Πανεπιστήμιο Πατρών
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών
Τομέας Συστημάτων και Αυτομάτου Ελέγχου

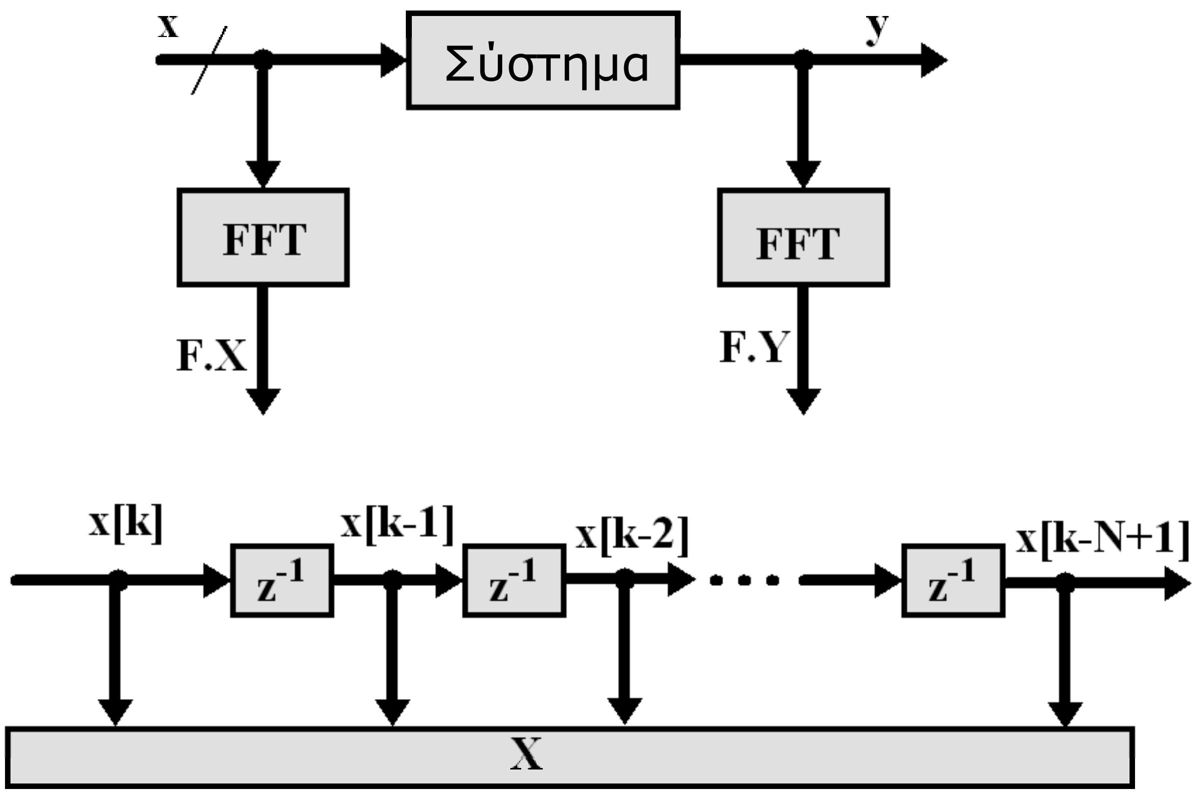
ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ

Διάλεξη 2

Πάτρα 2008

Εμπειρικός προσδιορισμός συνάρτησης μεταφοράς

F-Symmetric με $F_{i,\kappa} = e^{\left(\frac{-j2\pi i\kappa}{N}\right)}, \quad j=\sqrt{-1}$



Έχουμε:

$F \cdot X$: Διακριτός μετασχηματισμός Fourier του διανύσματος X

$F^{-1} = \dfrac{F^*}{N}$, όπου N συνήθως είναι δύναμη του 2 (πχ 4,8,16)

$\hat{H} = (F \cdot Y) \cdot / (F \cdot X)$: Στοιχείο προς στοιχείο διαίρεση

Υποθέτουμε ότι:

$$\left(F \cdot X\right)_{i=0,\ldots,N-1} \neq 0 \text{ για κάποιο } i$$

Τότε η εκτίμηση της συνάρτησης μεταφοράς στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από την:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{h}_0 \\ \hat{h}_1 \\ \vdots \\ \hat{h}_{N/2} \\ \hat{h}_{N/2+1} \\ \vdots \\ \hat{h}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{H} \in C, \text{ Ισχύει για } X \in \mathbb{R}, \ \hat{h}_{N-i} = \hat{h}_i^*$$

Επομένως:

$\hat{h}_i$ (μιγαδικός αριθμός) : εκτίμηση της συνάρτησης μεταφοράς στο

$\omega_i = \dfrac{2\pi i}{\mathrm{NT}}$, όπου T η περίοδος δειγματοληψίας (αν υπάρχει)

