VII. ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ

Μεχρι στιγμης εχουμε ασχοληθει με το πως να υπολογισουμε τη συναρτηση μεταφορας στο πεδιο Z ενος συστηματος και ενος ψηφιακου ελεγκτη. Σ'αυτο το κεφαλαιο θα ασχοληθουμε με το πως υλοποιουμε αυτη τη συναρτηση μεταφορας στη πραξη χρησιμοποιωντας καθυστερητες, πολλαπλασιαστες και αθροιστες. Οι ψηφιακοι αλγοριθμοι (ψηφιακοι ελεγκτες) αναπαριστωνται με δυο μορφες,

α) αναπαρασταση μεταβλητων καταστασεως των εξισωσεων διαφορων

β) συναρτησεις μεταφορας ως προς z^{-1}

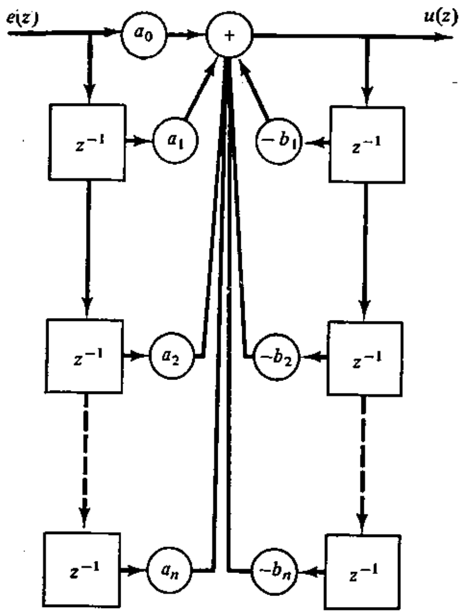
Στη πρωτη περιπτωση ο αλγοριθμος μπορει να προγραμματισθει απ'ευθειας σε ενα μικρουπολογιστη. Στη δευτερη περιπτωση, η συναρτηση μεταφορας μπορει να υλοποιηθει ειτε χρησιμοποιωντας hardware (αθροιστες,καθυστερητες, κ.λ.π.) , ειτε με προγραμματισμο σε υπολογιστη. Και στις δυο περιπτωσεις υπαρχουν διαφορετικες μεθοδοι για την υλοποιηση της ψηφιακης συναρτησης μεταφορας.

<u>Direct form 1 (εν σειρα)</u>

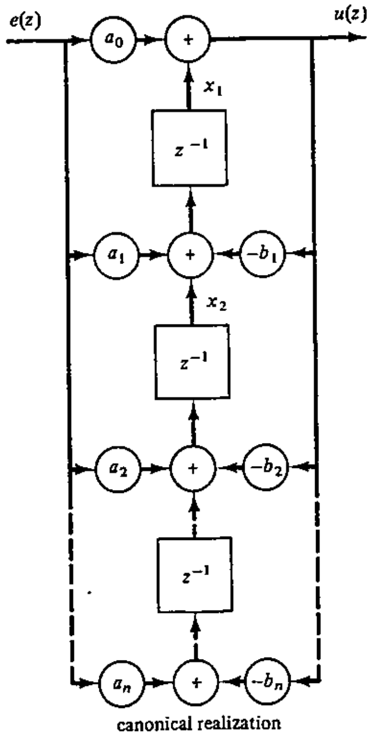
Η συναρτηση μεταφορας εκφραζεται σαν λογος δυο πολυωνυμων,

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j z^{-j}}{1+\sum_{j=1}^{n} b_j z^{-j}}$$

η υλοποιηση φαινεται στο σχημα



non-canonical realization



canonical realization

Για την υλοποιηση με προγραμμα, θεωρουμε την εξισωση διαφορων που βασιζεται στη συναρτηση μεταφορας,

