# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Σωστός σχεδιασμός $C_d(z)$ οδηγεί σε $u_d(t) = u_c(t), \quad t = kT_s, \quad k = 0,1,\ldots$
Για το σχεδιασμό και υλοποίηση της $C_d(z)$ απαιτείται βασικά γνώση του μετασχηματισμού $z$

**Ορισμός μετασχηματισμού z**

$$Z\left[f(i)\right] \triangleq F\left(z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} f(i) z^{-i} \quad (\text{για } i<0,\ f_i = 0\ )$$

Π.χ. $\quad f(i) = a^i \longrightarrow \ Z\left[a^i\right] = \dfrac{z}{z-a}$

**Ιδιότητες μετασχηματισμού z**

$$Z\left[af(i)+\beta g(i)\right]=aF\left(z\right)+\beta G(z)$$

$$Z\left[f(i+k)\right]=z^kF\left(z\right)-\sum_{i=0}^{k-1}f(i)z^{k-1}$$

Π.χ. $Z\left[a^{i+1}\right]=z\dfrac{z}{z-a}-a^0=\dfrac{z^2}{z-a}-1$

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)$$

$$\lim_{k\to\infty}f(kh)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$ εάν |ρίζες (*F(z)=0)*)|<1

Αν $F(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$ πρέπει οι ρίζες του *D(z)=0* να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου

$$Z\left[f\left(\left(k+n\right)h\right)\right]=z^n\left[F(z)-F_1\right]$$

όπου $F(z)=Z\left[f(kh)\right]$ και $F_1(z)=\sum_{j=0}^{n-1}f(jh)z^{n-j}$

| Είσοδος | Laplace | z |
|---|---|---|
| Βηματική 1(kh) | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| Ράμπα $t$ | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{hz}{(z-1)^2}$ |
| Εκθετικό $e^{-t/T}$ | $\frac{T}{1+sT}$ | $\frac{z}{z-e^{-h/T}}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{z\sin(\omega h)}{z^2-2z\cos(\omega h)+1}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{z(z-\cos(\omega h))}{z^2-2z\cos(\omega h)+1}$ |
| $\cosh(\omega t)$ | $\frac{1}{s^2-\omega^2}$ | $\frac{z(z-\cosh(\omega h))}{z^2-2z\cosh(\omega h)+1}$ |

Έστω $\xrightarrow{e} \boxed{C_d(z)} \xrightarrow{u}$

όπου ο διακριτός ελεγκτής προσδιορίζεται από την εξίσωση διαφορών:

$$a_0 u(i+n) + \ldots + a_n u(i) = e(i) \quad Z[e] = E(z)$$

$$Z\left[a_n u(i)\right] = a_n U(z)$$

$$Z\left[a_0 u(i+n)\right] = a_0 z^n U(z) \qquad \left(u(0), u(1), \ldots, u(n-1) = 0\right)$$

$$\left(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n\right) U(z) = E(z) \Rightarrow$$

$$U(z) = \frac{E(z)}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n} \qquad \underset{E(z)}{\xrightarrow{e}} \boxed{\frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}} \underset{U(z)}{\xrightarrow{u}}$$

**Ζητείται ο Μετασχηματισμός** $C_c(s) \rightarrow C_d(z)$

Η γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς ενός διακριτού ελεγκτή

$$C_d(z) = z^{-k} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}, \quad b_0 \neq 0 \quad k \geq 0$$

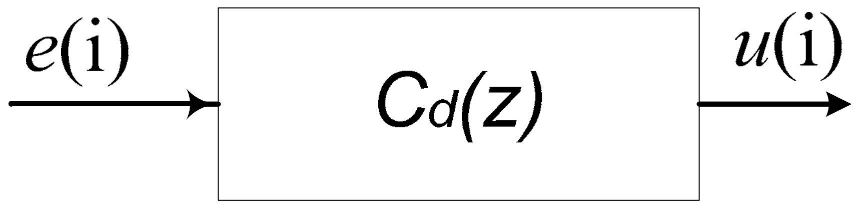
Αλγόριθμος υλοποίησης

Αν $C_d(z) = \dfrac{U(z)}{E(z)}$

$$E(z) z^{-k} \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}\right) = U(z)\left(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}\right), \quad (m, n \geq 0)$$

## Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού *z*

$$b_0 e(i-k) + b_1 e(i-k-1) + \ldots + b_m e(i-k-m) = a_0 u(i) + \ldots + a_n u(i-n)$$




Το μόνο άγνωστο στην παραπάνω σχέση είναι το $u(i)$ (τα υπόλοιπα είναι στοιχεία για στιγμές $t \leq i$ που είναι γνωστά).

$$\Rightarrow u(i) = \frac{1}{a_0}\left[b_0 e(i-k) + \ldots + b_m e(i-k-m) - a_1 u(i-1) - \ldots + a_n u(i-n)\right]$$

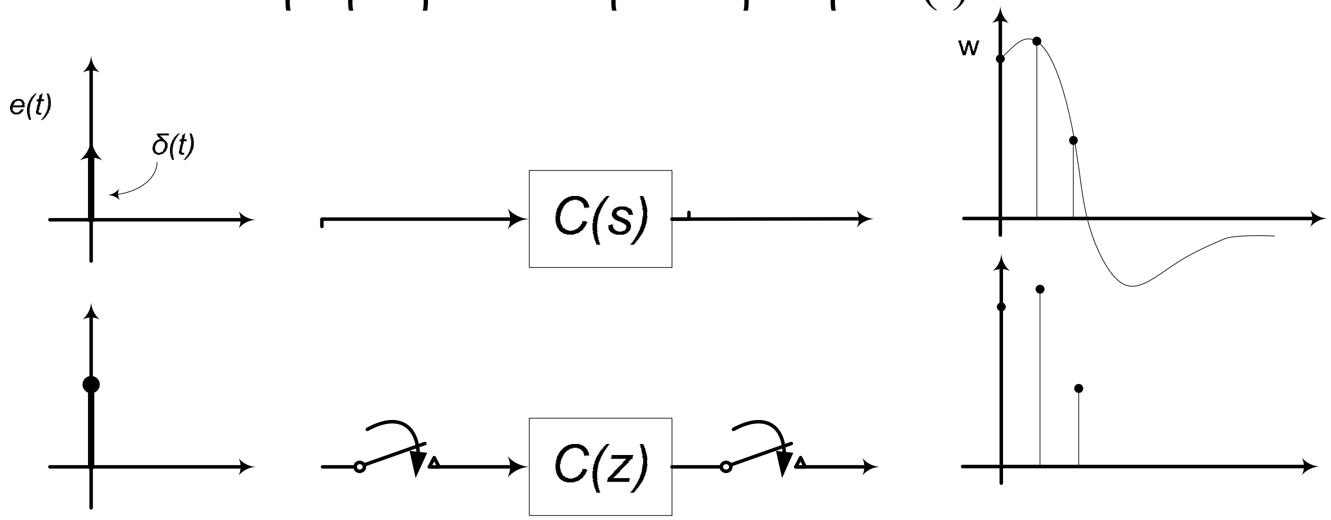
**z-Domain:** $z = e^{sT_s}$

**s-Domain:**

1η Μέθοδος Διακριτοποίησης

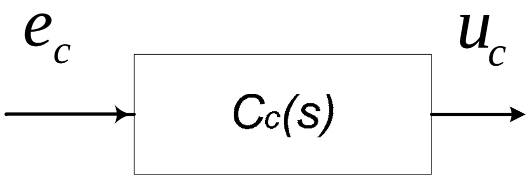
Impulse Invariant Transformation (**IIT**)

Κρατά αναλλοίωτη την κρουστική απόκριση - $w$(t)




Κρουστική απόκριση $u(t) = \int_0^t w(t-\tau)e(\tau)d\tau$

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ




Δίνεται $$\frac{u_c}{e_c} = C_c(s) = \frac{A_1}{s+a_1} + \ldots + \frac{A_n}{s+a_n}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{A_1}{s+a_1}\right\} = A_1 e^{-a_1 t}$$

$$\xrightarrow{s-t_0-z} G_d(z) = \frac{A_1 z}{z-e^{-a_1 T_s}} + \ldots + \frac{A_n z}{z-e^{-a_n T_s}}$$

