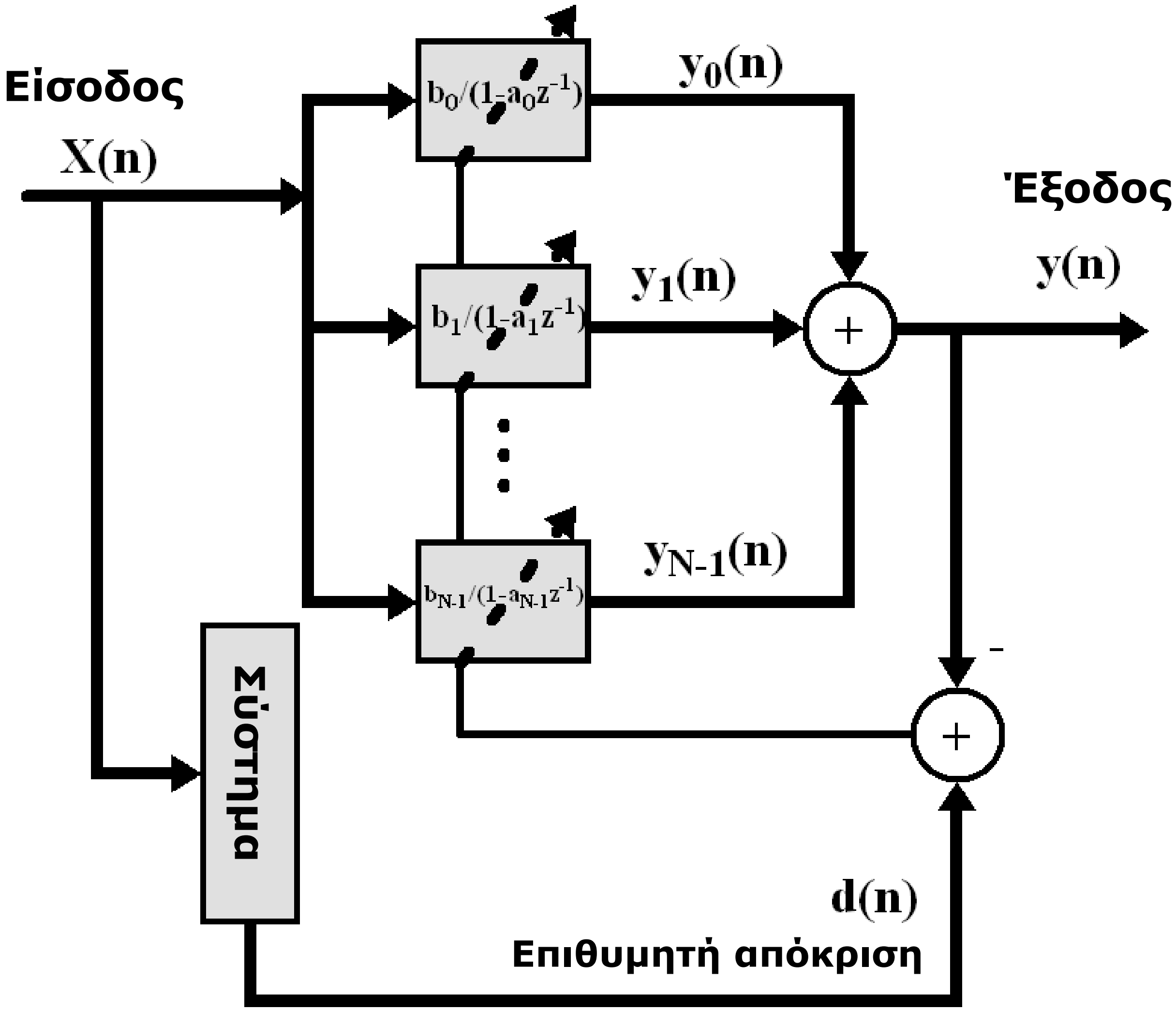
Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 6

Πάτρα 2008

Adaptive IIR filtering



$$Y_{\kappa}(n) = \left(\frac{b_{\kappa}^{*}(n)}{1 - a_{\kappa}^{*}(n) z^{-1}} \right) X(n)$$

*Complex conjugate

$$y(n) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} y_{\kappa}(n) = \theta^{H}(n)\Phi(n)$$

$$\theta(n) = \left(a_0(n) \ldots a_{N-1}(n) b_0(n) \ldots b_{N-1}(n) \right)^{T}$$

$$\Phi(n) = \left(y_0(n-1) \ldots y_{N-1}(n-1) x(n) \ldots x(n) \right)^{T}$$

Gauss-Newton

$$R(n+1) = \lambda R(n) + \alpha \Psi(n) \Psi^{H}(n)$$

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \alpha R^{-1}(n+1) \Psi(n) e^{*}(n)$$