$$u_i = \sum_{j=0}^{n} a_j \, e_{i-j} - \sum_{j=1}^{n} b_j \, u_{i-j}$$

σε μορφη μητρων η direct form 1 ειναι,

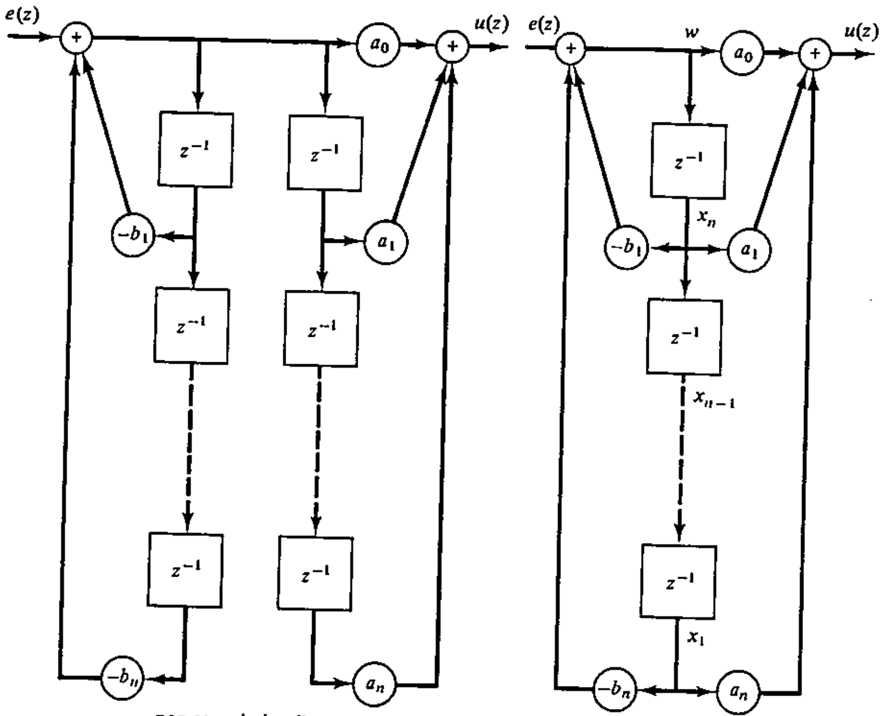
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -b_n & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 - a_0 b_1 \\ a_2 - a_0 b_2 \\ \vdots \\ a_n - a_0 b_n \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [1 \;\; 0 \; \ldots \; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a_0 \, e_i$$

Direct form 2 (κανονικη)

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} a_j \, z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^{n} b_j \, z^{-j}}$$

η υλοποιηση δινεται παρακατω,



non-canonical realization

canonical realization

Η υλοποιηση μεσω προγραμματος προερχεται απο τη εξισωση διαφορων,

$$w_i = e_i - \sum_{j=1}^{n} b_j w_{i-j}$$

$$u_i = \sum_{j=0}^{n} a_j w_{i-j}$$

η τυποποιηση με πινακες ειναι,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ . & & 1 & & \\ & & & & \\ -b_n & \cdots & & & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [a_n - a_{n-1} b_n \ \cdots \ a_1 - a_0 b_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + a_0 e_i$$

Εν σειρα υλοποιηση

Εκφραζουμε τη συναρτηση μεταφορας σαν γινομενο παραγοντων στοιχειων απλης δομης(π.χ. συναρτησεις μεταφορας $1^{ης}$ ταξης)

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = a_0 D_1(z) \ldots D_l(z) \quad , 1 \leqslant l < n$$

η παραγοντοποιηση αυτη δινει δυο τυπους στοιχειων,

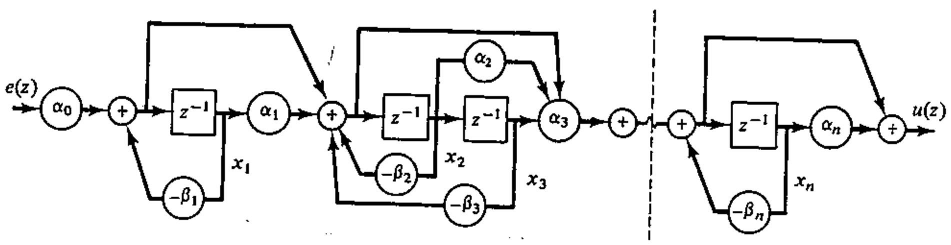
α) $1^{ης}$ ταξης στοιχεια, της μορφης

$$D_l(z) = \frac{1+a_l z^{-1}}{1+b_l z^{-1}}$$

β) $2^{ας}$ ταξης στοιχεια,

$$D_l(z) = \frac{1+a_l z^{-1} + a_{l+1} z^{-2}}{1+b_l z^{-1} + b_{l+1} z^{-2}}$$

η hardware υλοποιηση ειναι,



Για την υλοποιηση μεσω προγραμματος, απο τις εξισωσεις,

$$x_{i+1}^{1} = -b_1 x_i + a_0 e_i$$
$$x_{i+1}^{2} = (a_1 - b_1) x_i^{1} - b_2 x_i^{2} - b_3 x_i^{3} + a_0 e_i$$
$$x_{i+1}^{3} = x_i^{2}$$

$$x_{i+1}^4 = (a_1-b_1)x_i^1 +(a_2-b_2)x_i^2 +(a_3-b_3)x_i^3 -b_4x_i^4 +a_0e_i$$

.

