ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 2ΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ ΣΑΕ – ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2016

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω συνεχές σύστημα
$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A\bar{x} + B\bar{u}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}$$

1.1 [1 β] Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A;

Ο πίνακας A διαχωρίζεται σε 2 blocks, κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχεί σε controller canonical form, δηλαδή
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Οι ιδιοτιμές του άνω αριστερά τμήματος είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του οποίου οι συντελεστές είναι στην τελευταία γραμμή ή $s^3 + 3s^2 + 2s + 0 = 0$ ή $s\left(s+1\right)\left(s+2\right) = 0$. Η ιδιοτιμή του κάτω δεξιά πίνακα είναι η -3.

Συνολικά λοιπόν οι ιδιοτιμές είναι οι 0, -1, -2 και -3.

1.2 [1 β] Βρείτε τις συναρτήσεις μεταφοράς $G_i(s), i = 1,2$ έτσι ώστε $Y(s) = G_1(s)U_1(s) + G_2(s)U_2(s)$

Αναφορικά με την πρώτη είσοδο, δηλαδή το σύστημα
$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}$$
, η συνάρτηση μεταφοράς υπολογίζεται απευθείας ως $\dfrac{Y}{U_1(s)} = \dfrac{3s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s} + \dfrac{0}{s+3} = \dfrac{3s}{s^2 + 3s + 2}$.

Αναφορικά με την δεύτερη είσοδο, δηλαδή το σύστημα
$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}$$
, η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\frac{Y}{U_2(s)} = \frac{0s^2}{s^3 + 3s^2 + 2s} + \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+3}.$$

Οπότε $G_1(s) = \dfrac{3s}{s^2 + 3s + 2}$ και $G_2(s) = \dfrac{1}{s+3}$.

1.3 [1 β] Υπολογίστε νόμο ελέγχου $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{r}$ έτσι ώστε οι ελέγξιμοι πόλοι του συστήματος να είναι στις θέσεις -1, -2, -3, και -4

Το κλειστό σύστημα είναι $\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$, ή

$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3k_1 & -2+3k_2 & -3+3k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3+k_4 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} r$. Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$\frac{Y}{R}(s) = \frac{3s^s}{s^3 + (3-3k_3)s^2 + (2-3k_2)s - 3k_1} + \frac{1}{s+3-k_4}$. Υπάρχουν πολλοί τρόποι επιλογής των κερδών k_i ανάλογα με το ποιους πόλους για ποιο τμήμα της συνάρτησης θα επιλεγεί. Επί παραδείγματι $k_4 = -1$ τότε η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$\frac{Y}{R}(s) = \frac{3s^s}{s^3 + (3-3k_3)s^2 + (2-3k_2)s - 3k_1} + \frac{1}{s+4}$ και θα πρέπει να επιλεγούν τα κέρδη k_1, k_2 και k_3 έτσι ώστε οι τρεις εναπομείναντες πόλοι να είναι στις θέσεις -1,-2 και -3, ή

$\frac{Y}{R}(s) = \frac{3s^s}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+4} = \frac{3s^s}{s^3+6s^2+11s+6} + \frac{1}{s+4}$, οπότε $[k_1, k_2, k_3] = [-2, -3, -1]$.

1.4 [1 β] Υπολογίστε την συνάρτηση μεταφοράς $\frac{Y(s)}{\tilde{R}(s)} = G(s)$.

Η συνάρτηση μεταφοράς για τα κέρδη που επελέγησαν είναι

$$\frac{Y}{R}(s) = \frac{3s^s}{s^3+6s^2+11s+6} + \frac{1}{s+4} = \frac{4s^3+18s^2+11s+6}{s^4+10s^3+35s^2+50s+24}$$

