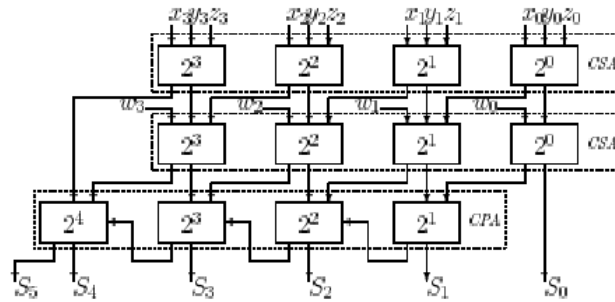


Άθροιση carry save

$$X + Y + Z + W$$



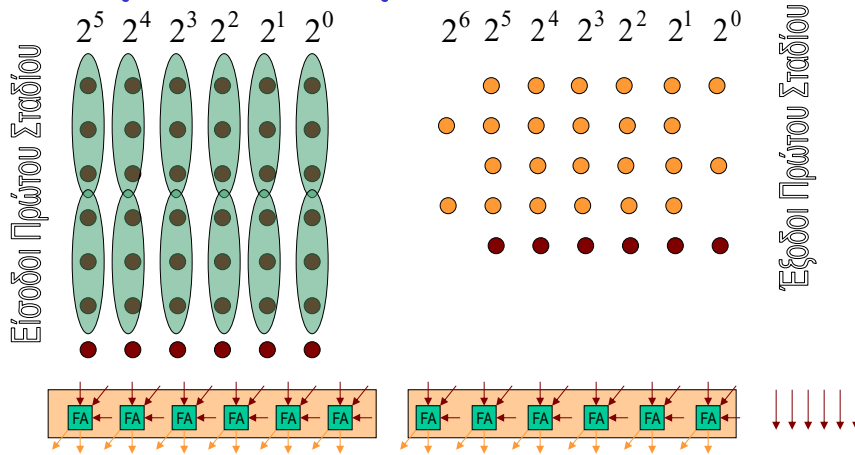
$$T = (k - 2)T_{CSA} + T_{CPA}$$

1

Κατασκευή Δένδρου Wallace

2

Άθροιση 7 όρων των 6 bits

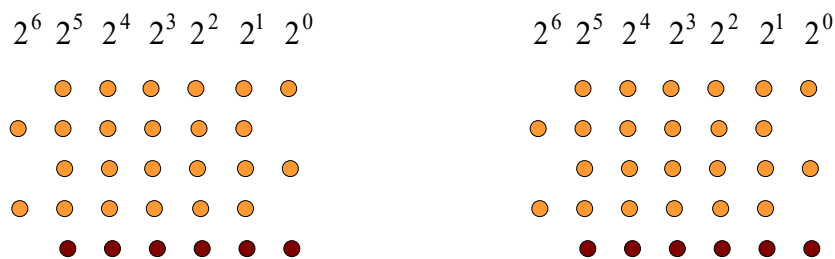


Για το πρώτο στάδιο: Δύο CSA αθροιστές των 6 bits ο καθένας.

Κάθε τελεία, είναι ένα bit της μίας από τις 7 εισόδους.

3

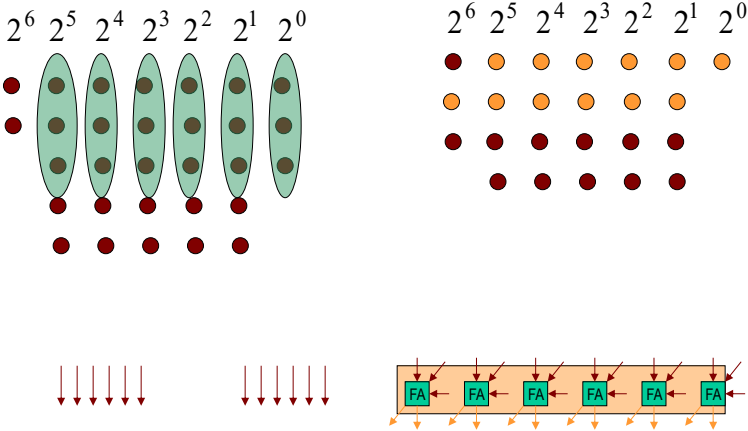
Είσοδοι στο δεύτερο στάδιο



Οι έξοδοι του πρώτου σταδίου γίνονται είσοδοι του δεύτερου, για τους οποίους και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία...

