ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ – 2015-16, 1η Ενδιάμεση Εξέταση Νοεμβρίου 2015

1ο ΘΕΜΑ [2.0 βαθμοί]

Έστω σύστημα το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη δυναμική εξίσωση

$\dddot{x} + \frac{12}{\pi} x\, \ddot{x} + 3\sqrt{2}\cos(x)\, e^{\dot{x}} + Dx = u\, \cos(x)$. Για το σημείο λειτουργίας $x^o = \frac{\pi}{4}, \dot{x}^o = \ddot{x}^o = \dddot{x}^o = 0$:

1.1 [1 β] Γραμμικοποιείστε την προηγούμενη δυναμική εξίσωση

$\dddot{x}^o + \frac{12}{\pi} x^o\, \ddot{x}^o + 3\sqrt{2}\cos(x^o)\, e^{\dot{x}^o} + Dx^o = u^o\, \cos(x^o)$, δηλαδή $3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^0 + D\frac{\pi}{4} = u^o\, \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, ή

$3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,1 + D\frac{\pi}{4} = u^o\,\frac{\sqrt{2}}{2}$, ή $u^o = \sqrt{2}\left(3 + D\frac{\pi}{4}\right)$.

Έστω $x = x^o + \Delta x$ και οι υπόλοιπες παράγωγοι $\dot{x} = \Delta\dot{x}, \ddot{x} = \Delta\ddot{x}, \dddot{x} = \Delta\dddot{x}$, τότε η μη γραμμική διαφορική εξίσωση γύρω από το σημείο λειτουργίας απλουστεύεται σε

$\Delta\dddot{x} + \frac{12}{\pi}\frac{\pi}{4}\Delta\ddot{x} + 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) e^{\Delta\dot{x}} + D\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) = \left(u^o + \Delta u\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right)$, ή κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους

$$\Delta\dddot{x} + 3\,\Delta\ddot{x} + 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\Delta x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\Delta x)\right]\left[1 + \Delta\dot{x}\right] + D\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) =$$
$$\left(u^o + \Delta u\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\Delta x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\Delta x)\right]$$
, ή

$$\Delta\dddot{x} + 3\,\Delta\ddot{x} + 3\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta x\right]\left[1 + \Delta\dot{x}\right] + D\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) = \left(u^o + \Delta u\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta x\right]$$, ή

$$\Delta\dddot{x} + 3\,\Delta\ddot{x} + 3\left[1 - \Delta x\right]\left[1 + \Delta\dot{x}\right] + D\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) = u^o\frac{\sqrt{2}}{2} + \Delta u\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}u^o\Delta x$$, ή

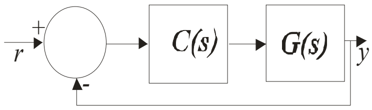
$$\Delta\dddot{x} + 3\,\Delta\ddot{x} + 3 + 3\Delta\dot{x} - 3\Delta x + D\frac{\pi}{4} + D\Delta x = u^o\frac{\sqrt{2}}{2} + \Delta u\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(3 + D\frac{\pi}{4}\right)\Delta x$$, ή

$$\Delta\dddot{x} + 3\,\Delta\ddot{x} + 3\Delta\dot{x} + \left(-3 + D + 3 + D\frac{\pi}{4}\right)\Delta x = \Delta u\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1.2 [1 β] Επιλέξτε τον όρο D (αν υπάρχει τέτοια περίπτωση) έτσι ώστε οι πόλοι του γραμμικοποιημένου συστήματος να είναι στο -1.

