Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 7

Πάτρα 2008

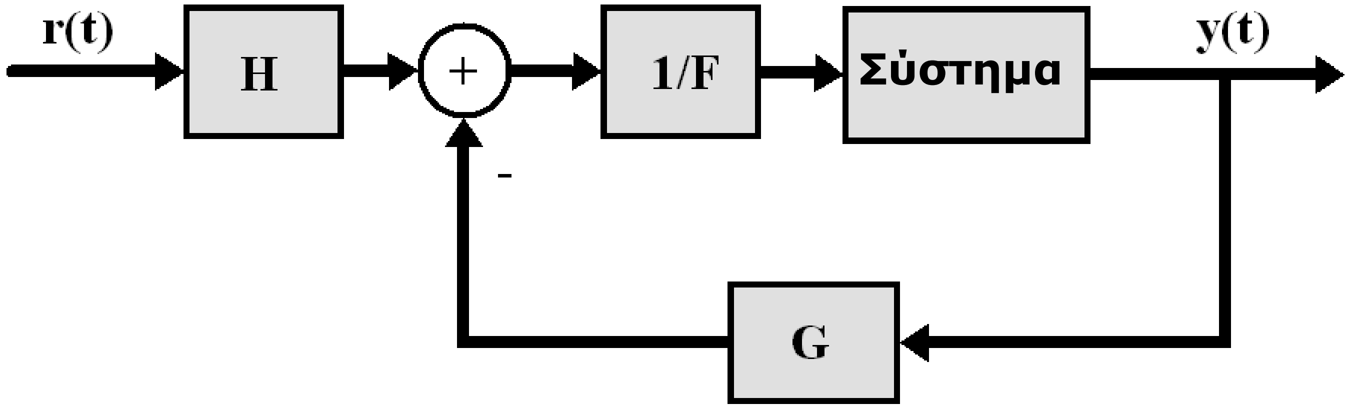
Τοποθέτηση-Επιλογή πόλων

Θεωρούμε ένα (Σ) που ορίζεται από την εξίσωση:

$$Ay(t) = Bu(t-1) + Ce(t)$$

Και με ελεγκτή της μορφής:

$$Fu(t) = Hr(t) - Gy(t)$$



Συνδυάζοντας την εξίσωση του ελεγκτή και του (Σ) έχουμε την περιγραφή για το κλειστό σύστημα:

$$\left(FA + BG\right) y(t) = z^{-1} BHr(t) + CFe(t) \qquad (1)$$

Οι πόλοι του κλειστού μπορούν να τοποθετηθούν στις επιθυμητές θέσεις, προσδιορισμένες από το T, επιλέγοντας τα F, G σύμφωνα με την πολυωνυμική ιδιότητα:

(Diophantine) $$FA + z^{-1} BG = TC \qquad (2)$$

Όπου τα πολυώνυμα F, G, H δίνονται από τις σχέσεις:

$$F = 1 + \ldots + f_{n_f} z^{-n_f}$$

$$G = g_0 + \ldots + g_{n_g} z^{-n_f}$$

$$H = h_0 + \ldots + h_{n_n} z^{-n_n}$$

Για να υπάρχει μοναδική λύση στην εξίσωση (2) οι βαθμοί n_f, n_g πρέπει να επιλεχθούν έτσι ώστε:

$$n_f = n_b$$

$$n_g = n_a - 1, \quad n_a \neq 0$$

με δεδομένο ότι τα A, B δεν έχουν κοινά μηδενικά. Επιπλέον:

$$n_t \leq n_a + n_b - n_c$$

Η σχέση (1) λόγω (2) μας δίνει:

$$y(t) = \frac{HB}{TC} r(t-1) + \frac{F}{T} e(t)$$

όπου το πολυώνυμο του θορύβου C έχει ακυρωθεί στον όρο διαταραχής.