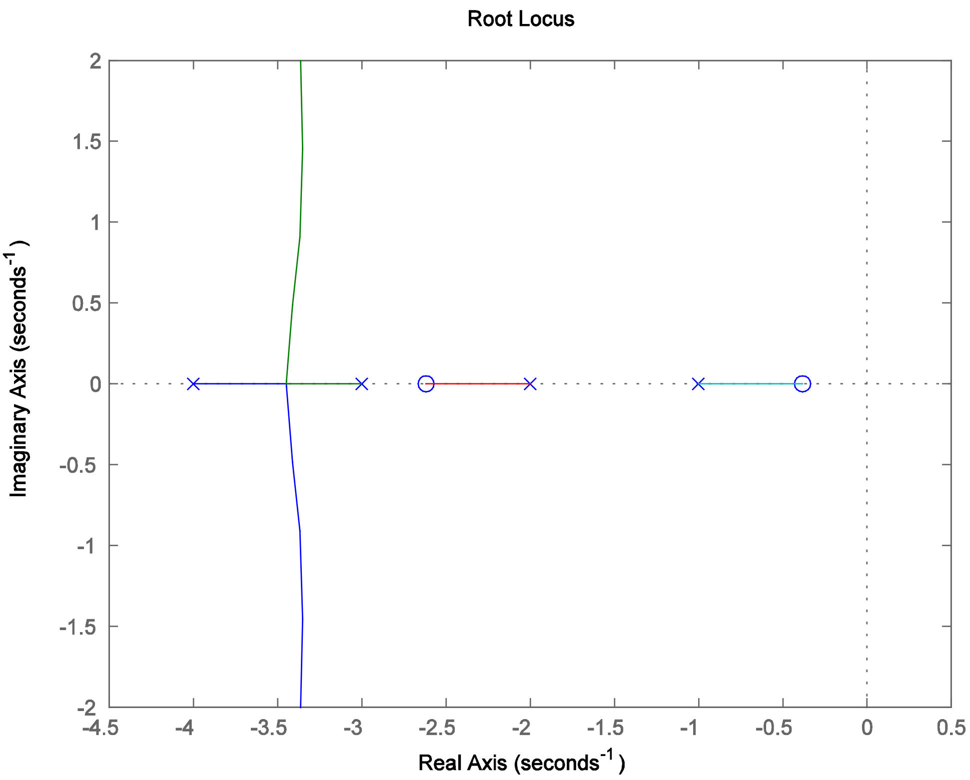
1.5 [1 β] Έστω $\tilde{r}(t) = H\ r(t)$ όπου $r(t)$ μία βηματική είσοδος. Να υπολογιστεί το κέρδος H έτσι ώστε $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

Για το προεπιλεγέντα κέρδη, και επειδή $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)\left(HG(s)\right) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}H\frac{6}{24}$, $H = 4$.

1.6 [1 β] Έστω ότι εφαρμόζεται ο νόμος ελέγχου από το ερώτημα 1.3, αλλά $u_2 = 0$, δηλαδή $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\tilde{r}$ και υποθέστε την αλλαγή του στοιχείου (3,1) του διανύσματος *B* από 3 σε 3(1+γ). Δείξτε τους πόλους του κλειστού συστήματος καθώς το γ μεταβάλλεται.

Το κλειστό σύστημα είναι $\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6-6\gamma & -11-9\gamma & -6-3\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\overline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3+3\gamma \\ 0 \end{bmatrix} r$. Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της εξίσωσης $s^3 + (6+3\gamma)s^2 + (11+9\gamma)s + (6+6\gamma) = 0$. Καθώς το γ μεταβάλλεται οι πόλοι υπακούουν την εξίσωση $(s^3+6s^2+11s+6) + 3\gamma(s^2+3s+1) = 0$, ή

$1 + 3\gamma\frac{(s+2.618)(s+0.382)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = 0$. Οι πόλοι του κλειστού σαν συνάρτηση του γ προκύπτουν από τον ακόλουθο Γ.Τ.Ρ.



Root Locus
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5

ΘΕΜΑ 2°

2.1 [1 β] Έστω συνεχές σύστημα $\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \overline{x} = A\overline{x}$ και $\overline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε την έξοδο $\overline{x}(t) = \mathrm{e}^{At}\,\overline{x}(0)$.

Ο πίνακας A μπορεί να μετασχηματιστεί σε $M\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^{\,2} & \lambda_2^{\,2} & \lambda_3^{\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} M^{-1}$, όπου

$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [0, -1, -2]$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Η έξοδος

$$\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & & \\ & e^{-1t} & \\ & & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

