ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω διακριτό γραμμικό σύστημα $G(z^{-1})$ με κρουστική απόκριση (αφ' εξής η αναφορά θα λαμβάνει χώρα στο πεδίο- Z)

$$G(z^{-1}) = z^{-d}(g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + ...) \ . \tag{1.1}$$

Η απόκριση του συστήματος σε μία είσοδο $X(z^{-1}) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + ..., \left(x_0 \neq 0\right)$ είναι
$Y(z^{-1}) = G(z^{-1})X(z^{-1}) = z^{-d}(y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + ...)$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΟΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (DECONVOLUTION)

Οι συντελεστές y_i σχετίζονται με την κρουστική απόκριση και την είσοδο ως

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i g_{n-i} \ . \tag{1.2}$$

. Υπό μορφή πίνακα η προηγούμενη σχέση παριστάνεται ως

$$\overline{y}_{0:n} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = X \ \overline{g}_{0:n} \ . \tag{1.3}$$

Οι συντελεστές της κρουστικής απόκρισης μπορούν να υπολογιστούν ως

$$\overline{g}_{0:n} = X^{-1} \overline{y}_{0:n} \tag{1.4}$$

ή σε επαναληπτική μορφή

$$g_n = \frac{1}{x_0}\left[y_n - \sum_{i=1}^{n} x_i g_{n-i} \right] . \tag{1.5}$$

Δεδομένης της FIR-προσέγγισης της κρουστικής απόκρισης του συστήματος ζητείται ο υπολογισμός της συνάρτησης μεταφοράς

$$G(z^{-1}) = z^{-d} \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}}, \quad n \geq m \text{ ή} \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=0}^{m} b_i z^{-i} = (g_0 + g_1 z^{-1} + \cdots)\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}\right) = g_0 + \cdots + \left(g_i + \sum_{j=1}^{i} a_j g_{i-j}\right) z^{-i} + \cdots \ , \tag{1.7}$$

όπου $a_j = 0, \ j > n$. Υπό μορφή πίνακα η προηγούμενη σχέση μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\overline{b}_{0:m} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_m & a_{m-1} & & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} = \tilde{A}\overline{g}_{0:m} \tag{1.8}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_m \\ 0 & 0 & \cdots & g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_{m+1} \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & & & \\ g_0 & g_1 & & & & & \cdots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & & & & & \cdots & g_n \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ g_{m-1} & g_m & & & & & \cdots & g_{m+n-2} \\ g_m & g_{m+1} & & & & & \cdots & g_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{m+1} \\ a_m \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \tilde{G}_{0:m+n-1}\overline{a}_{n:1} = \begin{bmatrix} -g_{m+1} \\ -g_{m+2} \\ \vdots \\ -g_n \\ -g_{n+1} \\ \vdots \\ -g_{m+n-1} \\ -g_{m+n} \end{bmatrix} = -\overline{g}_{m+1:m+n} \ . \tag{1.9}$$

Συνοπτικά λοιπόν

$$\overline{a}_{n:1} = -\left[\tilde{G}_{0:m+n-1}\right]^{-1}\overline{g}_{m+1:m+n} \tag{1.10}$$

και μετά υπολογίζεται το πολυώνυμο του αριθμητή ως

$$\overline{b}_{0:m} = \tilde{A}\overline{g}_{0:m} \ . \tag{1.11}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Η έξοδος του προηγούμενου συστήματος την k -οστη χρονική στιγμή μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$y(k) = \left[u(k-d), \cdots, u(k-d-m), -y(k-n), \cdots, -y(k-1)\right] \begin{bmatrix} \overline{b}_{0:m} \\ \overline{a}_{n:1} \end{bmatrix} = \phi^T(k)\theta^\circ \ . \tag{1.12}$$

Έστω η προσέγγιση του συστήματος ως

$$\hat{y}(k) = \phi^T(k)\hat{\theta} \tag{1.13}$$

το σφάλμα $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ και $\overline{E}_{1:k} = [e(1), \cdots, e(k)]^T$. Ο σκοπός του εκτιμητή είναι να υπολογιστεί

$$\hat{\theta} : \min_{\hat{\theta}} \overline{E}_{1:k}^T \overline{E}_{1:k} = \min_{\hat{\theta}} (\overline{\Upsilon}_{1:k} - \Phi\,\hat{\theta})^T (\overline{\Upsilon}_{1:k} - \Phi\,\hat{\theta}) \tag{1.14}$$

