Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 4

Πάτρα 2008

Ντετερμινιστικά Moving-Average Μοντέλα

Ισχύει:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j u(t-j) = \phi(t-1)^T \theta_0$$

όπου

$$\theta_0^T = \left[b_1, \ldots, b_n\right]$$
$$\phi(t-1)^T = \left[u(t-1), \ldots, u(t-n)\right]$$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι συνθήκες (1)-(3) που είδαμε προηγουμένως για τους διαφόρους αλγορίθμους εκφράζονται σαφώς συναρτήσει της εισόδου {u(t)}.

Για παράδειγμα η συνθήκη (3) εκφαίνεται από την ακόλουθη «ισχυρή μόνιμης διεγέρσεως» συνθήκη:

<u>Ορισμός:</u> Το σήμα εισόδου $\{u(t)\}$ λέγεται πως είναι *ισχυρώς μόνιμα διεγερμένο* τάξης *n,* αν $\forall t$ υπάρχει ένας ακέραιος l έτσι ώστε:

$$\rho_1 I > \sum_{k=t}^{t+l} \begin{bmatrix} u(k+n) \\ u(k+n-1) \\ \vdots \\ u(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k+n) & \dots & u(k+1) \end{bmatrix} > \rho_2 I$$

Όπου $\rho_1, \rho_2 > 0$

Η ασθενέστερη συνθήκη (2) εκφαίνεται από την ακόλουθη «ασθενή μόνιμης διεγέρσεως» συνθήκη:

<u>Ορισμός:</u> Το σήμα εισόδου $\{u(t)\}$ λέγεται πως είναι ασθενώς μόνιμα διεγερμένο τάξεως *n* αν

$$\rho_1 I \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \begin{bmatrix} u(t+n) \\ \vdots \\ u(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t+n) & \ldots & u(t+1) \end{bmatrix} \geq \rho_2 I \qquad (4)$$

Όπου $\rho_1, \rho_2 > 0$

Η προηγούμενη συνθήκη έχει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία στο πεδίο της συχνότητας.

Λήμμα:

Μια στάσιμη είσοδος {u(t)} είναι ασθενώς μονίμως διεγερμένη τάξεως n, αν το δύο πλευρών φάσμα της είναι μη μηδενικό σε n (ή περισσότερα) σημεία.

Το προηγούμενο όριο (σχέση 4) στο πεδίο του χρόνου εκφράζεται στο πεδίο της συχνότητας ως:

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega} \\ \vdots \\ e^{-j(n-1)\omega} \end{bmatrix} dF_n(\omega)\begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & \dots & e^{j(n-1)\omega} \end{bmatrix}$$

όπου $F_n(\omega)$ είναι η συνάρτηση φασματικής κατανομής για την $\{u(t)\}$.

Το συγκεκριμένο λήμμα δείχνει ότι ο συνδυασμός $\frac{n}{2}$ ημιτονοειδών (με συχνότητες $\neq 0$ ή π και τυχαία φάση) θα είναι ασθενώς μόνιμα διεγερμένος τάξεως *n* καθώς κάθε ημιτονοειδής κυματομορφή έχει δύο σημεία στήριξης στο δύο-πλευρών φάσμα.

Deterministic AutoRegressive Moving-Average Models (DARMA)

Μια εναλλακτική μορφή μοντέλου όπου η τρέχουσα διανυσματική έξοδος εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων εξόδων, y(t), και των προηγούμενων εισόδων u(t) είναι η εξής:

$$A_0 y(t) = -\sum_{j=1}^{n_1} A_j y(t-j) + \sum_{j=0}^{m_1} B_j u(t-j-d), \quad \mathrm{t} \geq 0$$

Όπου A_0 είναι τετραγωνικός και μη ιδιάζων πίνακας και d αναπαριστά την χρονική καθυστέρηση.

Το μοντέλο αυτό ονομάζεται DARMA και μπορεί να εκφραστεί και στην μορφή:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad , \quad \mathrm{t} \geq 0$$

Όπου

$$A(q^{-1}) = A_0 + A_1 q^{-1} + \ldots + A_{n_1} q^{-n_1} \quad , \quad A_0 \ \mu\eta \ \iota\delta\iota\acute{\alpha}\zeta\omega\nu$$

$$B(q^{-1}) = (B_0 + B_1 q^{-1} + \ldots + B_{m_1} q^{-m_1}) q^{-d}$$

Η DARMA μορφή ενός μιας εισόδου-μιας εξόδου χρονικώς αμετάβλητου συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_j y(t-j) + \sum_{j=1}^{n} b_j u(t-j)$$