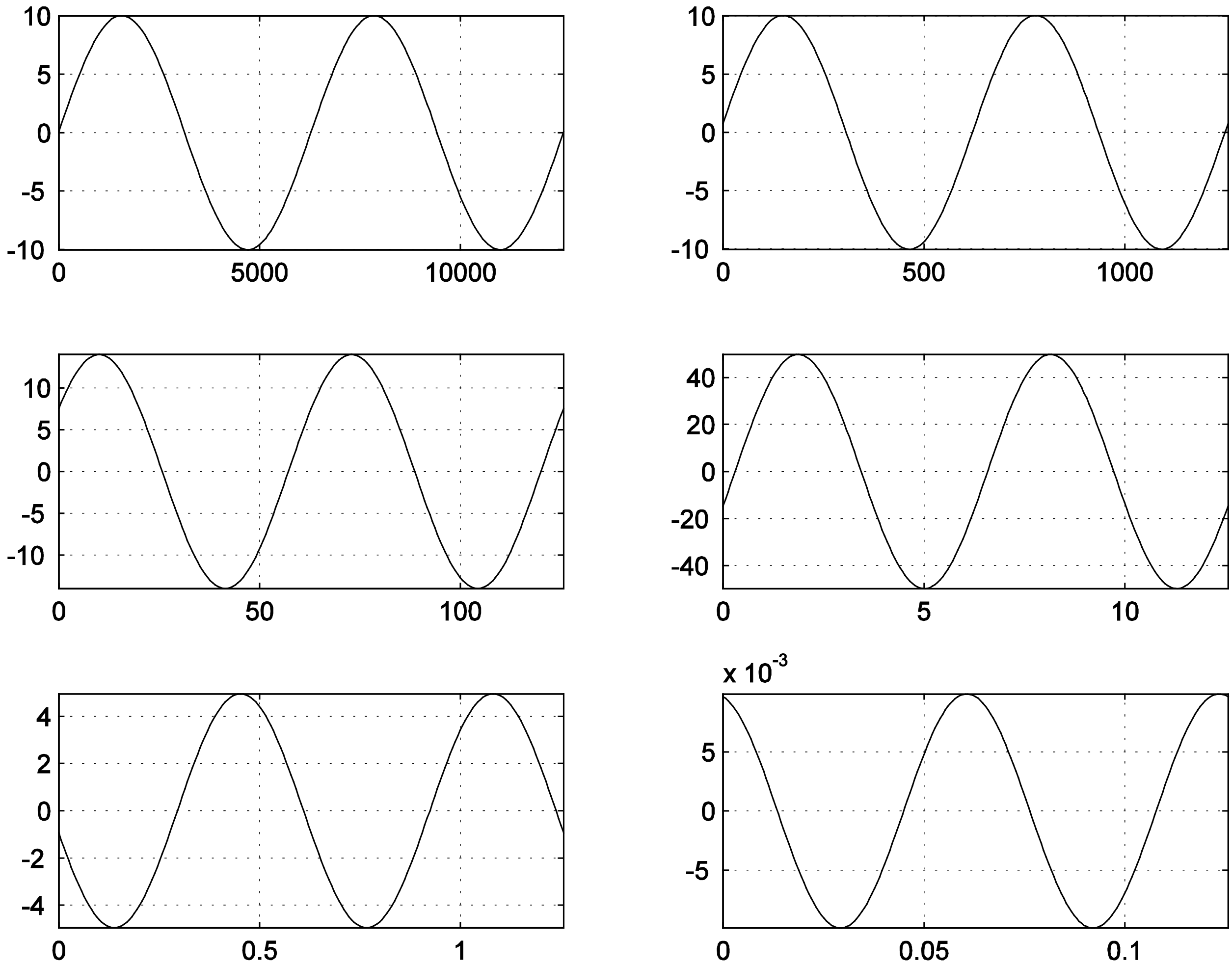
2.2 [1 β.] Αν ο πίνακας A αλλάξει σε $A + 2\mathrm{I}_{3\times 3}$ υπολογίστε την έξοδο $\overline{x}(t)$.

Η έξοδος είναι $\overline{x}(t) = \mathrm{e}^{(A+2I_{3\times3})t}\,\overline{x}(0) = \mathrm{e}^{At}\mathrm{e}^{2I_{3\times3}t}\,\overline{x}(0)$, οπότε η απάντηση είναι

$$\overline{x}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{0t} & & \\ & e^{-1t} & \\ & & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3ο ΘΕΜΑ [3.0 βαθμοί]

Θεωρείστε το διπλανό σύστημα ανοικτού βρόχου . Έστω ότι αυτό το σύστημα διεγείρεται με τις ακόλουθες ημιτονοειδείς εισόδους $u_i(t) = \sin(\omega_i t),\, i = 1, \ldots, 6$. Οι αντίστοιχες αποκρίσεις $y_i(t),\, i = 1, \ldots, 6$ του συστήματος απεικονίζονται στο ακόλουθο (διαδοχική αρίθμηση κατά γραμμές π.χ., $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{matrix}$).