Όπου:

$R(n) -$ Hessian πίνακας (εκτίμηση)

$\alpha -$ Βήμα σύγκλισης

$\lambda = 1 - \alpha$

$$\Psi(n) = \left(y_0^f(n-1) \ldots y_N^f(n-1) x_0^f(n) \ldots x_{N-1}^f(n) \right)^T$$

$$x_\kappa^f(n) = \left(\frac{1}{1 - a_\kappa^*(n) z^{-1}} \right) x(n)$$

$$y_\kappa^f(n-1) = \left(\frac{1}{1 - a_\kappa^*(n) z^{-1}} \right) y_\kappa(n-1)$$

- \- $P(n) = R^{-1}(n)$ χρήση του λήμματος αντιστροφής πίνακα
- $R^{-1}(n) = I \rightarrow$ μεγαλύτερη βάθμωση (πιο αργή σύγκλιση)
- Παρακολούθηση ευστάθειας (σθεναρή)

  (δεν λύνει το πρόβλημα της προβολής των μη ευσταθών πόλων)
- Προβλήματα σύγκλισης αν $a_i(n) = a_j(n) \quad i \neq j$ (πολλαπλοί πόλοι)
- Προεπεξεργασία του σήματος εισόδου οδηγεί σε ταχύτερη σύγκλιση

Κ-βημάτων μπροστά προβλεπτές

Θεωρούμε SISO σύστημα:

$$A(z^{-1})\Delta(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})\Delta(z^{-1})u(t-d) + C(z^{-1})e(t) \qquad (1)$$

Όπου

e(t) – σειρά ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων με μηδενική μέση τιμή και συνδιασπορά R.

u(t) – Θεωρείται εκ των προτέρων γνωστή.

$$A(z^{-1}) = 1 + A_1 z^{-1} + \ldots + A_{n_A} z^{-n_A}$$

$$B(z^{-1}) = B_0 + B_1 z^{-1} + \ldots + B_{n_B} z^{-n_B}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + C_1 z^{-1} + \ldots + C_{n_C} z^{-n_C}$$

Οι ρίζες του $C(z)$ βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο δίσκο.

$$\Delta(z^{-1}) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ - ARMAX} \\ \left(1\text{-z}^{-1}\right) \text{ - ARIncremental MAX} \end{array} \right\}$$

Υποθέτουμε την φιλτραρισμένη έξοδο:

$$y_f(t) \triangleq T(z^{-1})y(t)$$

$$= \frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})} = \frac{P_0 + P_1 z^{-1} + \ldots + P_{n_P} z^{-n_P}}{1 + q_1 z^{-1} + \ldots + q_{n_Q} z^{-n_Q}} \qquad (2)$$

Δεδομένου του σετ μετρήσεων:

$$M_t = \left\{ y(\tau_1), u(\tau_2); \tau_1 \le t, \tau_2 \le t + \kappa - d \right\}$$

Ο ελάχιστης διασποράς Κ-βημάτων μπροστά εκτιμητής του $y_f(t)$ που συμβολίζεται με $\hat{y}_f(t+\kappa/t)$ ελαχιστοποιεί την:

$$J = E\left\{\left[\bar{y}_f\left(t+\kappa/t\right)\right]^2 / M_t\right\}$$

όπου

$$\bar{y}_f(t+\kappa/t) \triangleq y_f(t+\kappa) - \hat{y}_f(t+\kappa/t)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$y_f(t+\kappa) = \frac{PB}{QA} u(t+\kappa-d) + \frac{PC}{QA\Delta} e(t+\kappa) \quad (3)$$

Ο όρος $\frac{PC}{QA\Delta} e(t+\kappa)$ διαιρείται σε δύο μέλη, σε μια συνάρτηση που ανήκει στο M_t (προβλέψιμο) και σε μια με μελλοντικές τιμές $\{e(\tau); \tau > t\}$ (μη προβλέψιμο).

$$\frac{PC}{QA\Delta} = F_\kappa + z^{-\kappa}\frac{G_\kappa}{QA\Delta} \text{ ή } PC = F_\kappa QA\Delta + z^{-\kappa}G_\kappa \qquad (4)$$

$$F_\kappa(z^{-1}) = f_0^{(\kappa)} + f_1^{(\kappa)}z^{-1} + \ldots + f_{n_{F_\kappa}}^{(\kappa)}z^{-n_{F_\kappa}}$$

$$nF_\kappa = \kappa - 1$$

$$G_\kappa(z^{-1}) = g_0^{(\kappa)} + g_1^{(\kappa)}z^{-1} + \ldots + g_{n_{G_\kappa}}^{(\kappa)}z^{-n_{G_\kappa}}$$

$$nG_\kappa = \max\left(nA + nQ, nC + nP - \kappa\right)$$

$$(4) \xrightarrow{(3)} \quad y_f(t+\kappa) = F_\kappa e(t+\kappa) + \frac{G_\kappa}{CQ} y(t) + \frac{F_\kappa B\Delta}{C} u(t+\kappa-d)$$

Υποθέτουμε $\{u(\tau_2); \tau_2 > t\}$ ανεξάρτητο από μελλοντικό θόρυβο.