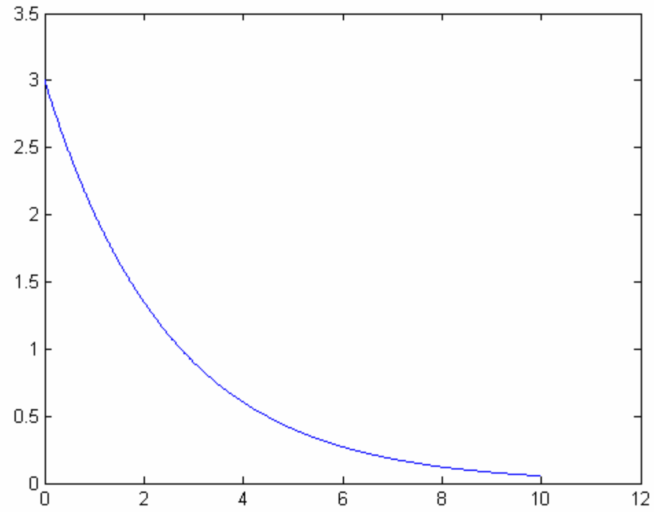
$$\frac{A_i z}{z-e^{-a_i T_s}} \xrightarrow{Z^{-1}} A_i e^{-a_i n T_s}, n = 0, 1, \ldots.$$

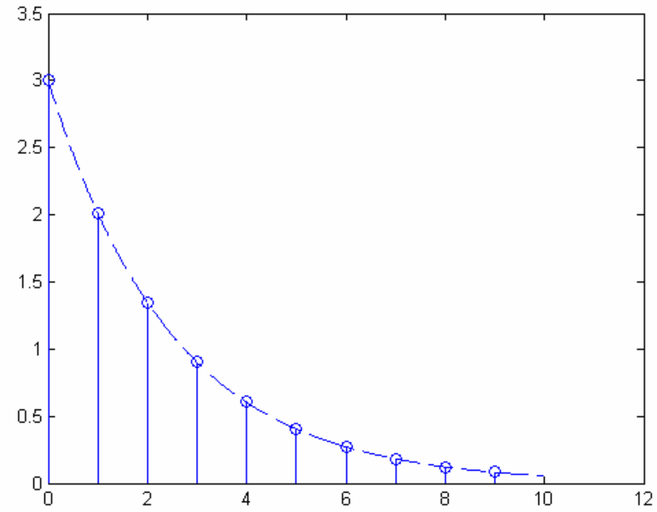
Π.χ. $C(s)=\dfrac{3}{s+0.4}$ ,

$C_d(z)=\dfrac{3z}{z-e^{-0.4T_s}}$

κρουστική απόκριση $3e^{-0.4t}$

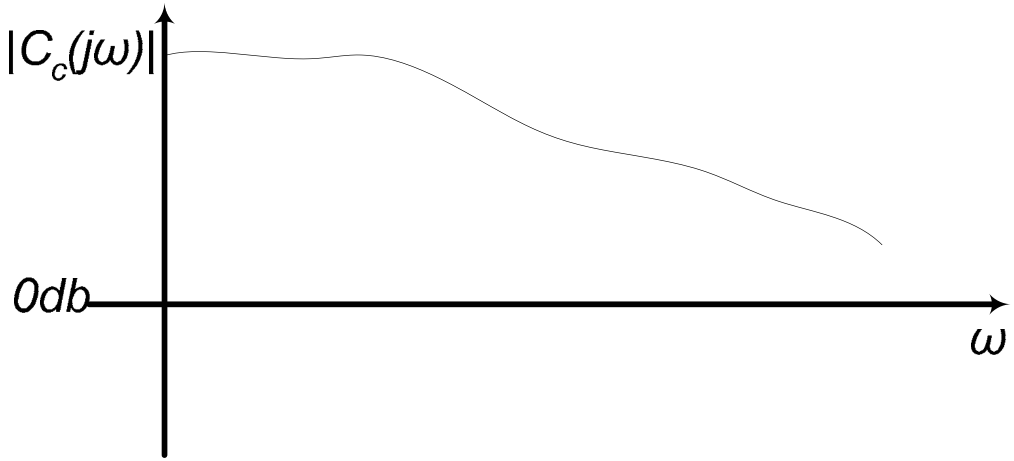
κρουστική απόκριση $3e^{-0.4nT_s}$ , $T_S=1\sec$



