Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 3

Πάτρα 2008

Αλγόριθμος προβολής

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)} \left[y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \right] \quad , \quad \hat{\theta}(0) \text{ δεδομένο}$$

Ο αλγόριθμος προβολής προκύπτει από το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Δεδομένου των $\hat{\theta}(t-1), y(t)$, καθορίστε το $\hat{\theta}(t)$ έτσι ώστε η παράσταση:

$$J = \frac{1}{2} \left\| \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) \right\|^2 \text{ να ελαχιστοποιείται}$$

$$\text{για } y(t) = \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε:

$$J_c = \frac{1}{2}\left\|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\right\|^2 + \lambda\left[y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t)\right]$$

Συνεπώς οι απαραίτητες συνθήκες για να έχουμε ελάχιστο είναι:

$$\frac{\partial J_c}{\partial \hat{\theta}(t)} = 0$$

$$\frac{\partial J_c}{\partial \lambda} = 0$$

Αυτές οι εξισώσεις γίνονται:

$$\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1) - \lambda\phi(t-1) = 0$$

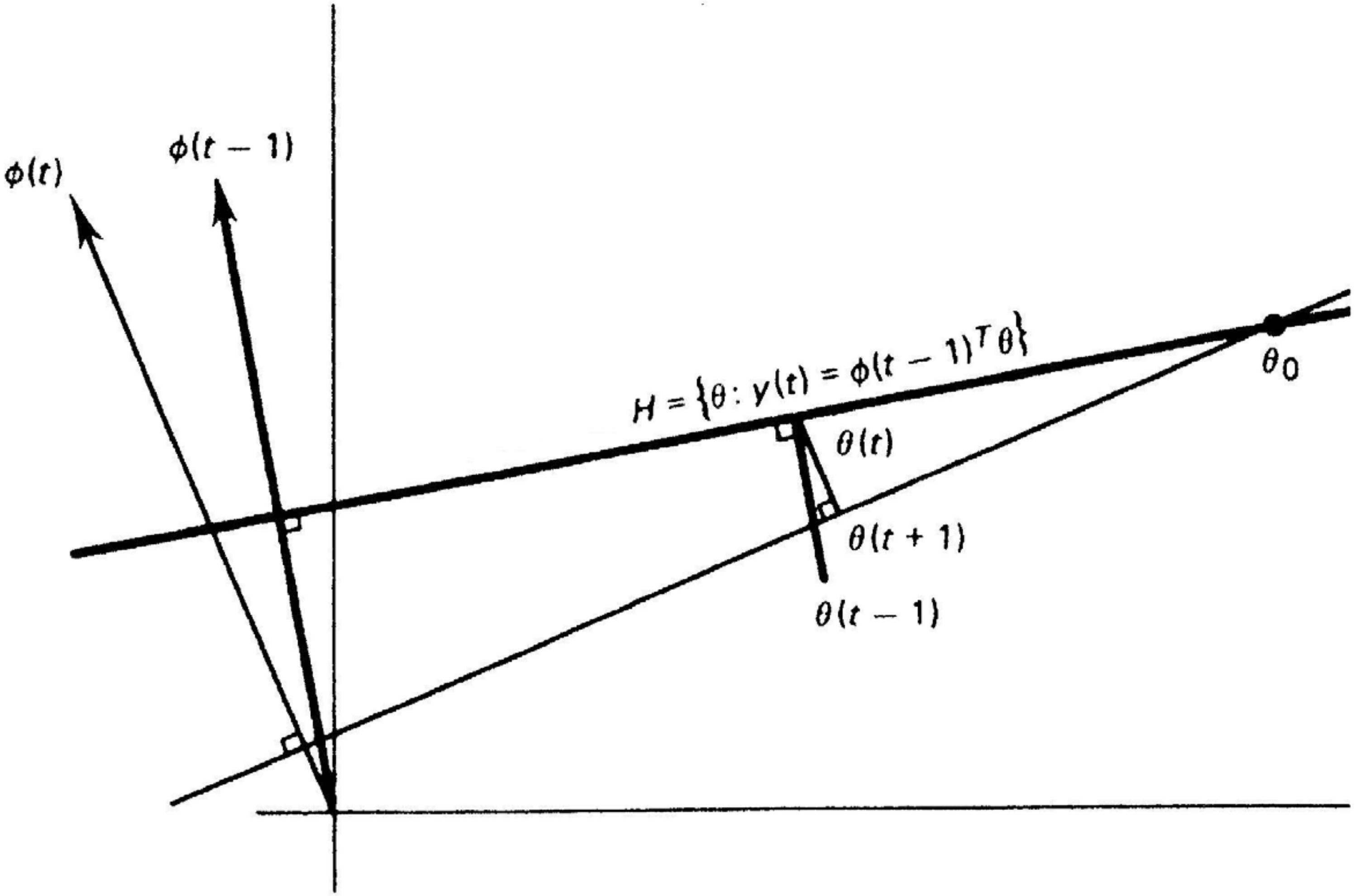
$$y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t) = 0$$

