γραφούν ως μετατοπίσεις στο χρόνο μιας συνάρτησης $\phi(t)$ (για παράδειγμα, αν $\phi_n(t) = \phi(t - nT_s)$) μπορούμε να υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενά τους με το σήμα $x(t)$ με απλή παρατήρηση της εξόδου του προσαρμοσμένου φίλτρου τις κατάλληλες χρονικές στιγμές.
- Θα δούμε ότι αυτό διευκολύνει σημαντικά την υλοποίηση του αποδιαμορφωτή.