$C_d(\omega)\Big|_{z=e^{j\omega T_s}}$ απόκριση στο πεδίο της συχνότητας

Συσχέτιση $C_d(\omega)$ με $C_c(\omega)$

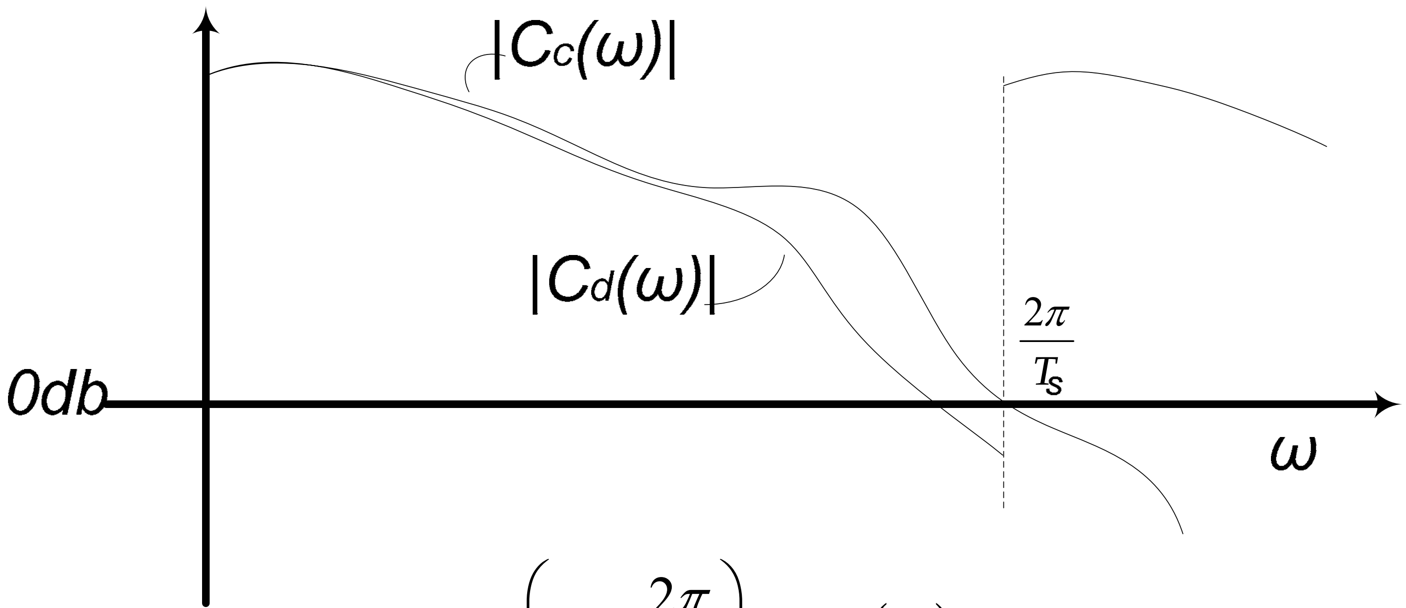



Επιθυμητό $C_d(\omega) = C_c(\omega), \quad \forall \omega$

Αλλά $e^{j\omega Ts} = e^{j(\omega T_s + l2\pi)} = e^{\frac{j}{T_s}(\omega + \frac{l2\pi}{T_s})}, \quad l = 1, 2, \ldots$