Επομένως με αντικατάσταση προκύπτει:

$$y(t) - \phi(t-1)^T \left[\hat{\theta}(t-1) + \lambda \phi(t-1) \right] = 0$$

$$\lambda = \frac{y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)}$$

Η γεωμετρική αναπαράσταση του προηγούμενου αλγορίθμου απεικονίζεται για μιας δευτέρας τάξεως περίπτωση στο ακόλουθο σχήμα.



$\phi(t)$
$\phi(t-1)$
$H = \{\theta : y(t) = \phi(t-1)^T \theta\}$
θ_0
$\theta(t)$
$\theta(t+1)$
$\theta(t-1)$

Παράδειγμα

Δεδομένου των $y(t)$ και $\phi(t-1)$, όλες οι δυνατές τιμές του θ_0 που ικανοποιούν την $y(t)=\phi(t-1)^T\theta_0$ βρίσκονται στο υπερεπίπεδο (επιφάνεια) $H=\left\{\theta : y(t)=\phi(t-1)^T\theta\right\}$

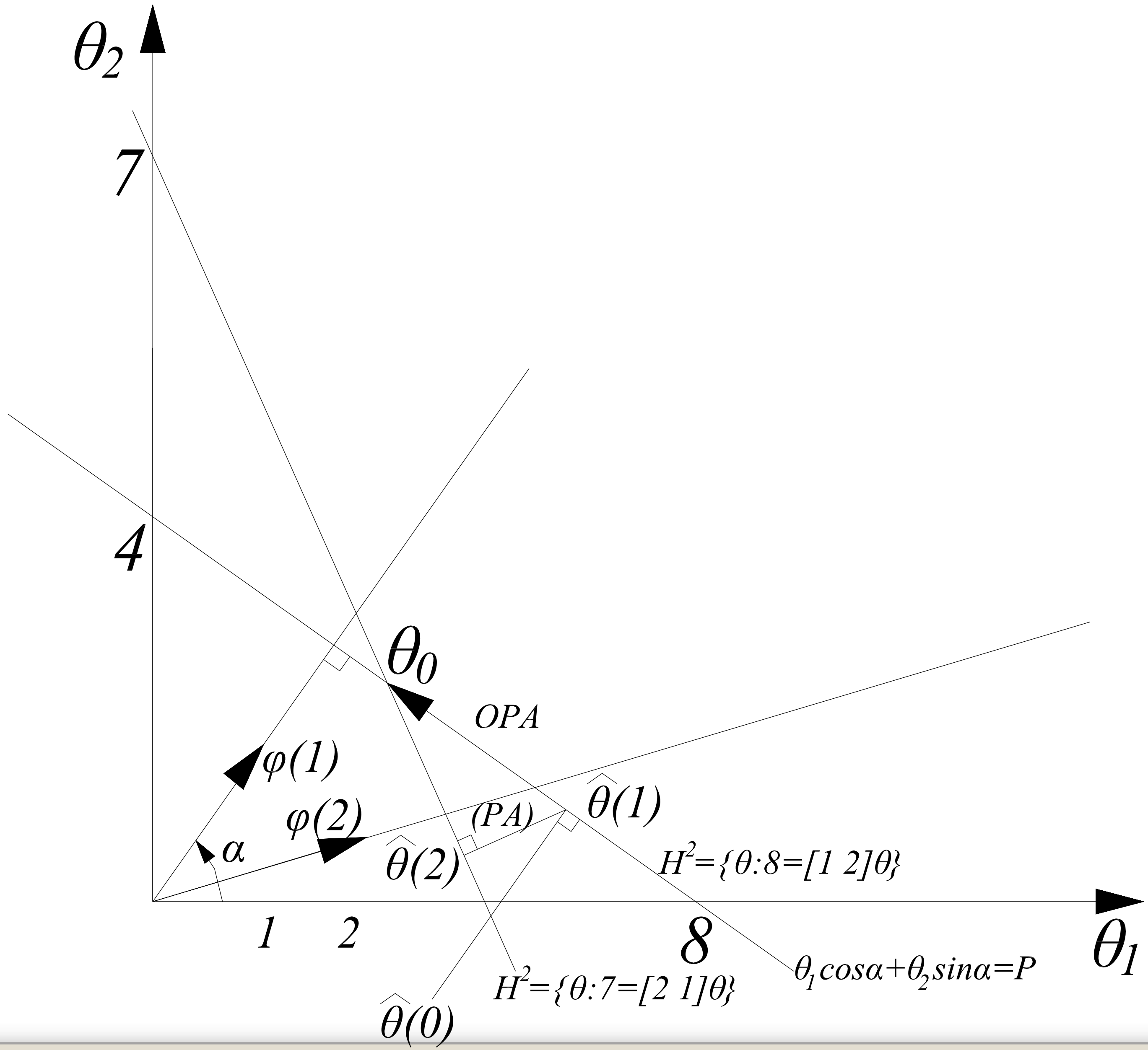
Να βρεθεί το $\hat{\theta}(t)$ που είναι πιο κοντά στο $\hat{\theta}(t-1)$.