Το H επιλέγεται ώστε να επιτυγχάνει ταίριασμα στο κέρδος χαμηλών συχνοτήτων και ακύρωση του C από το servo-pole set.

$$H = C\left[\frac{T}{B}\right]_{z=1}$$

Οπότε:

$$y(t) = \left[\frac{T}{B}\right]_{z=1}\left[\frac{B}{T}\right]r(t-1) + \frac{F}{T}e(t)$$

Servo-control

Θεωρούμε ένα σύστημα χωρίς θόρυβο (e(t)=0) στο οποίο σκοπός μας είναι η παρακολούθηση ενός σήματος αναφοράς. Το (Σ) αυτό μοντελοποιείται από την σχέση:

$$Ay(t) = Bu(t-1)$$

Με έναν ελεγκτή της μορφής:

$$Fu(t) = -Gy(t) + Hr(t)$$

Η εξίσωση του κλειστού (Σ) είναι βάσει των προηγουμένων:

$$y(t) = \frac{BH}{FA+BG} r(t-1)$$

Αν οι επιθυμητές θέσεις των πόλων δίνονται και πάλι από τα μηδενικά του:

$$T = 1 + t_1 z^{-1} + \ldots + t_{n_t} z^{-n_t}$$

Τότε οι παράμετροι του ελεγκτή δίδονται από την λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$FA + z^{-1}BG = T$$

Μια μοναδική λύση υπάρχει για τις παραμέτρους του ελεγκτή αν τα πολυώνυμα A και B δεν έχουν κάποιο κοινό μηδενικό και οι βαθμοί n_f, n_g, n_t ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$n_f = n_b$$

$$n_g = n_a - 1 \quad (n_a \neq 0)$$

$$n_t \leq n_a + n_b$$

Έχουμε όπως αναφέραμε την εξίσωση κλειστού βρόχου του (Σ) να είναι της μορφής:

$$y(t) = \frac{BH}{T} r(t-1)$$

Και συνεπώς οι πόλοι του κλειστού (Σ) είναι στις επιθυμητές θέσεις όπως αυτές ορίζονται από το T και αυτοί με τη σειρά τους δίνουν τα επιθυμητά ευσταθή χαρακτηριστικά. Παρά ταύτα, εξακολουθεί να υπάρχει το πρόβλημα εξασφάλισης ότι η έξοδος y(t) είναι ίση με το σήμα αναφοράς r(t) για ένα σταθερό (ή ελαφρώς μεταβαλλόμενο) r(t).

Ο πιο εύκολος τρόπος για να γίνει αυτό είναι ο εξής: επιλέγουμε το H στην προηγούμενη εξίσωση να είναι μια σταθερά h που δίνεται από τη σχέση:

$$H = h = \frac{T}{B}\Big|_{z=1}$$

Με αυτόν τον τρόπο η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού BH/T θα είναι μοναδιαία για μηδενική συχνότητα και επομένως y(t) = r(t) για σταθερό σήμα αναφοράς.

Ένας άλλος τρόπος για πού οδηγεί σε καλύτερη μεταβατική συμπεριφορά είναι η επιλογή του Η έτσι ώστε να δώσουμε τα επιθυμητά μηδενικά στο (Σ) μιας και τα μηδενικά (στην περίπτωση αυτή τα μηδενικά του ΒΗ) επηρεάζουν επίσης την μεταβατική συμπεριφορά του (Σ). Αυτό επιτυγχάνεται ακυρώνοντας τον Β όρο επιλέγοντας:

$$H = \frac{1}{B}$$

<u>Ρύθμιση</u>

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε:

r(t)=0

Το (Σ) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$Ay(t) = Bu(t-1) + Ce(t)$$

Η εξίσωση του ρυθμιστή είναι:

$$Fu(t) = -Gy(t)$$

με τοποθέτηση πόλων μέσω της εξίσωσης:

$$FA + z^{-1}BG = TC$$

Και εξίσωση κλειστού βρόχου:

$$y(t) = \frac{F}{T}e(t)$$

Αυτή είναι επίσης έκφραση του σφάλματος ρύθμισης (το οποίο δεν έχει ελαχιστοποιηθεί)