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

Το διάγραμμα $C_d(\omega)$παρουσιάζει μια περιοδικότητα (με συχνότητα ${}^{2\pi}\!/_{T_s}$ )




$$C_d\left(\omega+\frac{2\pi}{\mathrm{T}_s}\right)=C_d\left(\omega\right)$$

**Πλεονεκτήματα ΙΙΤ-Μεθόδου**

+ 1) $C_d(z)$ έχει ίδια κρουστική απόκριση με $C_c(s)$ τις χρονικές στιγμές $nT_s$, $n = 0,1,....$

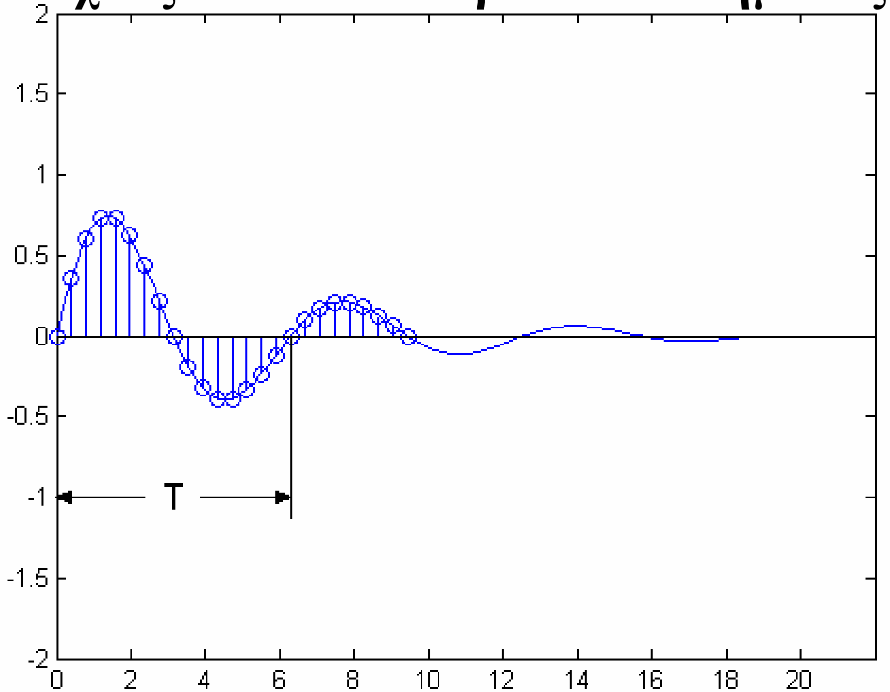
+ 2) Αν $C_c(s)$ είναι ευσταθής $\rightarrow C_d(z)$ ευσταθής

**Μειονεκτήματα ΙΙΤ-Μεθόδου**

-1) $C_d(\omega) \neq C_c(\omega)$

- 2) Η απαιτούμενη ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα είναι χρονοβόρος διαδικασία

**Η IIT-Μέθοδος εξασφαλίζει την ταύτιση των τιμών ανάμεσα στην κρουστική απόκριση του συνεχούς και του διακριτού συστήματος τις χρονικές στιγμές** $T_s, 2T_s, \ldots$



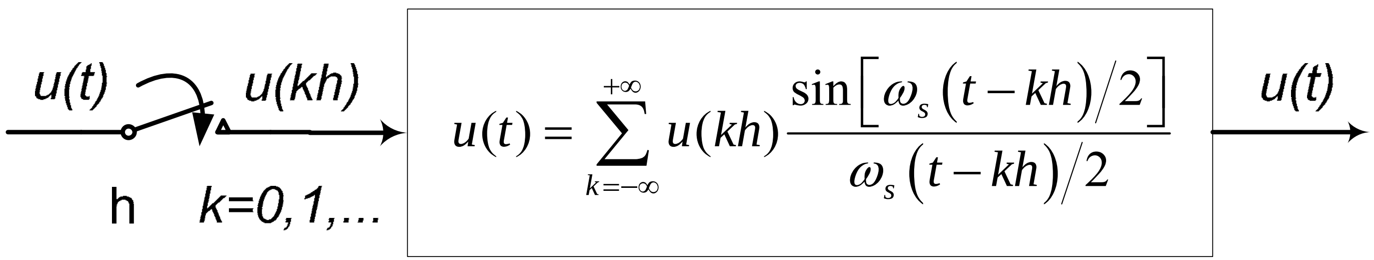

Ποια η συμπεριφορά του συστήματος τις χρονικές στιγμές ανάμεσα στα σημεία δειγματοληψίας;