Και στην συνήθη μορφή του:

$$y(t) = \varphi(t-1)^T \theta_0$$

όπου το διάνυσμα $\varphi(t-1)$ έχει την μορφή:

$$\varphi(t-1) = [\,y(t-1), y(t-2), \ldots, y(t-n), u(t-1), \ldots, u(t-n)]^T$$

Για αυτό το μοντέλο, ο αλγόριθμος των ελαχίστων τετραγώνων συγκλίνει στο θ_0 αν:

1. Το σύστημα είναι ευσταθές
2. Η είσοδος $\{u(t)\}$ είναι ασθενώς μόνιμα διεγερμένη τάξεως 2*n*
3. $A(q^{-1})$ και $B(q^{-1})$ είναι relatively prime

Στατιστική αναγωγή

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να αναχθεί σε στατιστική μορφή. Για να γίνει αυτό, πρέπει να γίνουν κάποιες υποθέσεις. Υποθέτουμε λοιπόν ότι:

$$y(t) = \phi^T(t)\theta^0 + e(t) \qquad \text{(A)}$$

όπου θ^0 είναι το διάνυσμα με τις αληθείς παραμέτρους και $\{e(t), t = 1, 2, \ldots\}$ είναι μια σειρά από ανεξάρτητες, ισόποσα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με μηδενικές μέσες τιμές και διασπορά σ^2.

Θεώρημα-Στατιστικές ιδιότητες της εκτίμησης ελαχίστων τετραγώνων

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

και υποθέτουμε ότι τα δεδομένα παράγονται από την εξίσωση (Α).

Αν $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi$ είναι μη ιδιάζων τότε:

i. $E\hat{\theta} = \theta^0$

ii. $\operatorname{cov}\hat{\theta} = \sigma^2 (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}$

iii. $s^2 = 2V(\hat{\theta}, t) / (t - n)$ (μία αμερόληπτη εκτίμηση του σ^2)

όπου n είναι ο αριθμός των παραμέτρων στο θ^0 και $\hat{\theta}$ και t ο αριθμός των δεδομένων.

Μια επιθυμητή ιδιότητα μιας εκτιμώμενης τιμής είναι η δυνατότητα σύγκλισης στην σωστή παραμετρική τιμή καθώς ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνει στο άπειρο. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται συνέπεια (consistency). Υπάρχουν πολλοί τρόποι για αντιληφθούμε την συνέπεια. Για παράδειγμα, η σύγκλιση των μέσων τετραγώνων είναι ένας τέτοιος τρόπος απλά αναλύοντας την διασπορά της εκτιμώμενης τιμής. Η δεύτερη ιδιότητα (ii) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθοριστεί πως η διασπορά της εκτιμώμενης τιμής μειώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός των παρατηρήσεων. Αυτό φαίνεται καλύτερα από το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα - Μείωση της διασποράς

Υποθέτουμε ότι το μοντέλο (Α) έχει μόνο μία παράμετρο (*n*=1).

Αν t είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, έχουμε από την (ii) ότι η διασπορά της εκτιμώμενης τιμής δίδεται από την σχέση:

$$Var\hat{\theta} = \frac{\sigma^2}{\sum_{\kappa=1}^{t} \phi^2(\kappa)}$$

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε διάφορες περιπτώσεις, βάσει της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της φ(t) για μεγάλο t.

a) Υποθέτουμε ότι:

$$\phi(t) \sim e^{-at}, \qquad a > 0 \ .$$

Τότε $\sum \phi^2(\kappa)$ συγκλίνει και η διασπορά σταθεροποιείται.

β) Υποθέτουμε ότι:

$$\phi(t) \sim t^{-a}, \qquad a > 0 \, .$$

Τότε $\sum_{\kappa=1}^{N} \phi^2(\kappa) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\tau\alpha\theta., \ a > 1/2 \\ \log N, \ a = 1/2 \\ N^{1-2a}, \ a < 1/2 \end{array} \right\}$

γ) Υποθέτουμε ότι:

$$\phi(t) \sim 1,$$

Τότε $Var(\hat{\theta}) \to 0$ για 1/t

δ) Υποθέτουμε ότι:

$$\phi(t) \sim t^{a} \;,\; a > 0$$

Τότε $Var(\hat{\theta}) \to 0$ για $t^{-(1+2a)}$

ε) Υποθέτουμε ότι:

$$\phi(t) \sim e^{at} \;,\; a > 0$$

Τότε $Var(\hat{\theta}) \to 0$ για $e^{-2a/t}$

Η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται από τον ρυθμό αύξησης του διανύσματος οπισθοπορείας.