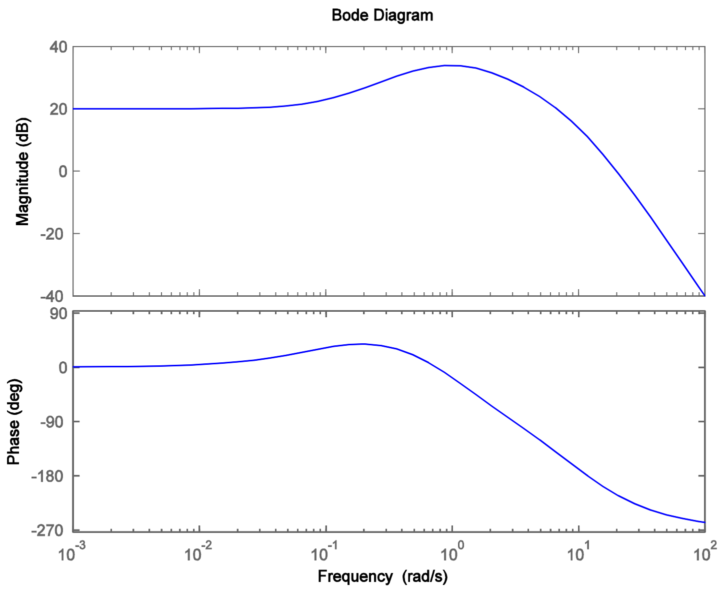
3.1 [1 β.] Υπολογίστε την μαθηματική έκφραση των σημάτων εισόδου και εξόδου $y_i(t) = Y_i \sin(\omega_i t + \psi_i), \quad i = 1, \ldots, 6.$

Ο ακόλουθος πίνακας καταγράφει τις τιμές Y_i, ω_i, ψ_i

	1	2	3	4	5	6
Y_i	10	10.04	14	49.75	4.95	0.01
ω_i(rad/sec)	0.001	0.01	0.1	1	10	100
ψ_i°	0.45	4.45	32.43	-17.13	-169.15	-257.49

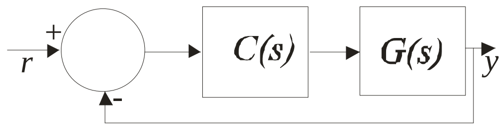
3.2 [1 β.] Με βάση αυτές τις μετρήσεις αναγνωρίστε την συνάρτηση μεταφοράς *G(s)* και υπολογίστε προσεγγιστικά τα περιθώρια κέρδους και φάσης

Από τις μετρήσεις μπορεί να παραχθεί προσεγγιστικά το Bode-διάγραμμα, όπως στο κάτωθι Σχήμα



Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι

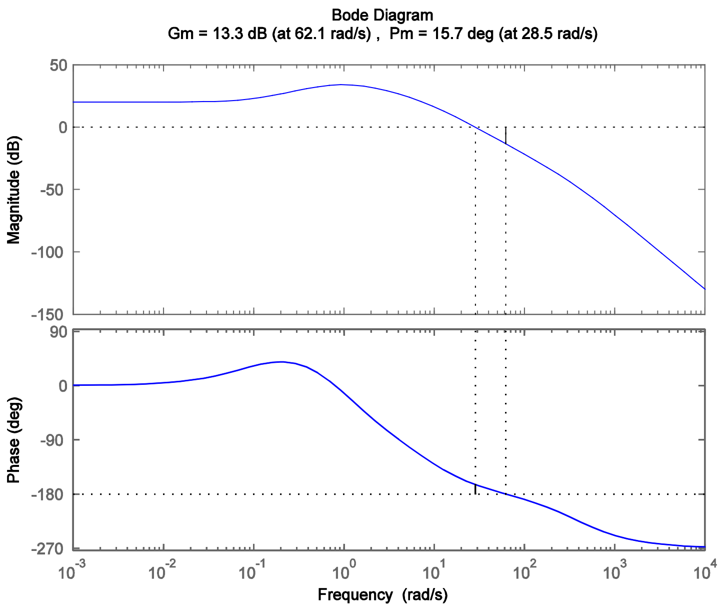
$$G(s)=\frac{10^4(s+0.1)}{(s+1)^2(s+10)^2}$$