Δεδομένου των δειγμάτων *u*(kh), k=0,1,….ενός σήματος *u*(t), μπορεί να αναπαραχθεί το σήμα $u(t) \quad \forall t$;

Θεώρημα Shannon

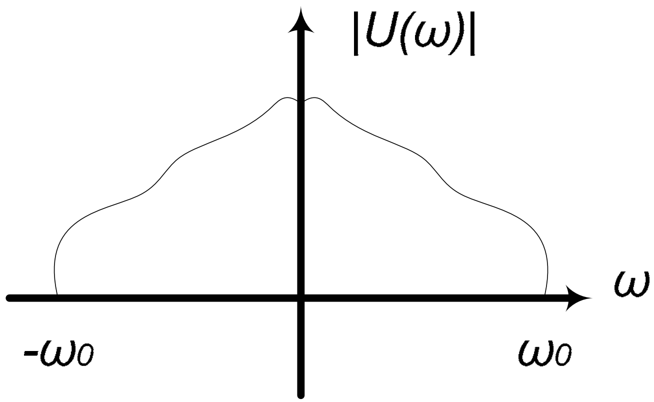
Εστω *u*(t) με μετασχηματισμό Fourier $U(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_0$

Το σήμα *u*(t) προσδιορίζεται πλήρως (και με μοναδικό τρόπο) από τις δειγματοληφθείσες τιμές, αν η συχνότητα δειγματοληψίας $\omega_s = \dfrac{2\pi}{h} > 2\omega_0$

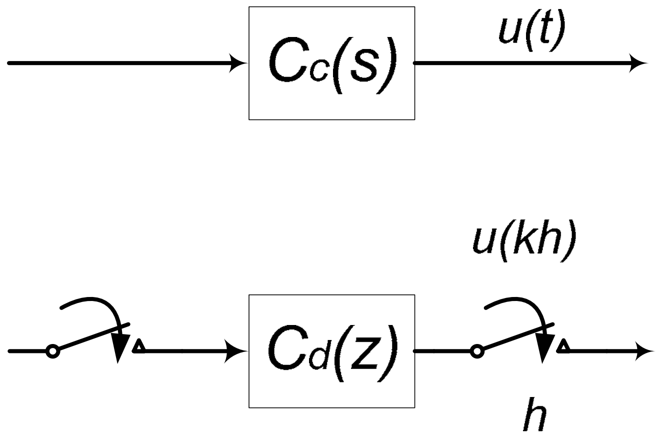



$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kh) \frac{\sin\left[\omega_s \left(t - kh\right)/2\right]}{\omega_s \left(t - kh\right)/2}$$

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(kh)\frac{\sin\left[\omega_s\left(t-kh\right)/2\right]}{\omega_s\left(t-kh\right)/2}$$