$$y=\phi(t-1)^T\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

αν

$$\phi(t-1)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}y(t)=8$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}y(t)=7$$


θ2
7
4
θ0
OPA
φ(1)
φ(2)
α
(PA)
θ̂(1)
θ̂(2)
H2={θ:8=[1 2]θ}
1
2
8
θ1
θ1cosα+θ2sinα=P
H2={θ:7=[2 1]θ}
θ̂(0)

Αλγόριθμος προβολής (NLMS)

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T \phi(t-1)} \left[y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \right]$$

με δεδομένο το $\hat{\theta}(0)$ και $c > 0 \quad , \quad 0 < a < 2$.

Αυτός ο αλγόριθμος είναι γνωστός και ως NMLS (Normalized Least-Mean-Squares) αλγόριθμος όπου η επιλογή του α είναι συνήθως τέτοια ώστε 0<α<<1.

(Λήμμα) Ισχύει ότι:

$$\left\| \hat{\theta}(t) - \theta_0 \right\| \le \left\| \hat{\theta}(t-1) - \theta_0 \right\| \le \left\| \hat{\theta}(0) - \theta_0 \right\|, \qquad \mathrm{t} \ge 1$$

Αλγόριθμος ορθογωνοποιημένης προβολής

Αν το $\phi(t)$ ήταν ορθογώνιο στο $\phi(t-1)$ τότε το $\hat{\theta}(t+1)$ θα συνέπιπτε με το θ_0. Αυτό συνιστά έναν βελτιωμένο αλγόριθμο που θα μπορούσαμε να έχουμε αν προβάλαμε σε μία κατεύθυνση ορθογώνια με τα προηγούμενα $\phi(.)$ διανύσματα.

Έτσι παίρνουμε:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}\left[y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \right]$$

Όπου $$P(t-1)=P(t-2)-\frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^{T}P(t-2)}{\phi(t-1)^{T}P(t-2)\phi(t-1)}$$

Με $P(0)=I,\ \hat{\theta}(1)$ δεδομένο.

Το διάνυσμα $P(t-2)\phi(t-1)$ στον παραπάνω αλγόριθμο είναι το στοιχείο του $\phi(t-1)$ το οποίο είναι ορθογώνιο σε όλα το προηγούμενα $\phi(.)$ διανύσματα.