.

.

Η τυποποιηση με πινακες ειναι,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & \dots & & 0 \\ a_1-b_1 & -b_2 & -b_3 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 & \dots & -b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i=[\ a_1-b_1\ \ a_2-b_2\ \dots\ \ a_n-b_n\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +a_0\ e_i$$

Παραλληλη υλοποιηση

Εκφραζουμε τη συναρτηση μεταφορας σαν

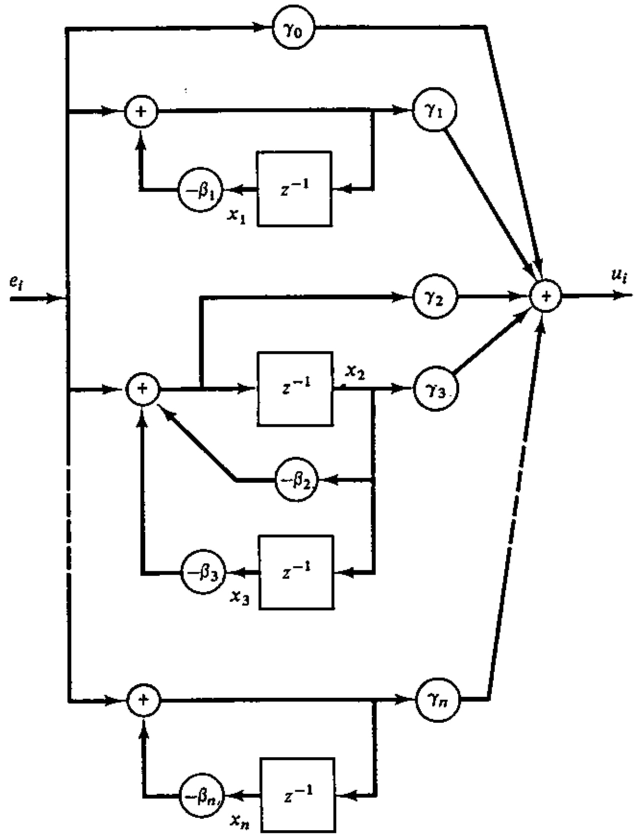
$$\frac{u(z)}{e(z)} = \gamma_0 + D_1(z) + D_2(z) + \dots D_l(z) \quad , \quad 1< l< n$$

Δημιουργουνται ετσι δυο ειδη παραγοντων,

α) $$D_l(z) = \frac{\gamma_l}{1+\beta_l z^{-1}}$$

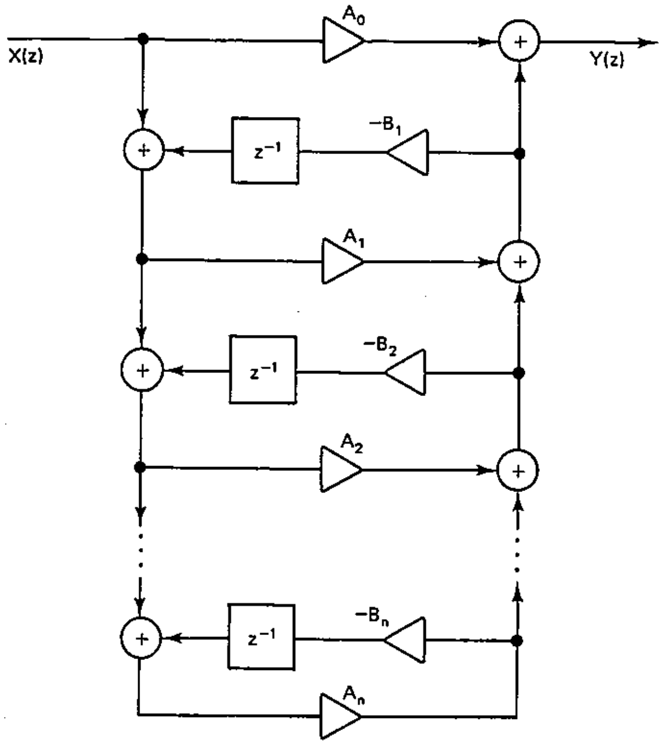
β) $$D_1(z) = \frac{\gamma_{10} + \gamma_{11}\, z^{-1}}{1+ \beta_{11}z^{-1} + \beta_{12}z^{-2}}$$