Θεωρούμε:

$$y(t) = H_0(z^{-1})x(t) + v(t)$$

σταθερή στοχαστική διαδικασία με φάσμα $\Phi_v(\omega)$ και $R_v(\tau)$ συνδιασπορά

και ισχύει:

$$E\left[v(t)\cdot v(t-\tau)\right] \text{ υπόκειται στο } \sum_{-\infty}^{\infty}\left|\tau\cdot R_v(\tau)\right| < \infty$$

Υποθέτουμε το $u(t)$ είναι ανεξάρτητο των $v(t)$ και $\left(u(t)\right) \le C$

τότε

$$E\hat{H}(e^{i\omega}) = H_0\left(e^{i\omega}\right) + \frac{\rho_1(N)}{U_N(\omega)}$$

$$\left|\rho_1(N)\right| \le \frac{\left(2\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|\kappa\cdot h_0(\kappa)\right|\right)}{\sqrt{N}}\cdot \max\left|u(t)\right|$$

$$E\left[\hat{H}(e^{i\omega})-H_0\right]\left[\hat{H}(e^{-i\xi})-H_0(e^{-i\xi})\right]=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\left|U_N(\omega)\right|^2}\left[\Phi_V(\omega)+\rho_Z\left(N\right)\right] & \text{αν } \xi=\omega \\ \dfrac{\rho_Z(N)}{U_N(\omega)U_N(-\xi)} & \text{αν } \left|\xi\text{-}\omega\right|=\dfrac{2\pi}{N}\kappa,\ \ \kappa=1,2,\ldots,N\text{-}1 \end{cases}$$

$$\left|\rho_Z(N)\right|\leq\frac{C_z}{N}$$

$$\hat{H}(\omega_i) = \left(\sum_{j=-\Delta+i}^{+\Delta+i} a_j \hat{H}(\omega_j) \right) / \left(\sum_{j=-\Delta+i}^{+\Delta+i} a_j \right)$$

$$\hat{H}(e^{i\omega}) \Big|_{@\,time\ \mathrm{t}} = \frac{1}{M} \sum_{n=1} \hat{H}(e^{i\omega}) \Big|_{@\,times\ \mathrm{t\text{-}nT}}$$

$a_j -$ επιλογή – Barlett, Parzen, Hamming windows - $1 - \dfrac{|j-i|}{\Delta}$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (LS) είναι η βασική μέθοδος για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός (Σ). Βάσει αυτής της μεθόδου οι άγνωστες παράμετροι ενός μαθηματικού μοντέλου πρέπει να επιλεχθούν έτσι ώστε:

Το αθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μεταξύ των πραγματικών παρατηρηθέντων τιμών και των υπολογισμένων τιμών, πολλαπλασιασμένο από αριθμούς που μετρούν τον βαθμό ακριβείας, είναι ελάχιστο.

Η μέθοδος αυτή βρίσκει εφαρμογή σε πολλά προβλήματα αλλά είναι ιδιαιτέρως απλή για ένα μαθηματικό μοντέλο της μορφής:

$$y(t) = \phi_1(t)\theta_1 + \phi_2(t)\theta_2 + \ldots + \phi_n(t)\theta_n = \phi(t)^T \theta$$

όπου η παρατηρηθείσα μεταβλητή, θ_1, θ_2,…,θ_n είναι άγνωστες παράμετροι και ϕ_1, ϕ_2,…,ϕ_n είναι γνωστές συναρτήσεις που μπορούν να βασίζονται σε άλλες γνωστές μεταβλητές

Οι μεταβλητές φi ονομάζονται και μεταβλητές οπισθοπορείας (regression variables).

Έχουμε:

$$\phi^T(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \ldots & \phi_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \theta^T = \begin{bmatrix} \theta_1 & \ldots & \theta_n \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \ldots & y(t) \end{bmatrix}^T$$

$$E(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon(1) & \varepsilon(2) & \ldots & \varepsilon(t) \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(t) \end{bmatrix}$$

όπου

$$\varepsilon(i) = y(i) - \hat{y}(i) = y(i) - \phi^T(i)\theta$$

Το σφάλμα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων μπορεί επομένως να γραφει ως εξής:

$$V(\theta,t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\varepsilon(i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\left(y(i) - \phi^T(i)\theta\right)^2 = \qquad \text{(E)}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{E}^{\mathrm{T}}\mathrm{E} = \frac{1}{2}\left\|\mathrm{E}\right\|^2$$

όπου

$$\mathrm{E} = \mathrm{Y} - \hat{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y} - \Phi\,\theta$$

Η λύση στο πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα

Η συνάρτηση απώλειας (Ε) γίνεται ελάχιστη για παραμέτρους $\hat{\theta}$ τέτοιες ώστε:

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T Y$$

Αν ο πίνακας $\Phi^T \Phi$ είναι μη ιδιάζων, τότε το ελάχιστο είναι μοναδικό και δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση απώλειας (Ε) μπορεί να γραφεί ως:

$$2V(\theta,t)=E^{T}E=\left(Y-\Phi\theta\right)^{\mathrm{T}}\left(Y-\Phi\theta\right)=Y^{T}Y-Y^{T}\Phi\theta-\theta^{T}\Phi^{T}Y+\theta^{T}\Phi^{T}\Phi\theta$$

Εφόσον ο πίνακας $\Phi^{T}\Phi$ είναι πάντα μη αρνητικά ορισμένος, η συνάρτηση V έχει ένα ελάχιστο.