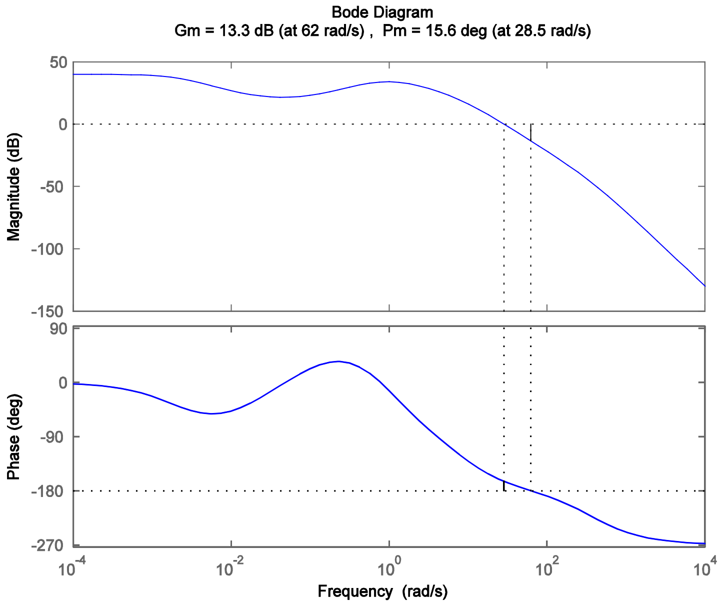
3.3 [1 β.] Να σχεδιαστεί ελεγκτής *C(s)* έτσι ώστε ταυτόχρονα: 1) το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για μία βηματική είσοδο να είναι όσο πιο μικρό γίνεται, και 2) να γίνει το περιθώριο φάσης τουλάχιστο 10°.

Από το προηγούμενο Bode-διάγραμμα, προκύπτει GM=-11db, $\omega_{-180^\circ}=11.8$ rad/sec, PM=-31.4°, $\omega_{0\text{db}}$=20rad/sec.

Υπό την προϋπόθεση ότι κρατάμε το $\omega_{0\text{db}}$ ανεπηρέαστο (αν και ασταθές το σύστημα με μοναδιαία αρνητική ανατροφοδότηση) ένας ελεγκτής lead ο οποίος θα προσθέσει $\phi^{\max}=10^\circ+31.4^\circ$ φάση επαρκεί για το κριτήριο 2. Για λόγους ασφάλειας αντί για 41.4° προσθέτουμε 70°. Δηλαδή $C_{\text{lead}}(s)=K_{\text{lead}}\dfrac{1+\dfrac{s}{\omega_{-180^\circ}}}{1+\dfrac{s}{p_{\text{lead}}}}$, όπου $p_{\text{lead}}\geq\omega_{-180^\circ}\dfrac{1+\sin(\phi^{\max})}{1-\sin(\phi^{\max})}=32.163\,\omega_{-180^\circ}$ και $K_{\text{lead}}=1$. Τονίζεται ότι χρησιμοποιείται η τιμή ω_{-180° αντί της $\omega_{0\text{db}}$. Η χρήση αυτού του lead-ελεγκτή οδηγεί σε ένα Bode-διάγραμμα για την συνάρτηση $C_{\text{lead}}(s)G(s)$