η hardware υλοποιηση ειναι,



και η υλοποιηση με προγραμμα γινεται μεσω των εξισωσεων

$$x_{i+1}^1 = -\beta_1 x_i^1 + e_i$$
$$x_{i+1}^2 = -\beta_2 x_i^2 - \beta_3 x_i^3 + e_i$$
$$x_{i+1}^3 = x_i^2$$
$$\vdots$$
$$x_{i+1}^n = -\beta_n x_i^n + e_i$$



Υλοποιηση PID ελεγκτων

Αν εκφρασουμε τη συναρτηση μεταφορας του PID ελεγκτη ως,

$$D(z) = K_p + \frac{K_I T}{2}\frac{(z+1)}{z-1} + \frac{K_D}{T}\frac{(z-1)}{z}$$

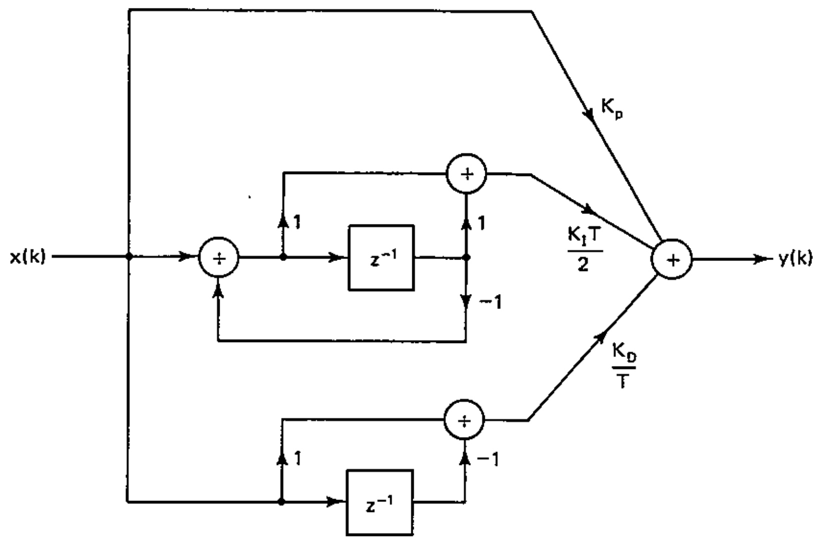
και λαμβανοντας υπ'οψη μας οτι θελουμε να την υλοποιησουμε σαν $2^{ας}$ ταξης συστημα, δηλ.

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

εξισωσουμε τα δυο δεξια μελη, εχουμε,

$$\begin{aligned}
a_0 &= K_p + K_I T/2 + K_D/T \\
a_1 &= -K_p + K_I T/2 - 2K_D/T \\
a_2 &= K_D/T \\
b_1 &= -1 \\
b_2 &= 0
\end{aligned}$$

η υλοποιηση αυτη, φαινεται στο σχημα,



<u>Αριθμητικο παραδειγμα</u>

Εχουμε τη συναρτηση μεταφορας

$$\frac{u(z)}{e(z)} = D(z) = \frac{3 + 3.6z^{-1} + 0.6z^{-2}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

i) Direct 1

$$u_i = 3e_i + 3.6e_{i-1} + 0.6e_{i-2} - 0.1u_{i-1} + 0.2u_{i-2}$$

η,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 1 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 3.6-0.3 \\ 6.6+0.6 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + 3e_i$$

ii) Direct 2

$$w_i = e_i - 0.1w_{i-1} + 0.2w_{i-2}$$

$$u_i = 3w_i + 3.6w_{i-1} + 0.6w_{i-2}$$

η,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [\ 0.6+1.8 \quad 3.6-0.3\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + 3e_i$$

iii) Εν σειρα

$$D(z) = \frac{3(z+1)(z+0.2)}{(z+0.5)(z-0.4)} = \frac{3(1+z^{-1})(1-0.2z^{-1})}{(1+0.5z^{-1})(1-0.4z^{-1})}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1-0.5 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [\ 1-0.5 \quad 0.2+0.4\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + 3e_i$$

iv) Παραλληλα

$$D(z) = -3 - \frac{1}{1+0.5z^{-1}} + \frac{7}{1-0.4z^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e_i$$

$$u_i = [\ 0.5 \quad 7 \times 0.4\ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_i + (-3-1+7)\ e_i$$