Έχουμε:

$$2V(\theta,t) = Y^T Y - Y^T \Phi\,\theta - \theta^T \Phi^T Y + \theta^T \Phi^T \Phi\,\theta$$
$$+ Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y - Y^T \Phi \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y$$

$$= Y^T \left(I - \Phi\left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T\right) Y + \left(\theta - \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y\right)^T \Phi^T \Phi \left(\theta - \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y\right)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος είναι ανεξάρτητος του θ. Ο δεύτερος όρος είναι πάντα θετικός. Το ελάχιστο δίδεται από:

$$\theta = \hat{\theta} = \left(\Phi^T \Phi\right)^{-1} \Phi^T Y$$

Κι επομένως το θεώρημα αποδείχθηκε.

Παρατηρήσεις:

❖ Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\hat{\theta}(t) = \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)\phi^T(i) \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)y(i) \right) = P(t)\left(\sum_{i=1}^{t} \phi(i)y(i) \right)$$

❖ Η συνθήκη για την οποία ο πίνακας $\Phi^T\Phi$ είναι αντιστρέψιμος ονομάζεται συνθήκη *διέγερσης*.

Γεωμετρική ερμηνεία

Το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να αναχθεί σε γεωμετρικό πρόβλημα .

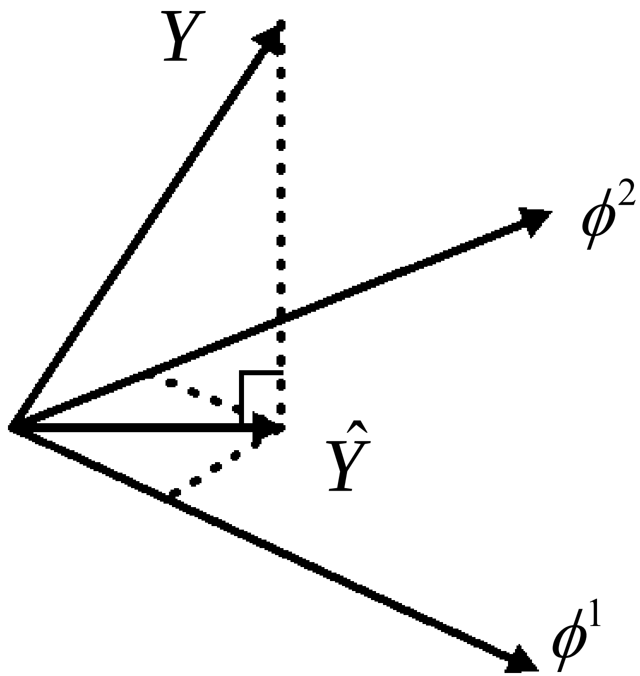
Έχουμε λοιπόν την εξίσωση $E = Y - \hat{Y} = Y - \Phi\theta$ να δίδεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon(1) \\ \varepsilon(2) \\ \vdots \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1(1) \\ \phi_1(2) \\ \vdots \\ \phi_1(t) \end{bmatrix} \theta_1 - \ldots - \begin{bmatrix} \phi_n(1) \\ \phi_n(2) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix} \theta_n$$

Ή αλλιώς: $E = Y - \phi^1\theta_1 - \phi^2\theta_2 - \ldots - \phi^n\theta_n$

Όπου ϕ^i -είναι οι στήλες του πίνακα Φ. Συνεπώς το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα εύρεσης των σταθερών: $\theta_1, \ldots, \theta_n$ έτσι ώστε το διάνυσμα Y να προσεγγίζεται όσο γίνεται καλύτερα από έναν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$.

Ας υποθέσουμε ότι το διάνυσμα $\hat{Y}$ προσεγγίζεται βέλτιστα από έναν γραμμικό συνδυασμό των $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$ και ότι $E = Y - \hat{Y}$.



Τότε το διάνυσμα Ε ειναι το μικροτερο δυνατόν όταν είναι ορθογώνιο σε όλα τα διανύσματα ϕ^i . Αυτό σημαίνει ότι:

$$\left(\phi^i\right)^T \left(y - \theta_1\phi^1 - \theta_2\phi^2 - \ldots - \theta_n\phi^n\right) = 0 \qquad , \; i = 1, \ldots, n \quad .$$

Το διάνυσμα θ είναι μοναδικό αν τα $\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.