Παράδειγμα

$$\hat{y}(n) = \sum_{\kappa=0}^{N-1} u(n-\kappa)h_{\kappa}$$

Ή

$$y(n) = U^{T}(n)H = H^{T}U(n)$$

$$U(n) = \left[u(n) \quad \ldots \quad u(n-N-1)\right]$$

$$H^{T} = \left[h_{0} \quad h_{1} \quad \ldots \quad h_{N-1}\right]$$

$$E\left\{e^2(n)\right\} = E\left\{y(n) - H^T U(n)\right\}$$

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial H^T} = -2E\left[\left\{Y(n) - H^T U(n)\right\} U^T(n)\right]$$

$$\frac{\partial e^2(n)}{\partial H^T} = 0 \rightarrow E\left\{Y(n) U^T(n)\right\} = E\left\{H^T U(n) U^T(n)\right\} =$$

$$= H_{opt}^T E\left\{U(n) U^T(n)\right\}$$

Ισχύει ότι:

$$E\left\{Y(n)U^T(n)\right\} = P^T$$ - cross-correlation (διασυσχετισμός)

$$E\left\{U(n)U^T(n)\right\} = R$$ - autocorrelation (αυτοσυσχετισμός)

$$P^T = H_{opt}^T R \leftarrow$$ Wiener-Hopf

$$H_{opt} = R^{-1} \cdot P$$

Επαναληπτικοί υπολογισμοί (Recursive Computations)

Η λύση στην εξίσωση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων ($\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$) γράφεται στην αναδρομική της μορφή **(RLS)** ως εξής:

$$P(t)^{-1} = P(t-1)^{-1} + \phi(t)\phi^T(t) \qquad (1)$$

όπου

$$P(t) = (\Phi^T(t)\Phi(t))^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)\phi^T(i) \right)^{-1}$$

Τότε η $\hat{\theta}(t)$ δίνεται από την την εξίσωση:

$$\hat{\theta}(t) = \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)\phi^T(i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)y(i) \right) = P(t)\left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)y(i) \right)$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\sum_{i=1}^{t-1}\phi(i)y(i) = P(t-1)^{-1}\hat{\theta}(t-1) = P(t)^{-1}\hat{\theta}(t-1) - \phi(t)\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

Η εκτίμηση στον χρόνο t μπορεί τώρα να γραφεί ως:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - P(t)\phi(t)\phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)y(t)$$

$$= \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t)\left(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right)$$

Συνεπώς:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \mathrm{K}(t)\varepsilon(t)$$

όπου

$$K(t) = P(t)\phi(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$$

Λήμμα

Υποθέτουμε ότι οι $A,\ C$ $και$ $C^{-1}+DA^{-1}B$ είναι μη ιδιάζοντες τετραγωνικοί πίνακες. Τότε:

$$\left(A+BCD\right)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left(C^{-1}+DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$$

Εφαρμόζοντας αυτό το λήμμα στην εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$P(t)=\left(\phi^{T}(t)\phi(t)\right)^{-1}=\left(P(t-1)^{-1}+\phi(t)\phi^{T}(t)\right)^{-1}$$

$$=P(t-1)-P(t-1)\phi(t)\left(I+\phi^{T}(t)P(t-1)\phi(t)\right)^{-1}\phi^{T}(t)P(t-$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\left(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1)\right)$$

$$K(t) = P(t)\phi(t) = P(t-1)\phi(t)\left(I + \phi^T(t)P(t-1)\phi(t)\right)^{-1}$$

$$P(t) = \left(I - K(t)\phi^T(t)\right)P(t-1)$$

Ο πίνακας $P(t)$ ορίζεται μόνο όταν ο πίνακας $\Phi^{\mathrm{T}}(t)\Phi(t)$ είναι μη ιδιάζων.

Καθώς:

$$\Phi^T(t)\Phi(t) = \sum_{i=1}^{t} \phi(i)\phi^T(i)$$

έχουμε ως αποτέλεσμα ο πίνακας $\Phi^T(t)\Phi(t)$ να είναι πάντα ιδιάζων αν το t είναι αρκετά μικρό. Με σκοπό να αποκτήσουμε μια αρχική συνθήκη για τον P, είναι απαραίτητο να επιλέξουμε ένα $t=t_0$ τέτοιο ώστε $\Phi^T(t_0)\Phi(t_0)$ να είναι μη ιδιάζων και να βρούμε τα:

$$P(t_0) = \left(\Phi^T(t_0)\Phi(t_0)\right)^{-1}$$

$$\hat{\theta}(t_0) = P(t_0)\Phi^T(t_0)Y(t_0)$$

Οι αναδρομικές εξισώσεις μπορούν τότε να χρησιμοποιηθούν για $t>t_0$.

Όμως είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τις αναδρομικές εξισώσεις σε όλα τα βήματα.

Αν

$$P(0) = P_0$$

όπου P_0 είναι θετικά ορισμένος, τότε:

$$P(t) = \left(P_0^{-1} + \Phi^T(t)\Phi(t)\right)^{-1}$$

Ο $P(t)$ μπορεί να βρίσκεται κοντά στο $\left(\Phi^T(t)\Phi(t)\right)^{-1}$ επιλέγοντας αρκετά μεγάλο P_0.