όπου

$$\overline{Y}_{1:k} = \left[y(1), \cdots, y(k)\right]^T \tag{1.15}$$

και

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \vdots \\ \phi^T(k) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Το προηγούμενο κόστος μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{\theta}:\min_{\hat{\theta}} \bar{E}_{1:k}^T \bar{E}_{1:k} = \min_{\hat{\theta}} \left[\bar{\mathrm{Y}}_{1:k}^T \left(I - \Phi\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T \right) \bar{\mathrm{Y}}_{1:k} \right] + \min_{\hat{\theta}} \left(\hat{\theta} - \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\,\bar{\mathrm{Y}}_{1:k} \right)^T \left(\Phi^T\Phi\right) \left(\hat{\theta} - \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\,\bar{\mathrm{Y}}_{1:k} \right)$$

Επειδή ο πρώτος όρος δεν εξαρτάται από το $\hat{\theta}$ και ο δεύτερος τετραγωνικός όρος μπορεί να μηδενιστεί, συνεπάγεται ότι

$$\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\,\bar{\mathrm{Y}}_{1:k} \tag{1.17}$$

Σημειώνεται ότι $\hat{\theta} = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\,\bar{\mathrm{Y}}_{1:k}$, το οποίο ισοδυναμεί με τον pseudoinverse-πίνακα του μη τετραγωνικού πίνακα $\Phi_{k\times(m+1+n)}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Από την προηγούμενη μέθοδο, το εκτιμηθέν διάνυσμα $\hat{\theta}(k)$ την k-χρονική στιγμή είναι

$$\hat{\theta}(k) = \left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\,\bar{\mathrm{Y}}_{1:k} = \left[\sum_{i=1}^{k}\phi(i)\phi^T(i)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\phi(i)y(i)\right] = P(k)\left[\sum_{i=1}^{k}\phi(i)y(i)\right] \tag{1.18}$$

Επειδή $P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \phi(k)\phi^T(k)$

$$\hat{\theta}(k) = P(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}\phi(i)y(i) + \phi(k)y(k)\right] = P(k)\left[P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \phi(k)y(k)\right]$$

Επειδή $P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \phi(k)\phi^T(k)$

$$\hat{\theta}(k) = P(k)\left[\left(P^{-1}(k) - \phi(k)\phi^T(k)\right)\hat{\theta}(k-1) + \phi(k)y(k)\right] = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\phi(k)\left[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)\right]$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\phi(k)\left[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1)\right] \tag{1.19}$$

Κάνοντας χρήση της ιδιότητας $(A+BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left(C^{-1} + DA^{-1}B\right)^{-1}DA^{-1}$ για την έκφραση

$P(k) = \left[P^{-1}(k-1) + \phi(k)\cdot 1\cdot\phi^T(k)\right]^{-1}$ υπολογίζεται αναδρομικά ο covariance-πίνακας ως

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{1+\phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \tag{1.20}$$

- Οι εκφράσεις (1.19) και (1.20) συνθέτουν τον νόμο των επαναληπτικών ελαχίστων τετραγώνων (Recursive Least Squares).
- Η αρχικοποίηση της μεθόδου απαιτεί την χρήση ενός θετικά ορισμένου πίνακα $P(0) = P^T(0)$ και μίας τυχαίας τομής $\hat{\theta}(0)$. Για την επιτάχυνση της σύγκλισης συνήθως επιλέγεται $P(0) = \varepsilon I,\ \varepsilon \gg 1$.
- Επειδή η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται από το ίχνος του πίνακα $P(k)$ η μέθοδος χρησιμοποιείται με resetting του πίνακα (π.χ. όταν $\mathrm{trace}\left[P(k)\right] \le \delta,\ P(k) = \varepsilon I$.

Αν είναι επιθυμητό να δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στα πιο πρόσφατα δεδομένα, αυτό αντιστοιχεί στην αλλαγή της (1.14) σε

$$\hat{\theta} : \min_{\hat{\theta}} \left(\bar{E}_{1:k}^T \begin{bmatrix} \lambda^{k-1} & & & & \\ & \lambda^{k-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \bar{E}_{1:k} \right)$$

, όπου $0 < \lambda \leq 1, \lambda \simeq 1$ (π.χ. $\lambda = 0.99$), οι προηγούμενες εκφράσεις (1.19) και (1.20) αλλάζουν σε

$$P(k) = \frac{1}{\lambda}\left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\phi(k)\phi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \phi^T(k)P(k-1)\phi(k)} \right] \tag{1.21}$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\phi(k)\left[y(k) - \phi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \right] \tag{1.22}$$