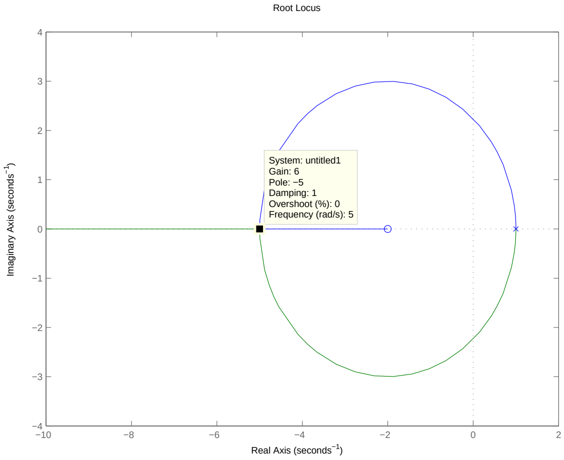
Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\sqrt{2}/2}{s^3 + 3s^2 + 3s + D\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)}$. Για να είναι και οι τρείς πόλοι στο -1 θα πρέπει $D\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

2^o ΘΕΜΑ [2.0 βαθμοί]

Έστω το σύστημα 

με *C(s)=k* και $G(s) = \dfrac{2(s+2)}{(s-1)^2}$.

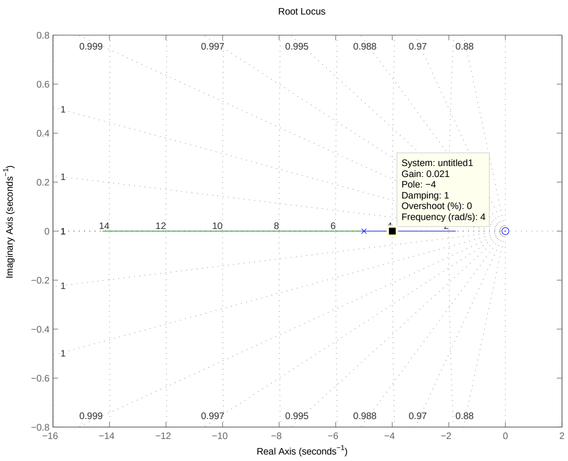
2.1 [1 β] Να υπολογιστεί το *k* έτσι ώστε η απόκριση να είναι η τάχιστη



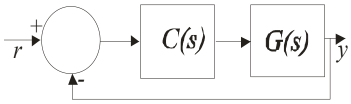
2.2 [1β] Με δεδομένο το κέρδος που υπολογίσατε από το προηγούμενο ερώτημα, έστω ότι η *G(s)* μεταβάλλεται σε $G(s) = \dfrac{2(s+\gamma s+2)}{(s-1)^2}$. Βρείτε τα όρια του θετικού γ έτσι ώστε όλοι οι πόλοι/ του κλειστού συστήματος να έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -4.

Για $C(s) = k = 6$ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι

$\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{12(s+\gamma s+2)}{(s-1)^2 + 12(s+\gamma s+2)} = \dfrac{12(s+\gamma s+2)}{(s+5)^2 + 12\gamma s}$. Οι πόλοι του κλειστού συστήματος είναι οι ρίζες της $(s+5)^2 + 12\gamma s = 0$ καθώς το γ μεταβάλλεται. Για γ=0.021 ο κυρίαρχος πόλος είναι στο -4, όπως φαίνεται στον ΓΤΡ

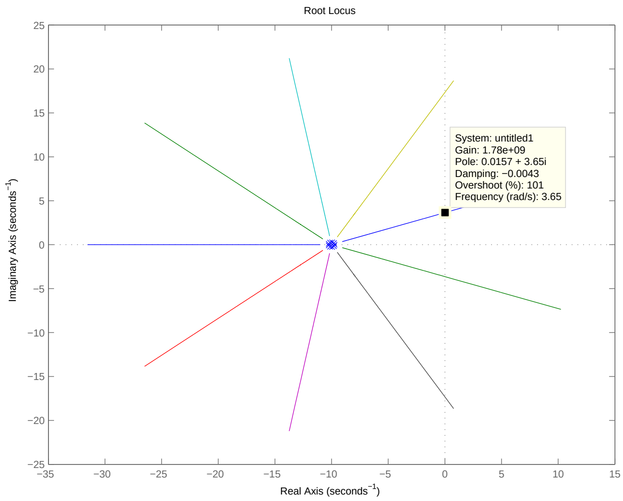


3^{o} ΘΕΜΑ [3.0 βαθμοί]

Έστω το σύστημα 

με $C(s)=k\geq 0$ και $G(s)=\dfrac{1}{(s+10)^{8}}$.