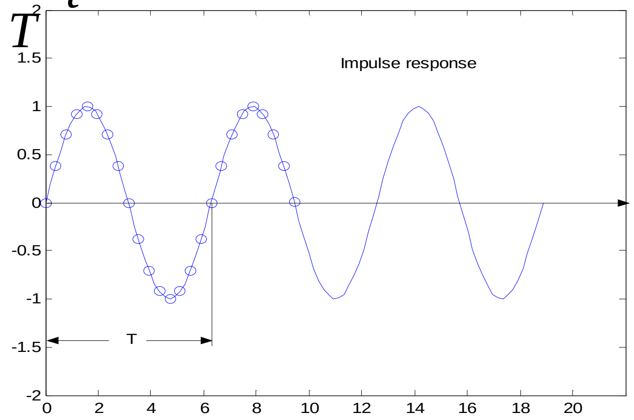

Σχεδιασμός ψηφιακού ελεγκτή

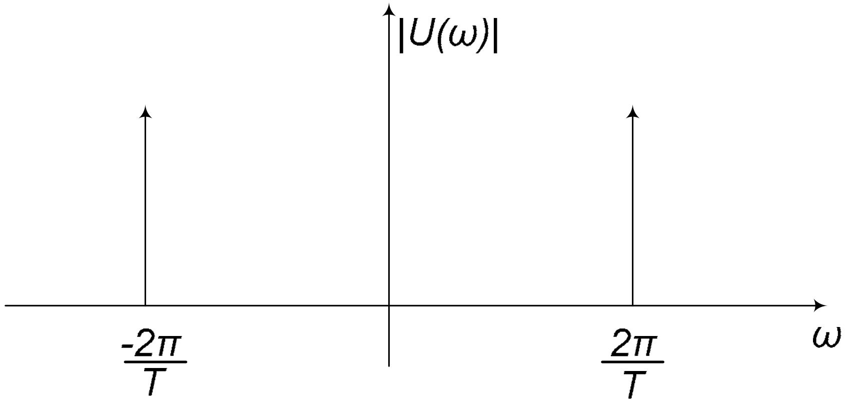



$$U(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}u(t)dt \qquad u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}U(\omega)d\omega$$

$$U_s(\omega)=\frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(\omega+k\omega_s)$$ Φάσμα δειγματοληφθέντος σήματος $\omega_s=\frac{2\pi}{h}$

