Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 9

Πάτρα 2008

Ρύθμιση ελαχίστης διασποράς

Η στρατηγική τοποθέτησης κατ’ επιλογή των πόλων που είδαμε προηγουμένως, προκειμένου να επιτύχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του κλειστού (Σ), μπορεί να οδηγήσει σε εξασθένηση των ιδιοτήτων απόρριψης του με αποτέλεσμα να εμφανίζονται μεγάλες διασπορές στην έξοδο ή είσοδο.

Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου ενεργούμε ως ακολούθως:

Υπερ-παραμετροποιούμε τα F και G.

Θεωρούμε ότι F_0, G_0 απεικονίζουν την συνηθισμένη λύση της εξίσωσης:

$$AF + z^{-k}BG = T$$

με

$$n_{f_0} = n_b + \kappa - 1$$

$$n_{g_0} = n_a - 1$$

Οπότε η γενική λύση δίνεται από:

$$F(z^{-1}) = F_0(z^{-1}) + z^{-\kappa} B(z^{-1}) P(z^{-1}), \qquad n_f = n_b + \kappa + n_p$$

$$G(z^{-1}) = G_0(z^{-1}) - A(z^{-1}) P(z^{-1}), \qquad n_g = n_a + n_p$$

Όπου P αυθαίρετο πολυώνυμο.

Η χρήση του:

$$Fu(t) + Gy(t) = 0$$

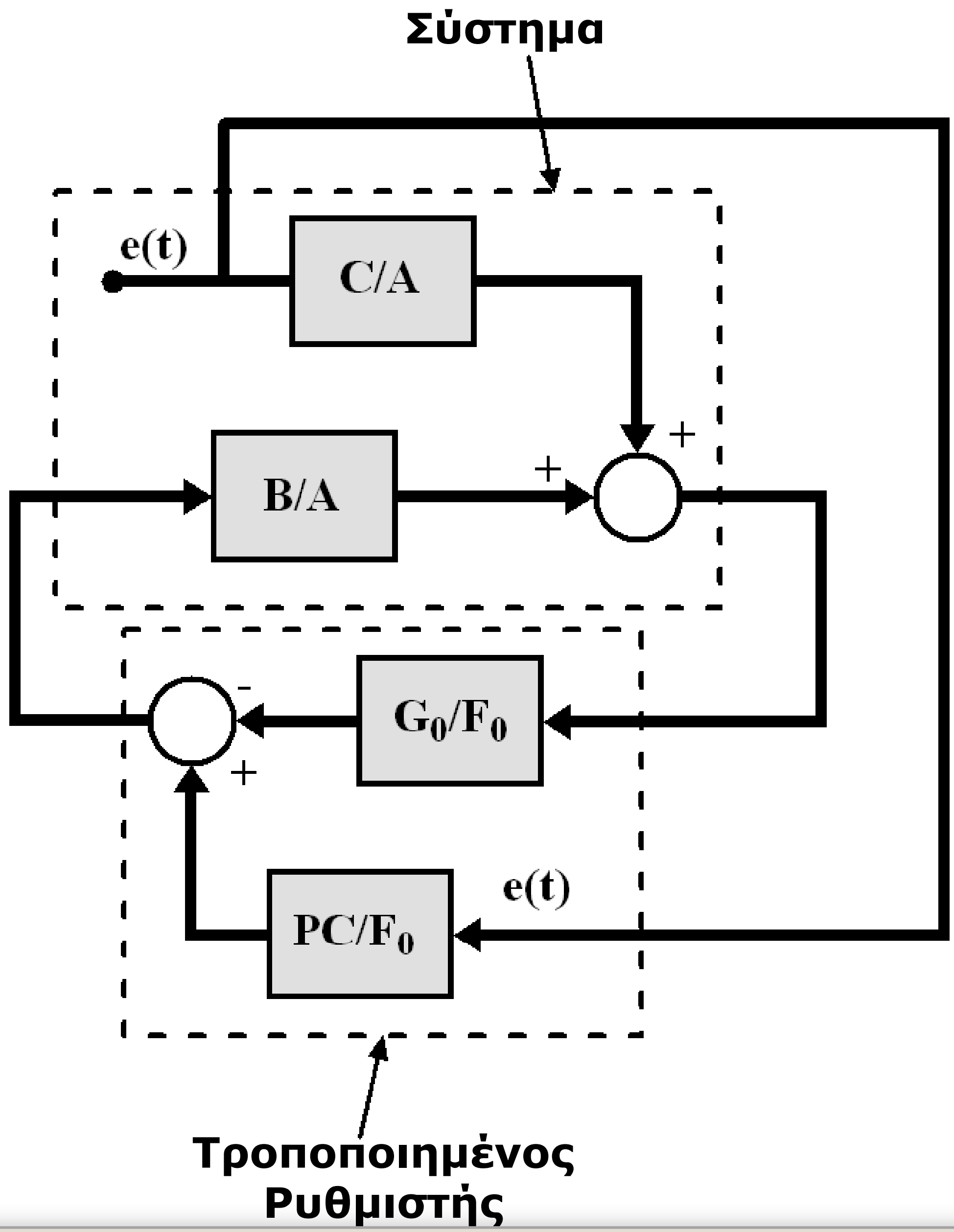
ισοδυναμεί με την υλοποίηση του νόμου ελέγχου:

$$\left(F_0 + z^{-\kappa} BP\right) u(t) + \left(G_0 - AP\right) y(t) = 0$$

Ή

$$F_0 u(t) + G_0 y(t) = PCe(t) \qquad (2)$$

Συνεπως ο νέος ρυθμιστής μπορεί να θεωρηθεί ως μια τροποποίηση του κλασικού ρυθμιστή στον οποίο το (ανακατασκευασθέν) σήμα θορύβου χρησιμοποιείται ως επιπλέον είσοδος. Αυτή η νέα είσοδος μπορεί να θεωρηθεί ως εμπρόσθιο σήμα διαταραχής όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα.



Σύστημα
e(t)
C/A
B/A
+
+
-
+
G0/F0
e(t)
PC/F0
Τροποποιημένος
Ρυθμιστής

Ο ρυθμιστής (2) οδηγεί στην εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$Ty(t) = Fe(t)$$

Και ως συνάρτηση του P η διασπορά της εξόδου δίνεται από την σχέση:

$$Var(y)_{n_p} = E\left[\frac{F_0 + z^{-\kappa}BP}{T}e(t)\right]^2$$

Αυτή η διαπορά είναι τετραγωνική στους συντελεστές του P και έχει ένα μοναδικό ελάχιστο που δίνεται από:

$$\frac{\partial[Var(y)_{n_p}]}{\partial p_i} = 0 \quad , i = 0,1,\ldots,n_p$$

Αυτό είναι ένα σύνολο $n_P + 1$ γραμμικών εξισώσεων για τις βέλτιστες P παραμέτρους και μπορεί να επιλυθεί από μια αντιστροφή ενός πίνακα:

$$\overline{P} = M^{-1} d$$

όπου $\overline{P} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n_P} \end{bmatrix}$

Ο πίνακας Μ δίνεται από:

$$M_{i,j} = E\left\{\left[\frac{B}{T}e(t)\right]\left[\frac{B}{T}e(t+i-j)\right]\right\}$$

$$M_{i,j} \quad (i = 0,\ldots,n_p)$$

Και d ένα διάνυσμα

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_i \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ n_P \\ \\ \end{array}$$

Που δίνεται από:

$$d_i = -E\left\{\left[\frac{F_0}{T}e(t)\right]\left[\frac{B}{T}e(t-\kappa-i)\right]\right\}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι: $n_P = 0$, τότε $P = P_0$ και:

$$P_0 = \frac{-E\left\{\left[\frac{F_0}{T}e(t)\right]\left[\frac{B}{T}e(t-\kappa)\right]\right\}}{\mathrm{E}\left[\frac{B}{T}e(t)\right]^2}$$

On-line μείωση διασποράς

Η διασπορά παραμένει αμετάβλητη αν αντικαταστήσουμε το $\{e(t)\}$ με ένα γνωστό μηδενικού μέσου όρου λευκό θόρυβο $\{\omega(t)\}$. Τότε θα έχουμε:

$$Var(y)_{n_P} = E\left[\frac{F_0 + z^{-\kappa}BP}{T}\omega(t)\right]^2$$

$$Var(y)_{n_P} = E\left[y_\omega(t) - x_\omega^T(t)P\right]^2$$

όπου

$$Ty_\omega(t) = F_0\omega(t)$$

Και $\overline{x}_{\omega}(t)$ είναι το $(n_P + 1)$ διάνυσμα στήλης του οποίου το i^o στοιχείο δίνεται από την σχέση:

$$T\left[\overline{x}_{\omega}(t)\right] = -B\omega(t-\kappa-i), \quad i = 0,\ldots,n_P$$