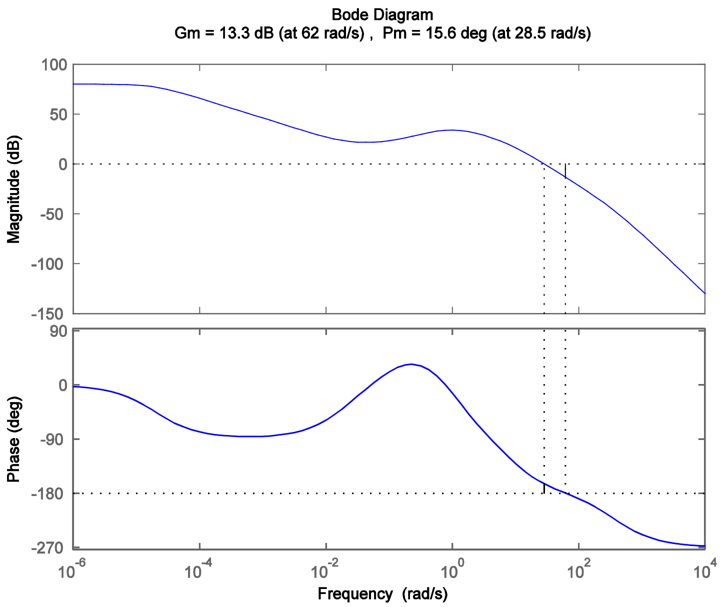


Αγνοώντας το γεγονός ότι έχει ήδη αλλάξει το $\omega_{0\text{db}}$ μετά την χρήση του lead-ελεγκτή, ένας ελεγκτής καθυστέρησης φάσης ο οποίος να προσθέτει όσο γίνεται πιο πολύ κέρδος έτσι ώστε το σφάλμα σε μία βηματική είσοδο να είναι όσο το δυνατό μικρότερο ικανοποιεί το κριτήριο-1. Δηλαδή $C_{\text{lag}}(s) = K_{\text{lag}} \dfrac{1+\dfrac{s}{z_{\text{lag}}}}{1+\dfrac{s}{p_{\text{lag}}}}$, όπου $p_{\text{lag}} < z_{\text{lag}} << \omega_{0\text{db}}$ και $K_{\text{lag}} = \dfrac{p_{\text{lag}}}{z_{\text{lag}}}$. Επί παραδείγματι αν $z_{\text{lag}} = \dfrac{\omega_{0\text{db}}}{1000} = 10\,p_{\text{lag}}$ το Bode-διάγραμμα του lead-lag αντισταθμισμένου συστήματος είναι όπως στο κάτωθι Σχήμα

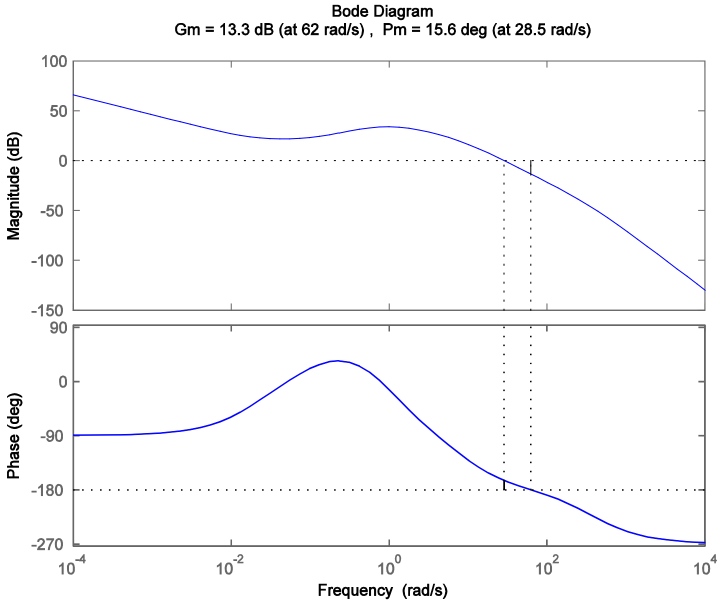


όπου είναι προφανές ότι έχει αυξηθεί η τιμή του μέτρου στις χαμηλές συχνότητες ενώ παράλληλα έχουμε $\text{PM} = 31.1^{\circ} > 10^{\circ}$.

Όσο μεγαλύτερος ο λόγος $\dfrac{z_{\text{lag}}}{p_{\text{lag}}}$ τόσο αυξάνεται το κέρδος στις χαμηλές συχνότητες αλλά τόσο δυσκολότερη γίνεται και η υλοποίηση αυτού του ελεγκτή. Για παράδειγμα όταν αυτός ο λόγος γίνει 1000, τότε το Bode-διάγραμμα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή.



Θεωρητικά όταν $p_{\text{lag}} \to 0$, τότε $C_{\text{lag}}(s) = K_{\text{lag}} \dfrac{1+\dfrac{s}{z_{\text{lag}}}}{s}$, και το σύστημα γίνεται τύπου 1 με αποτέλεσμα το σφάλμα για βηματική είσοδο να γίνει 0. Το Bode-διάγραμμα σε αυτή την περίπτωση είναι


Bode Diagram
Gm = 13.3 dB (at 62 rad/s) , Pm = 15.6 deg (at 28.5 rad/s)
Magnitude (dB)
100
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
90
0
-90
-180
-270
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Frequency (rad/s)