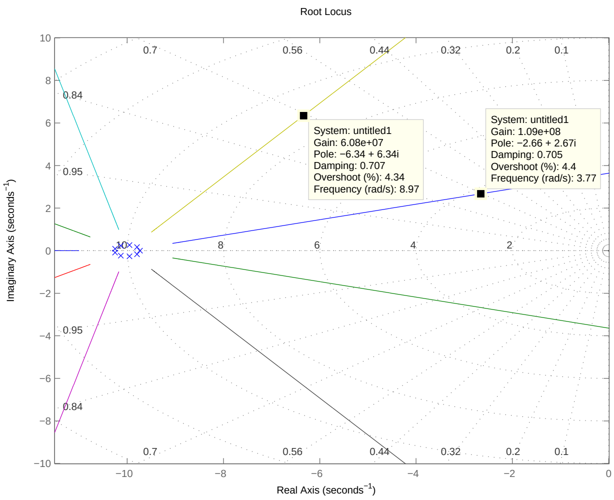
3.1 [1β] Υπολογίστε το μέγιστο k^{cr} για το οποίο το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές.

Ο ΓΤΡ του προβλήματος είναι 

. Το σύστημα γίνεται ασταθές για $k\simeq 1.78\,10^{9}$

3.2 [1β] Υπολογίστε το k για το οποίο οι κυρίαρχοι πόλοι του συστήματος έχουν $\zeta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Κοιτώντας που τέμνει η καμπύλη του $\zeta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ τον προηγούμενο ΓΤΡ έχουμε ότι αυτός τέμνεται στα σημεία $-2.66\pm 2.66i$ για $k_1\simeq 1.09\,10^{8}$ και $-6.34\pm 6.34i$ για $k_2\simeq 6.08\,10^{7}<k_1$, κ.ο.κ.. Οι κυρίαρχοι πόλοι είναι αυτοί στο $-2.66\pm 2.66i$ και το $k=k_1$



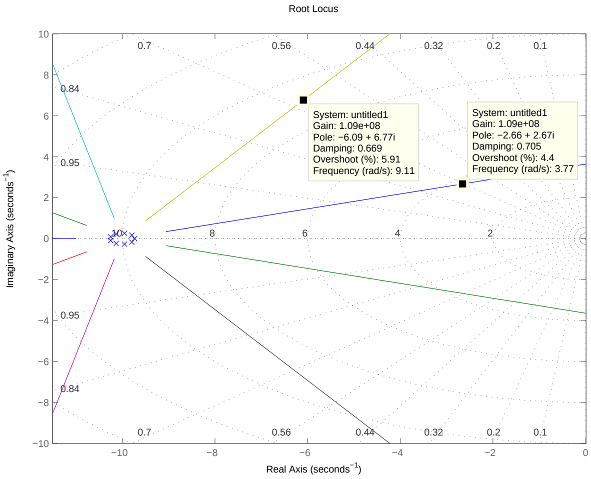
3.3 [1β] Για το κέρδος του ερωτήματος 3.2 προσεγγίστε την συνάρτηση μεταφοράς $\hat{T}(s)$ του κλειστού συστήματος $\dfrac{k}{(s+10)^{8}+k}$ κρατώντας τους τέσσερις επικρατούντες πόλους (σημείωση $\lim_{s\to 0}\hat{T}(\mathrm{s})=\dfrac{k}{10^{8}+k}$).

Για $k=k_1$ οι τέσσερις επικρατούντες πόλοι είναι στις θέσεις $-2.66\pm 2.66i$ και $-6.09\pm 6.77i$. Οπότε

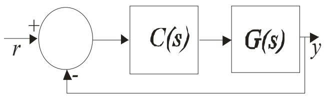
$$\hat{T}(s)=\frac{A}{(s+2.66+2.66i)(s+2.66-2.66i)(s+6.09+6.77i)(s+6.09-6.77i)},$$ ή