Σε αναλογία με την RLS εκτίμηση, μια σειρά εκτιμούμενων τιμών $\{\hat{P}(t)\}$ του βέλτιστου P παράγεται με τον τρόπο που φαίνεται παρακάτω:

$$\hat{P}(t) = \hat{P}(t-1) + P_{\omega}(t)x_{\omega}(t)\left[y_{\omega}(t) - \overline{x}_{\omega}^{T}(t)\hat{P}(t-1)\right]$$

$$P_{\omega}(t)^{-1} = P_{\omega}(t-1)^{-1} + x_{\omega}(t)x_{\omega}^{T}(t)$$

Έλεγχος ελάχιστης διασποράς

Σκοπός του κλασικού ελεγκτή ελάχιστης διασποράς είναι η ρύθμιση της εξόδου ενός στοχαστικού (Σ) σε ένα σταθερό (μηδενικό) σημείο ισορροπίας. Σε όρους βελτιστοποίησης αυτός ο σκοπός αποδίδεται ως εξής:

$\forall t$ *επιλέγουμε τον έλεγχο u(t) τέτοιον ώστε να ελαχιστοποιείται η διασπορά εξόδου:*

$$J = E\left[y^2(t+\kappa) \right]$$

όπου κ είναι η χρονική καθυστέρηση.

Εξετάζουμε τώρα πως η συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται για μια γενικότερη περίπτωση.

Θεωρούμε το (Σ) που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$Ay(t) = z^{-\kappa} Bu(t) + Ce(t)$$

Έτσι ώστε:

$$y(t+\kappa) = \frac{B}{A}u(t) + \frac{C}{A}e(t+\kappa)$$

Τώρα ορίζουμε τα πολυώνυμα F, G της μορφής:

$$F = 1 + f_1 z^{-1} + \ldots + f_{\kappa-1} z^{-(\kappa-1)}$$

$$G = g_0 + \ldots + g_{n_g} z^{-n_g}$$

$$n_g = \max\left(n_a - 1, n_c - \kappa\right)$$

για να ικανοποιήσουμε την πολυωνυμική εξίσωση:

$$C = AF + z^{-\kappa} G$$

έτσι ώστε το *F* να αναπαριστά τους πρώτους *κ* όρους του

αναπτύγματος $\dfrac{C}{A}$.

Έχουμε λοιπόν:

$$y(t+\kappa) = \left[\frac{B}{A} u(t) + \frac{G}{A} e(t) \right] + Fe(t+\kappa)$$

$$= \left[\frac{B}{A} u(t) + \frac{G}{C} y(t) - \frac{z^{-\kappa} BG}{AC} u(t) \right] + Fe(t+\kappa)$$

$$= \left[\frac{BF}{C} u(t) + \frac{G}{C} y(t) \right] + Fe(t+\kappa)$$

Και τελικά:

$$y(t+\kappa) = \hat{y}(t+\kappa \mid t) + Fe(t+\kappa)$$

όπου $\hat{y}(t+\kappa \mid t)$ είναι η καλύτερη εκτίμηση του $y(t+\kappa)$

βασισμένη σε δεδομένα μέχρι την χρονική στιγμή t.

Τότε:

$$Fe(t+\kappa) = y(t+\kappa) - \hat{y}(t+\kappa \mid t)$$

Είναι το σφάλμα πρόβλεψης της εξόδου που προκύπτει από τις πηγές θορύβου $e(t+1), e(t+2), \ldots, e(t+\kappa)$. Αυτές οι πηγές δεν μπορούν να εξαλειφθούν από το σήμα ελέγχου u(t).

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$J = E\left[\, y^2(t+\kappa) \,\right] = \mathrm{E}\left[\hat{y}(t+\kappa \mid t) + Fe(t+\kappa)\right]^2$$

$$= E\left[\hat{y}(t+\kappa \mid t)\right]^2 + \left(1 + f_1^{\,2} + \ldots + f_{\kappa-1}^{\,2}\right)\sigma_e^2$$