Τότε το κόστος *J* διασπάται σε

$$J = E\left\{\left[F_\kappa e(t+\kappa)\right]^2\right\} + \left[\frac{G_\kappa}{CQ} y(t) + \frac{F_\kappa B\Delta}{C} u(t+\kappa-d) - \hat{y}_f(t+\kappa/t)\right]^2$$

η ελαχιστοποίηση του *J* μας δίνει

$$\hat{y}_f(t+\kappa/t) = \frac{G_\kappa}{CQ} y(t) + \frac{F_\kappa B\Delta}{C} u(t+\kappa-d) \qquad (5)$$

Αν

$$\delta u(t+\kappa-d) \triangleq \Delta(z^{-1})u(t+\kappa-d)$$

$$yF(t) \triangleq \frac{1}{Q}y(t) = y(t) - \sum_{i=1}^{n_Q} q_i yF(t-i)$$

$$B_\kappa(z^{-1}) \triangleq F_\kappa(z^{-1})B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{nB_\kappa} B_i^{(\kappa)} z^{-1}$$

$$nB_\kappa = nB + \kappa - 1$$

Τότε

$$\hat{y}_f(t+\kappa/t) = -\sum_{i=1}^{n_C} c_i \hat{y}f(t+\kappa-i/t-i)$$

$$+\sum_{i=0}^{nG_\kappa} g_i^{(\kappa)} yF(t-i) \qquad (6)$$

$$+\sum_{i=0}^{nB_\kappa} B_i^{(\kappa)} \delta u(t+\kappa-d-i)$$

Σφάλμα πρόβλεψης αλγορίθμου κ-βημάτων μπροστά

$$\bar{y}_f(t+\kappa/t) = F_\kappa e(t+\kappa)$$

$$\mathrm{E}\left\{\left[\bar{y}_f(t+\kappa/t)\right]^2\right\} = \sum_{i=0}^{\kappa-1}\left[f_i^{(\kappa)}\right]^2 R$$

Ειδικές περιπτώσεις

- K=1

$$F_1 = P_0$$

$$G_1 = z\left[PC - P_0 QA\Delta\right]$$

$$\overline{y}_f(t+1/t) = P_0 e(t+1)$$

Άλλες εκφράσεις

$$\hat{y}_f(t+\kappa/t) = G_\kappa F_\kappa' yF(t) + BF_\kappa F_\kappa' \Delta u(t+\kappa-d) + G_\kappa' \hat{y}_f(t/t-\kappa)$$

Step-recursive formulation

Υπολογίζουμε $\left(F_\kappa, G_\kappa\right)$ από $\left(F_{\kappa-1}, G_{\kappa-1}\right)$

$$PC = F_{\kappa-1}\alpha + z^{-(\kappa-1)}G_{\kappa-1}$$
$$PC = F_\kappa \alpha + z^{-\kappa}G_\kappa$$

$$\alpha = QA\Delta$$
$$n_a = nA + nQ + 1$$

Αν $nA + nQ \geq nC + nP - 1$ τότε

$$nF_{k-1} = \kappa - 2$$
$$nF_\kappa = \kappa - 1$$
$$nG_{\kappa-1} = nG_\kappa = n_a - 1$$

Ορίζουμε:

$$F_{\kappa} = F_{\kappa}^{*} + z^{-\kappa+1} f_{\kappa-1}^{(\kappa)}$$

τότε

$$PC = F_{\kappa}^{*}\alpha + z^{-(\kappa-1)}\left[f_{\kappa-1}^{(\kappa)}\alpha + z^{-1}G_{\kappa} \right]$$

Ή

$$F_{\kappa}^{*} = F_{\kappa-1}$$

$$f_{\kappa-1}^{(\kappa)}\alpha + z^{-1}G_{\kappa} = G_{\kappa-1}$$

Ή

$$f_{\kappa-1}^{(\kappa)} = g_{0}^{(\kappa-1)}$$

$$f_{\kappa-1}^{(\kappa)}\alpha_{i} + g_{i-1}^{(\kappa)} = g_{i}^{(\kappa-1)} \quad i \in [1, n_{a} - 1]$$

$$f_{\kappa-1}^{(\kappa)}\alpha_{n_a} + g_{n_a-1}^{(\kappa)} = 0$$