Π.χ. $u(t) = \sin \frac{2\pi}{T} t$

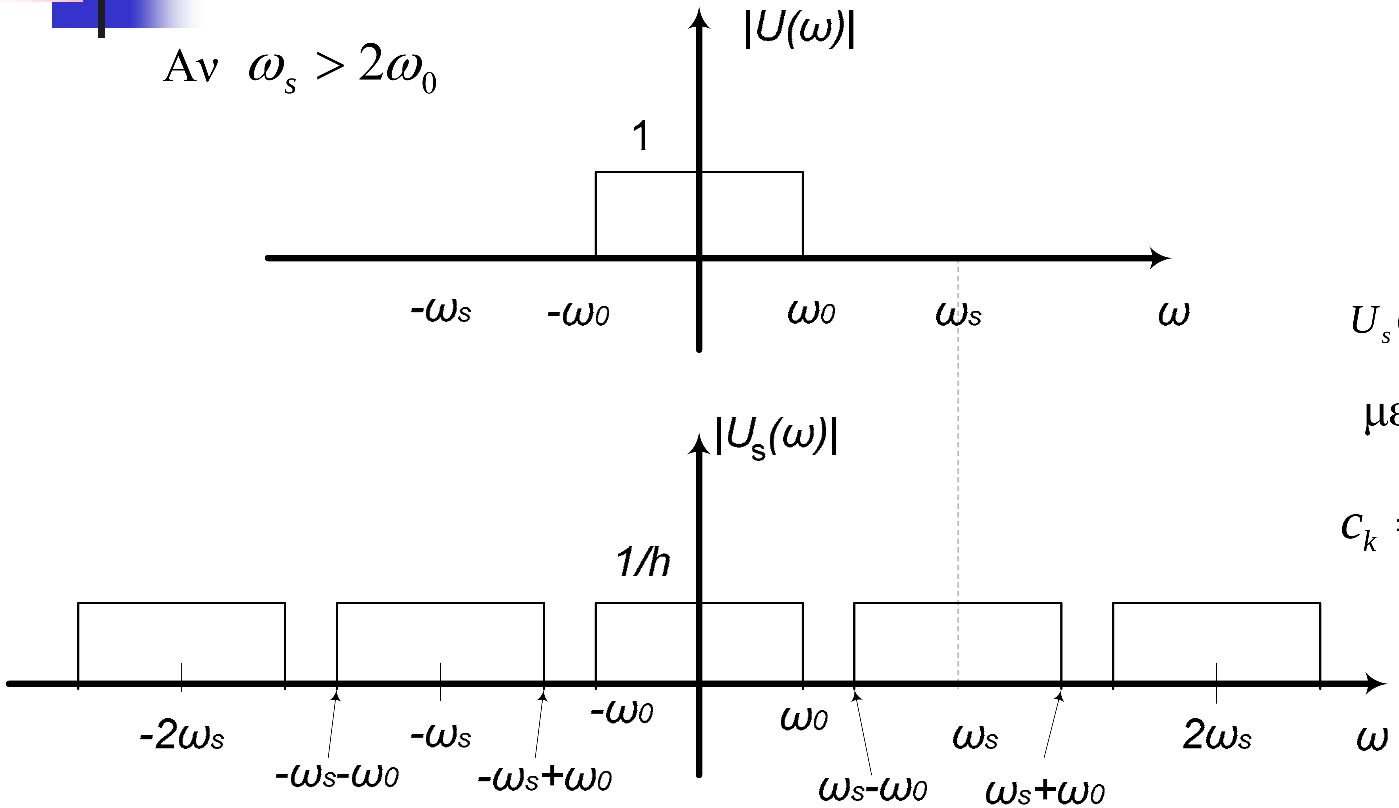



$$U(\omega) = 0 \quad \forall |\omega| > \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Από το θεώρημα Shannon προκύπτει η συνθήκη για τη συχνότητα δειγματοληψίας $T_s < \frac{T}{2}$

Αν $\omega_s > 2\omega_0$



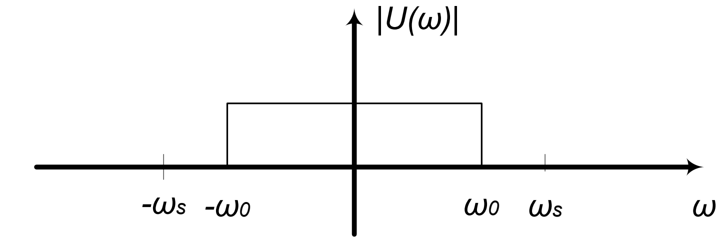

$$U_s(\omega) \triangleq \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikh\omega}$$

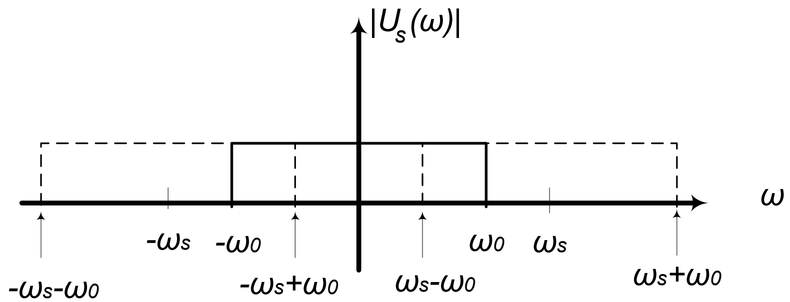
με

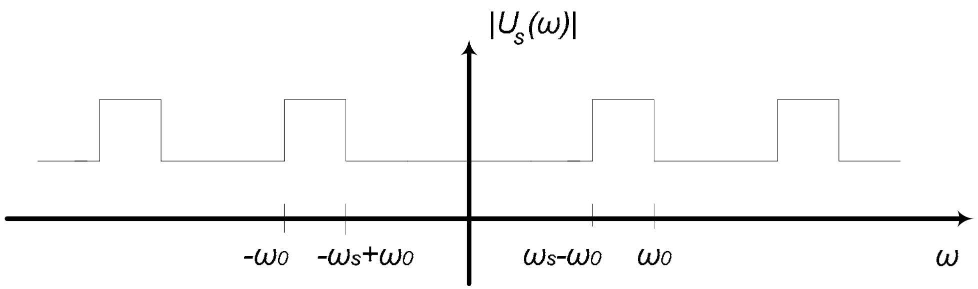
$$c_k = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} e^{ikh\omega} U_s(\omega) d\omega$$

$$c_k = U(kh)$$

Αν $\omega_s < 2\omega_0$




Υπάρχει παραμόρφωση και δεν μπορεί να αναδημιουργηθεί το σήμα