Το J ελαχιστοποιείται θέτωντας:

$$\hat{y}(t+\kappa \mid t) = 0$$

για να πάρουμε νόμο ελέγχου:

$$BFu(t) + Gy(t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

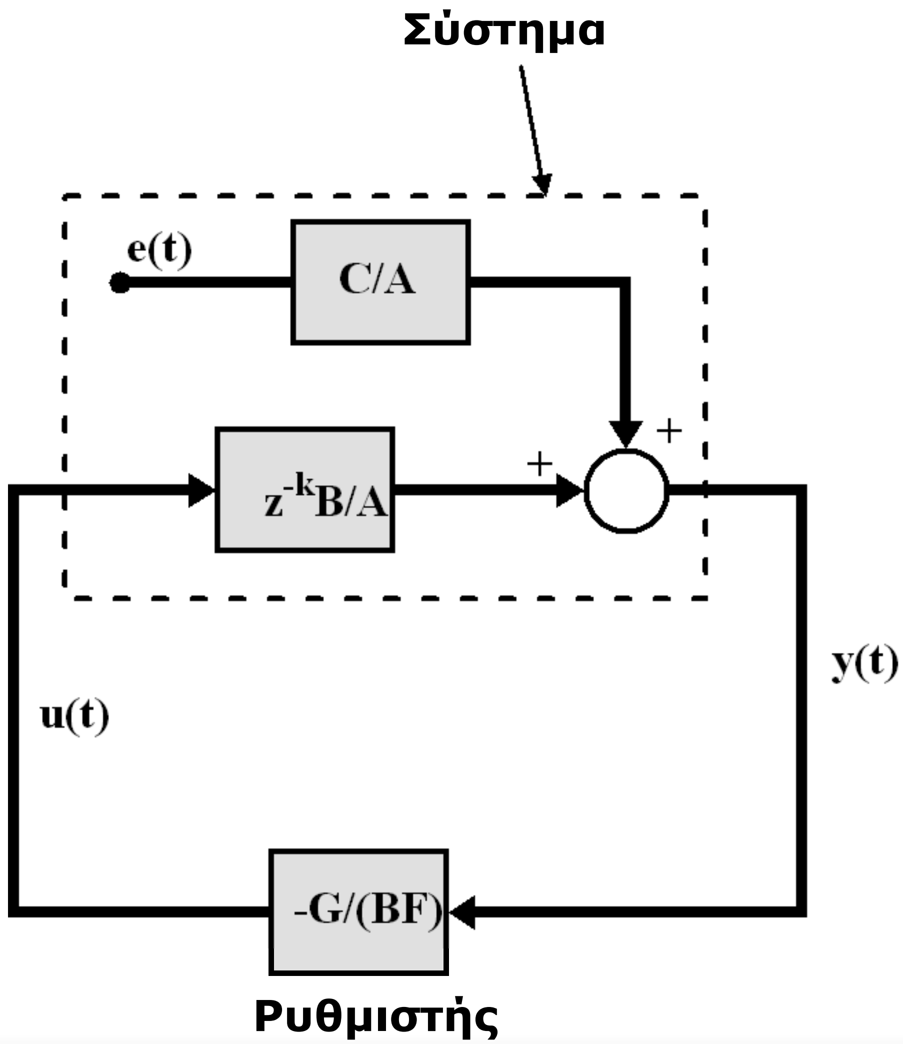
και σήμα εξόδου:

$$y(t) = Fe(t)$$

Που αφορά την ελάχιστη διασπορά εξόδου:

$$J_{\min} = \left(1 + f_1^2 + \ldots + f_{\kappa-1}^2\right)\sigma_e^2$$

Η εξίσωση (Ε) αφορά την στρατηγική ελέγχου ελάχιστης διασποράς που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η διαδικασία σχεδιασμού περιλαμβάνει:

i. Επίλυση για F,G χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$C = FA + z^{-\kappa} G$$

ii. Εφαρμογή του ελέγχου:

$$u(t) = -\frac{G}{BF} y(t)$$

Παρατηρήσεις

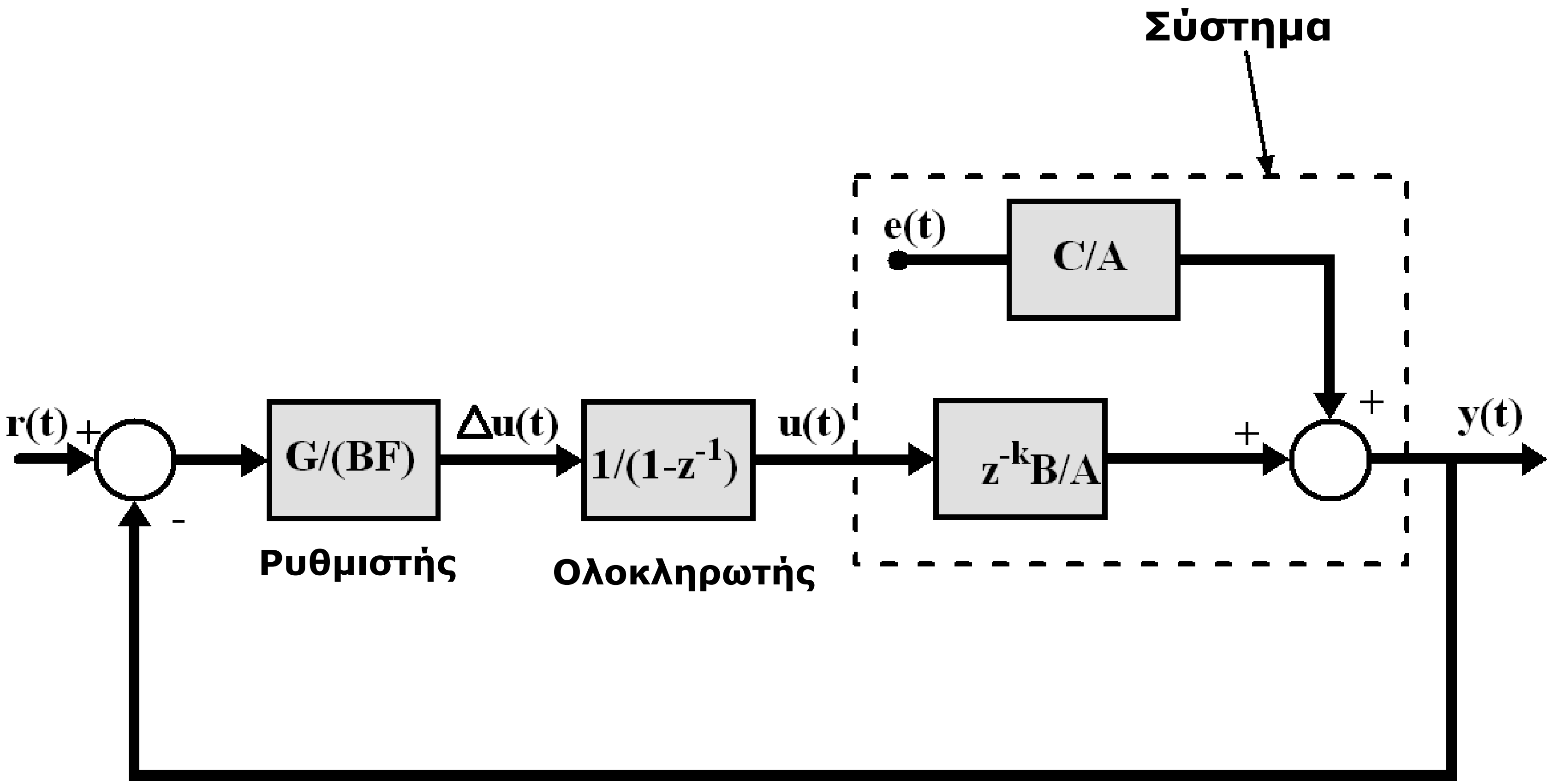
- Μια πολυωνυμική ταυτότητα ($C = AF + z^{-\kappa}G$) πρέπει να επιλυθεί όπως και στην τοποθέτηση πόλων.
- Η χρονική καθυστέρηση *κ* πρέπει να είναι γνωστή.
- Αν κ=1, τότε F=1, και η πολυωνυμική ισότητα δίνει:

$$G(z^{-1}) = z\left[C(z^{-1}) - A(z^{-1})\right]$$

- Ο ελεγκτής επιχειρεί να ακυρώσει τα μηδενικά του εμπρόσθιου μονοπατιού, μερικά εκ των οποίων μπορεί να βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Σερβοελεγκτής ελάχιστης διασποράς

Ο ελεγκτης ελάχιστης διασποράς που είδαμε προηγουμένως στοχεύει στην ρύθμιση της εξόδου του (Σ) γύρω από το μηδεν. Σε περιπτώσεις που θέλουμε ρύθμιση γύρω από μια σταθερή μη μηδενική τιμή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιον άλλο τροποποιημένο ελεγκτή ελάχιστης διασποράς. Ένας τέτοιος ελεγκτής μπορεί να υλοποιηθεί με την προσθήκη ενός ψηφιακού ολοκληρωτή όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σύστημα
e(t)
C/A
r(t)
+
-
G/(BF)
Δu(t)
1/(1-z^-1)
u(t)
z^-k B/A
+
+
y(t)
Ρυθμιστής
Ολοκληρωτής