Ας εστιάσουμε τώρα στην επίλυση της εξίσωσης:

$$AF + z^{-1}BG = T$$

όπου

$$A(0) = F(0) = T(0) = 1$$

$$T(z^{-1}) = 0 \rightarrow |z| < 1$$

Αν:

- $n_a = 0$ τότε η λύση είναι μη μηδενική

Αν:

- $n_a \geq 1$ τότε η ύπαρξη τουλάχιστον μίας λύσης απαιτεί την ικανοποίηση τριών συνθηκών:

(i) Αν A,B δεν είναι αμοιβαία πρώτα (coprime), κάθε κοινό μηδενικό πρέπει να είναι μηδενικό του T

(ii) $n_t \leq \max\left(n_a + n_f, n_b + n_g + 1\right)$

(iii) $\max\left(n_a + n_f, n_b + n_g + 1\right) \leq n_f + n_g + 1$

Αν έχουμε ισχυρή ανισότητα τότε ένας άπειρος αριθμός λύσεων είναι πιθανός
Για μία μοναδική λύση, πρέπει να ισχύει:
$\max\left(n_a + n_f, n_b + n_g + 1\right) = n_f + n_g + 1$

Και αυτή η ισότητα οδηγεί σε δύο ενδεχόμενα:

$$n_f = n_b, \qquad n_g \geq n_a - 1, \qquad n_t \leq n_b + n_g + 1$$

$$n_f \geq n_b, \qquad n_g = n_a - 1, \qquad n_t \leq n_a + n_f$$

Για να είναι n_f, n_g ελαχίστου βαθμού (συνεπώς $n_f = n_b$, $n_g = n_a - 1$) πρέπει να ισχύει:

$$n_t \leq n_a + n_b$$

Παράδειγμα:

$$n_a = 1,\ n_b = 1,\ n_t = 3$$

- $n_f = 1 = n_g$

$$\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 \\ a_1 & b_0 & b_0 \\ 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 - a_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad \det = b_0 \left(b_0 - a_1 b_0 \right)$$

- $n_f = 2, n_g = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & & b_0 \\ a_1 & 1 & b_0 \\ & a_1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1-} a_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}, \quad \det = -a_1 \left(b_0 - a_1 b_0 \right)$$

- $n_t = 2, n_f = 1, n_g = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 - a_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad \det = \left(b_0 - a_1 b_0\right)$$

Οι παράμετροι του ελεγκτή βρίσκονται απλά αντιστρέφοντας έναν πίνακα υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας είναι μη ιδιάζων. Οι ορίζουσες του κάθε πίνακα δίδονται παραπάνω.

Η επίλυση της εξίσωσης:

$$AF + z^{-1}BG = T$$

μπορεί να γίνει και με την μέθοδο Kucero.

Η μέθοδος αυτή βρίσκει το μέγιστο κοινό διαιρέτη g των A,B.

- Αν το g διαιρεί το T, τότε αυτό ακυρώνεται και μπορούν να βρεθούν τα F,G.
- Αν το g δεν διαιρεί το T (συνήθης περίπτωση), τότε το T αντικαθίσταται από το gT. Τότε το g μπορεί να ακυρωθεί και να πάρουμε τα F,G.

Για οποιαδήποτε πολυώνυμα A, B ο μέγιστος κοινός διαιρέτης g μπορεί να βρεθεί μαζί με δυο ζεύγη αμοιβαίων πρώτων πολυωνύμων P,Q και R,S έτσι ώστε:

$$AP + BQ = g$$

$$AR + BS = 0$$

Τα οποία μπορούν να εκφραστούν υπό την μορφή πινάκων στην μορφή:

$$\left[g, 0\right] = \left[A, B\right] \begin{bmatrix} P & R \\ Q & S \end{bmatrix}$$