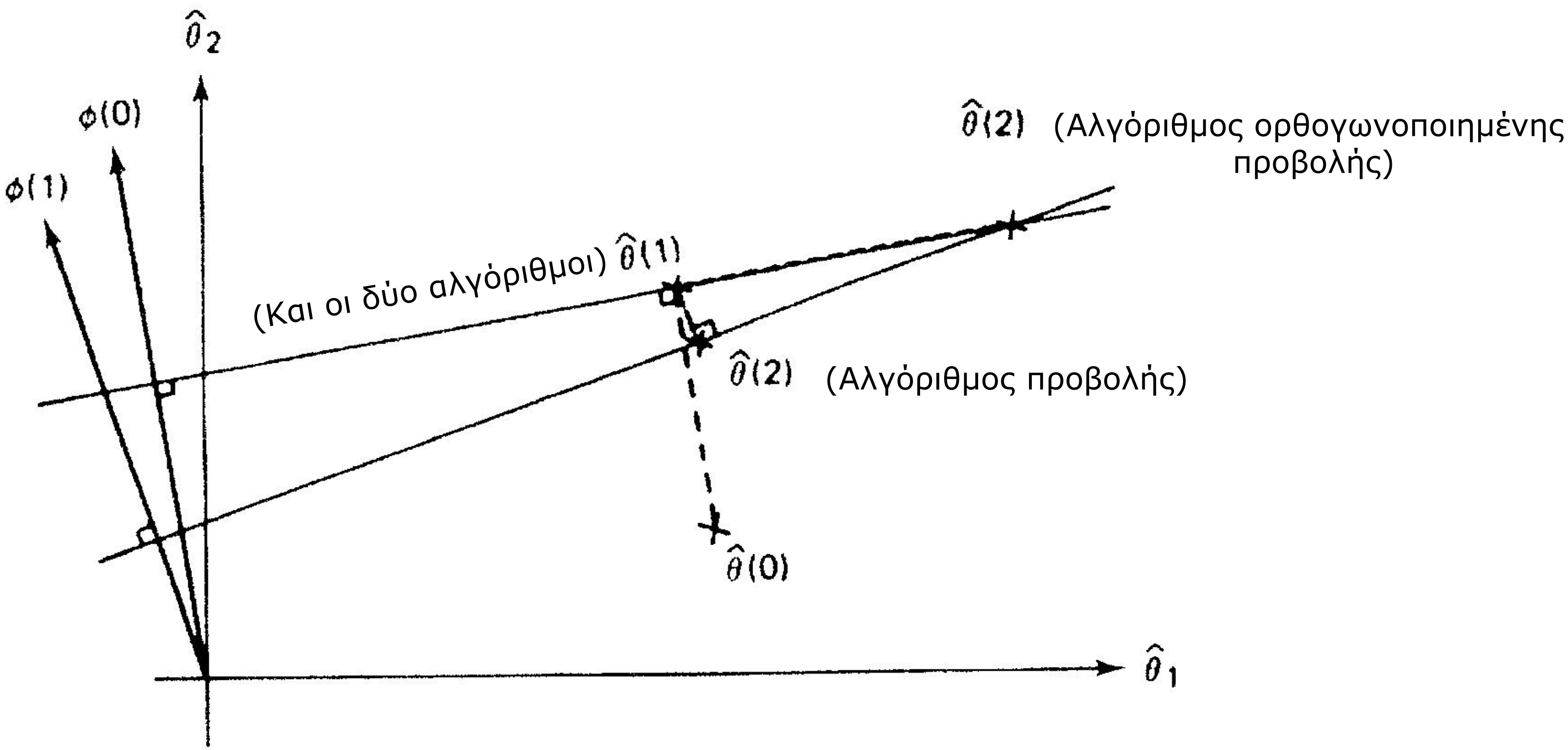
Κάποιες ενδιαφέρουσες ιδιότητες αυτού του αλγορίθμου είναι και οι κάτωθι:

1. $P(t)^2 = P(t)$
2. $P(0)\ldots P(t) = P(t)$
3. $P(t-1)\phi(t) \in R\begin{bmatrix}\phi(1) & \phi(2) & \ldots & \phi(t)\end{bmatrix}$ που αυτό σημαίνει ότι το $P(t-1)\phi(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμό των $\varphi(1)\ldots\varphi(t)$.
4. $P(t-1)\phi(t)$ είναι ορθογώνιο με $\phi(1)\ldots\phi(t-1)$

Θεώρημα

Ο αλγόριθμος αυτός της ορθογωνοποιημένης προβολής θα συγκλίνει σε m-βήματα στο θ_0 αν

$$rank\left[\phi(1) \quad \ldots \quad \phi(m)\right] = n = \text{διάσταση του } \theta_0$$



Σύγκριση των αλγορίθμων προβολής και

ορθογωνοποιημένης προβολής

Για τον ορθογωνοποιημένο αλγόριθμο προβολής, η ανάγκη για έλεγχο σε κάθε βήμα της παράστασης $\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)$ για το αν είναι μηδέν μπορεί να αποφευχθεί εισάγοντας μια σταθερά c στον παρανομαστή έτσι ώστε να έχουμε:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{c + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}\left[y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1) \right]$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{c + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)}$$

Όταν η σταθερά c παίρνει την τιμή 1, ο αλγόριθμος παίρνει την μορφή του γνωστού αλγορίθμου ελαχίστων τετραγώνων.

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για την σύγκλιση των παραμέτρων στους διάφορους αλγορίθμους συνοψίζονται παρακάτω:

Αλγόριθμος ορθογωνοποιημένης προβολής

$$rank\left[\phi(1)\ldots\phi(m)\right] = n = \dim\theta_0 \qquad (1)$$

Ελάχιστα τετράγωνα

$$\lim_{N\to\infty} \lambda \min \sum_{t=1}^{N} \phi(t)\phi(t)^T = \infty \qquad (2)$$

Αλγόριθμος προβολής

$$\sum_{i=0}^{l-1} \frac{\phi(t+i)\phi(t+i)^T}{\phi(t+i)^T\phi(t+i)} \geq cI, \quad c>0,\ \forall t,\ l>0 \text{ και σταθερό.} \qquad (3)$$

Οι προηγούμενες συνθήκες είναι στενά συνδεδεμένες αν και διαφέρουν στις λεπτομέρειες στους διάφορους αλγορίθμους. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να συσχετίσουμε αυτές τις συνθήκες με αντίστοιχες συνθήκες για το σήμα εισόδου.