Έχουμε τον νόμο ελέγχου:

$$\Delta u = \frac{G}{BF}\left(r(t) - y(t)\right)$$

όπου

$$u(t) = \Delta u(t) + u(t-1)$$

Τα πολυώνυμα του ελεγκτή αποκτώνται επιλύοντας την τροποποιημένη εξίσωση:

$$C = FA\Delta + z^{-\kappa}G \qquad (1)$$

$$n_f = \kappa - 1 \qquad n_g = \max\left(n_a, n_c - \kappa\right)$$

Η εξίσωση του κλειστού βρόχου τότε γίνεται:

$$y(t) = \frac{G}{C} r(t-\kappa) + \Delta F e(t)$$

Παρατηρήσεις:

- Υπάρχει μια κ- βημάτων καθυστέρηση μέχρι να εμφανιστεί μια αλλαγή του σήματος αναφοράς r(t) στην έξοδο y(t).
- Η μεταβατική απόκριση από το r(t) στο y(t) καθορίζεται από την συνάρτηση μεταφοράς G/C
- Η ρύθμιση δεν είναι πλέον ελάχιστης διασποράς εξαιτίας του τροποποιημένου πολυωνύμου F που προκύπτει από το ανάπτυγμα $\frac{C}{A\Delta}$ αντί για το $\frac{C}{A}$

Αυτός ο αυξητικός ελεγκτής ελάχιστης διασποράς όπως λέγεται χρησιμοποιείται αρκετά όταν η $r(t)$ είναι σταθερή για μεγάλες χρονικές περιόδους ή αλλάζει ελαφρώς αργά. Ο λόγος γι΄αυτό γίνεται αντιληπτός αν θεωρήσουμε το στοιχείο $y_r(t)$ της εξόδου:

$$y_r(t) = \frac{G}{C} r(t-\kappa) + \Delta F e(t)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1) αυτό γίνεται:

$$y_r(t) = r(t) - \frac{FA}{C} \Delta r(t)$$

Αν τώρα r(t) σταθερή τότε Δr(t) = 0 και η έξοδος ισοδυναμεί με το σήμα αναφοράς όπως απαιτείται. Επίσης αν r(t) μεταβληθεί αργά τότε $y_r(t) \approx r(t)$, έτσι ώστε αργά μεταβαλλόμενα σήματα αναφοράς να μπορούν να παρακολουθηθούν.

Απορυθμισμένη ελάχιστη διασπορά

Ένας διαφορετικός τύπος του βασικού ρυθμιστή ελάχιστης διασποράς είναι και ο αλγόριθμος απορυθμισμένης ελάχιστης διασποράς. Χρησιμοποιείται όταν η ελαχιστοποίηση της διασποράς εξόδου οδηγεί σε μεγάλα σήματα ελέγχου u(t).

Η βασική ιδέα αυτού του αλγορίθμου έγκειται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους:

$$J = E\left[T\left(y(t+\kappa) \right)^2 \right]$$

όπου *T* πολυώνυμο τάξης n_t .

Το κόστος ελαχιστοποιείται από έναν ρυθμιστή που δίνεται από:

$$u(t) = -\frac{G}{BF}y(t)$$

όπου τα πολυώνυμα F, G είναι λύση της εξίσωσης:

$$CT = FA + z^{-\kappa}G$$

και

$$n_f = \kappa - 1$$

$$n_g = \max\left(n_a, n_c + n_t - \kappa\right)$$

Το σφάλμα ρύθμισης του κλειστού βρόχου είναι:

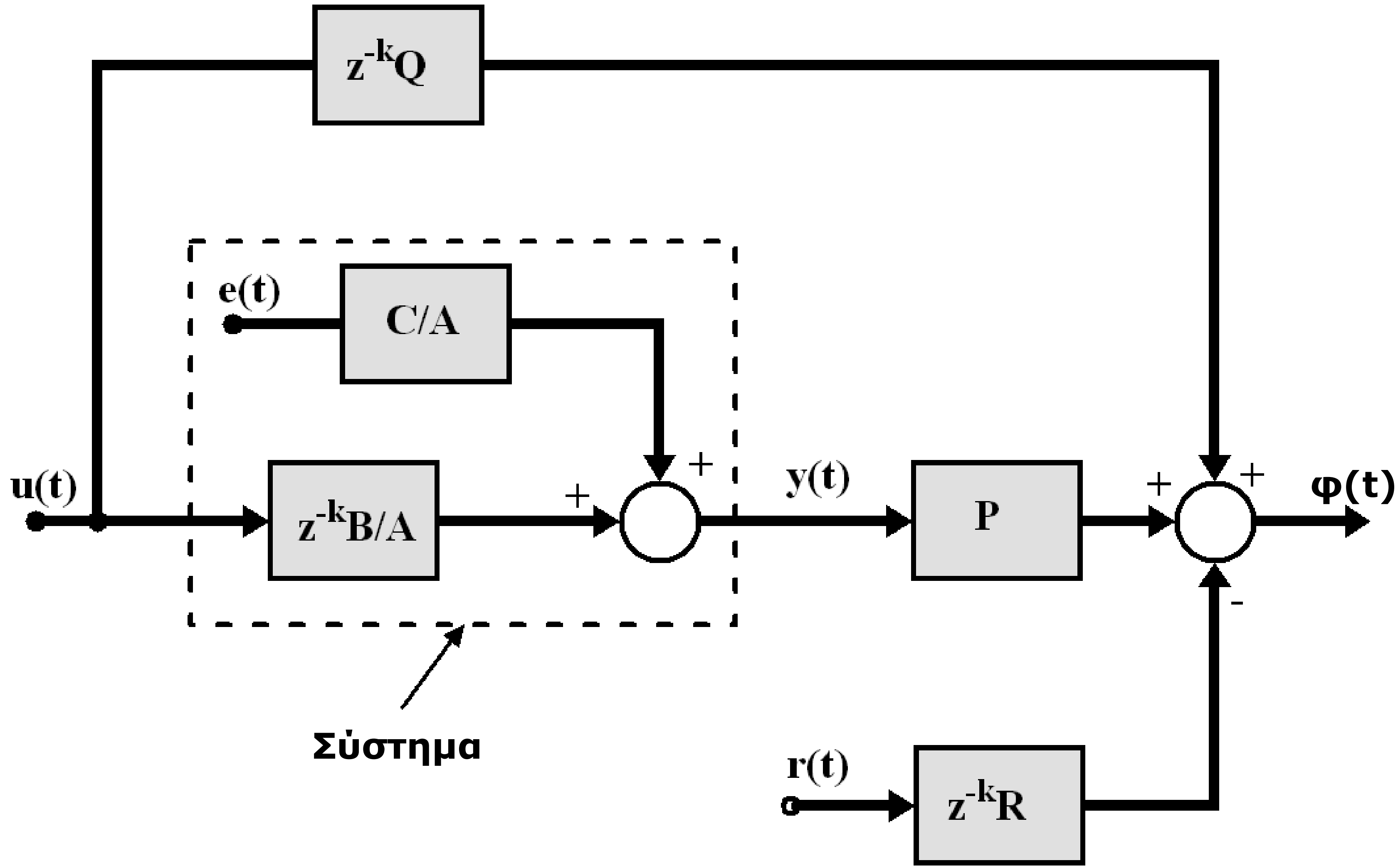
$$y(t) = \frac{F}{T} e(t)$$

Συνεπώς ο αλγόριθμος απορύθμισης μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή του αλγορίθμου τοποθέτησης πόλων κατά τον οποίο ο ρυθμιστής επιλέγει να τοποθετήσει πόλους στα μηδενικά του T.

Γενικευμένος ελάχιστης διασποράς έλεγχος

Η στρατηγική ελέγχου ελάχιστης διασποράς μπορεί να επεκταθεί και να περιλαμβάνει μια σερβοείσοδο r(t) και να ξεπερνά το πρόβλημα που σχετίζεται με την προσπάθεια ακύρωσης ενός μη ελάχιστηςφάσεως *B*. Αυτή η προσέγγιση εισάγει μια ψευδο-έξοδο ϕ(t) που ορίζεται από:

$$\phi(t+\kappa) = Py(t+\kappa) + Qu(t) - Rr(t)$$



z-kQ
e(t)
C/A
u(t)
z-kB/A
+
+
y(t)
P
+
+
φ(t)
-
Σύστημα
r(t)
z-kR

Η συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι η διασπορά της ψευδο-εξόδου:

$$J = E\left[\phi^2\left(t+\kappa\right)\right]$$

Η διαδικασία περιλαμβάνει την διάσπαση του φ(t+κ) σε δύο μέρη, ένα μέρος που μπορεί να μηδενισθεί μέσω του ελέγχου u(t) και ένα δεύτερο μέρος που είναι συνάρτηση των e(t+1), …,e(t+κ) και δεν μπορεί να τροποποιηθεί από τον έλεγχο στο χρόνο t.