$\hat{T}(s) = \dfrac{A}{s^4 + 17.5s^3 + 161.86s^2 + 613.5s + 1173.43}$. Η τιμή του A υπολογίζεται από

$$A = 1173.43\frac{k_1}{10^8 + k_1} = 611.98$$

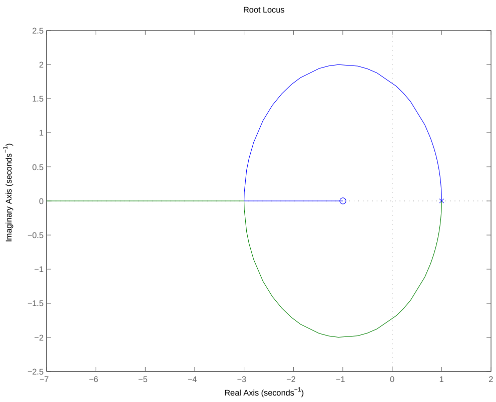


4^{o} ΘΕΜΑ [2.0 βαθμοί]

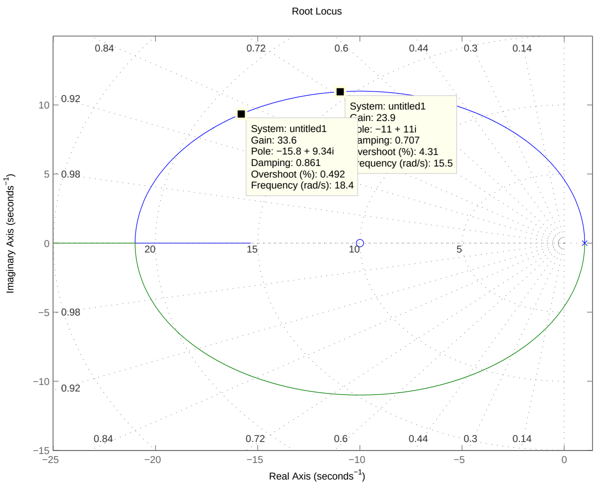
Έστω το σύστημα 

με $G(s)=\dfrac{(s+1)}{(s-1)^2}$. Υπολογίστε ένα ελεγκτή $C(s)$ έτσι ώστε ταυτόχρονα: α) οι κυρίαρχοι πόλοι του κλειστού συστήματος να έχουν $\zeta \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$, και β) το πραγματικό μέρος τους να είναι μικρότερο από -4.

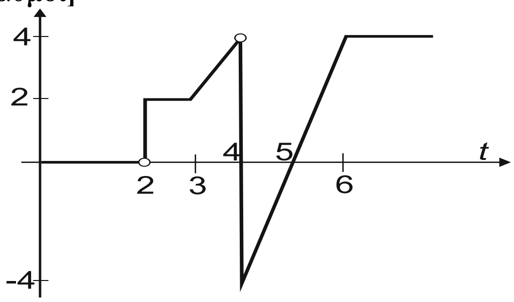
Ελεγκτής κέρδους δεν επαρκεί γιατί για καμία τιμή του k ο ΓΤΡ δεν έχει και του2 δύο πόλους μικρότερους από -4



Ακυρώνοντας το μηδενικό στο -1 (με ένα πόλο) και θέτοντας ένα μηδενικό βαθιά μέσα στο αριστερό ημιεπίπεδο (π.χ. στο -10, έχουμε τον ακόλουθο ΓΤΡ. Για $23.9 \le k \le 33.6$ οι πόλοι του κλειστού έχουν $\zeta \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ και σαφώς πραγματικό μέρος <-4.



5[ο] ΘΕΜΑ [1.0 βαθμοί]



Για το ακόλουθο σήμα υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace

Η είσοδος είναι $r(t) = 2\quad 1(t-2) + 2\quad (t-3)1(\mathrm{t}-3) - 8\quad 1(\mathrm{t}-4) + 2\quad (\mathrm{t}-4)1(\mathrm{t}-4) - 4\quad (\mathrm{t}-6)1(\mathrm{t}-6)$, και

αντίστοιχα $R(s) = 2e^{-2s}\,\frac{1}{s} + 2e^{-3s}\,\frac{1}{s^2} - 8e^{-4s}\,\frac{1}{s} + 2e^{-4s}\,\frac{1}{s^2} - 4e^{-6s}\,\frac{1}{s^2}$