Ξεκινάμε ορίζοντας τα E, G μέσω της:

$$PC = EA + z^{-\kappa} G$$

Και υποθέτουμε ότι το φ(t) κανονικοποιείται έτσι ώστε το P(0) να είναι μοναδιαίο,

$$E = 1 + e_1 z^{-1} + \ldots + e_{\kappa-1} z^{-(\kappa-1)}$$

$$G = g_0 + \ldots + g_{n_g} z^{-n_g}$$

$$n_g = \max\left(n_a - 1, n_P + n_c - \kappa\right)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του συστήματος:

$$Ay(t+\kappa) = Bu(t) + Ce(t+\kappa)$$

με E και αντικαθιστώντας για EA από την εξίσωση $PC = EA + z^{-\kappa}G$ παίρνουμε:

$$PCy(t+\kappa) = BEu(t) + Gy(t) + Ce(t+\kappa)$$

Προσθέτοντας $QCu(t) - CRr(t)$ και στις δύο πλευρές έχουμε:

$$C[Py(t+\kappa) + Qu(t) - Rr(t)] = \left(BE + QC\right)u(t) + Gy(t) - CRr(t) + CEe(t+\kappa)$$

Ή σε διαφορετική μορφή:

$$\phi(t+\kappa) = \frac{1}{C}[\left(BE + QC\right)u(t) + Gy(t) - CRr(t)] + Ee(t+\kappa)$$

Η συνάρτηση κόστους ελαχιστοποιείται θέτοντας τον πρώτο όρο του δεξιού μέρους με μηδέν. Επομένως, ο γενικευμένος έλεγχος ελάχιστης διασποράς δίνεται από:

$$\left(BE + QC\right)u(t) = -Gy(t) + CRr(t)$$

ή

$$Fu(t) + Gy(t) + Hr(t) = 0$$

όπου

$$F = BE + QC$$

$$H = -CR$$

Και αντικαθιστώντας παίρνουμε την εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$y(t) = \frac{z^{-\kappa} BR}{PB + QA} r(t) + \frac{(BE + QC)}{(PB + QA)} e(t)$$

Παρατηρήσεις:

1) Αν Q=0, στην προηγούμενη εξίσωση κλειστού βρόχου και οι δύο συναρτήσεις μεταφοράς έχουν ένα κοινό παράγοντα B στον αριθμητή και τον παρονομαστή, και τα μηδενικά ανοικτού βρόγχου ακυρώνονται.

2) Το P φιλτράρει όλα τα δεδομένα κατά 1/P.

3) Για μηδενικό σφάλμα τροχιάς σταθερής κατάστασης (κατά μέσον όρο) ισχύει για την προηγούμενη εξίσωση ότι:

$$\left.\frac{BR}{PB+QA}\right|_{z=1} = 1$$

Αυτή ικανοποιείται εύκολα αν επιλέξουμε:

$$R = P(1)$$

$$Q(1) = 0$$

4) Ο αλγόριθμος είναι αντίστοιχος με τον αλγόριθμο τοποθέτησης πόλων αν οι πόλοι που ορίζονται από τα μηδενικά ενός επιλεγμένου πολυωνύμου Τ χρησιμοποιούνται για να ορίσουν τα P, Q μέσω της εξίσωσης:

$$PB + QA = T$$

Αποτέλεσμα των χρονικών καθυστερήσεων (Υποθετική καθυστέρηση K_m)

1) Αν K_m<K $\rightarrow$ δημιουργούνται μεγάλα κέρδη feedback

2) K_m>K $\rightarrow$ Η ποικιλότητα του θορύβου δεν θα μειωθεί στην ελάχιστή της δυνατή τιμή

Χρονικές καθυστερήσεις και έλεγχος ελάχιστης διασποράς

Στον έλεγχο ελάχιστης διασποράς είναι σημαντικό η χρονική καθυστέρηση *κ* να επιλεχθεί σωστά. Εσφαλμένες τιμές για το *κ* μπορούν να οδηγήσουν σε αποσταθεροποίηση του ελέγχου ή τουλάχιστον να προκαλέσουν μεγάλο σφάλμα ρύθμισης. Θεωρούμε τα δύο ακόλουθα ενδεχόμενα:

A) Αν η επιλεγμένη καθυστέρηση K_m είναι μικρότερη από την πραγματική καθυστέρηση του συστήματος *K* τότε δημιουργούνται μεγάλα κέρδη ανάδρασης που εν τέλει αποσταθεροποιούν το σύστημα.

B) Αν η επιλεγμένη καθυστέρηση K_m είναι μεγαλύτερη από την πραγματική καθυστέρηση του συστήματος *K*, τότε η διακύμανση του θορύβου δεν θα μειωθεί στην ελάχιστή της δυνατή τιμή.