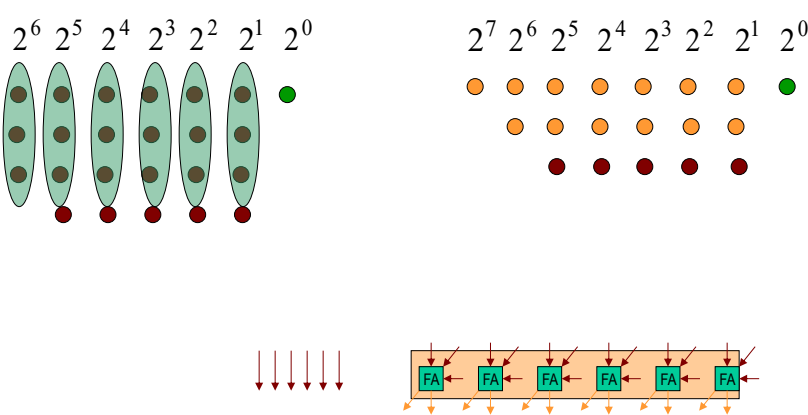
4

Παραγωγή Δεύτερου Σταδίου



5

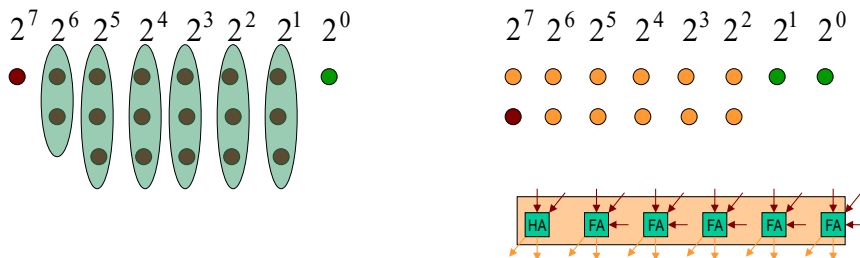
Παραγωγή Τρίτου Σταδίου



● Έτοιμο ψηφίο αποτελέσματος

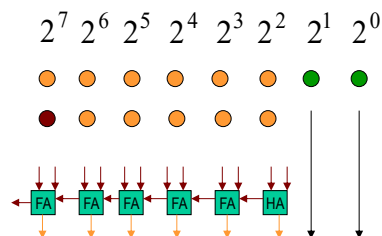
6

Τέταρτο στάδιο



7

Carry Propagation



Το τελικό στάδιο υλοποιείται με 6-bit carry propagation.
Συνολικό σχήμα $\Rightarrow$ Fig 8.12 στο Parhami

8

Πολλαπλασιαστές

- Δημιουργία μερικών γινομένων (partial products)
- Άθροιση μερικών γινομένων
- Κατηγορίες πολλαπλασιαστών
 - Σειριακοί ή παράλληλοι
 - Πίνακα ή δένδρου
 - Προσημασμένων αριθμών ή όχι

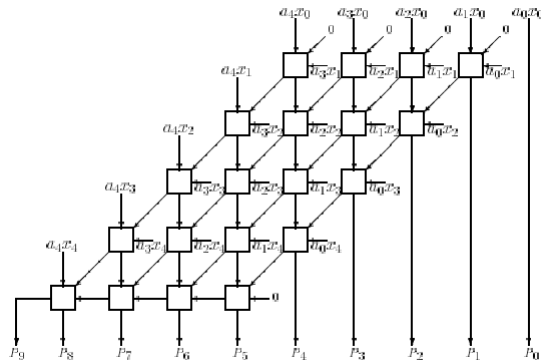
9

Αλγόριθμος πολλαπλασιασμού αριθμών χωρίς πρόσημο

					a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
				$\times$	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0
					$a_4 \cdot x_0$	$a_3 \cdot x_0$	$a_2 \cdot x_0$	$a_1 \cdot x_0$	$a_0 \cdot x_0$
			$a_4 \cdot x_1$		$a_3 \cdot x_1$	$a_2 \cdot x_1$	$a_1 \cdot x_1$	$a_0 \cdot x_1$	
		$a_4 \cdot x_2$	$a_3 \cdot x_2$	$a_2 \cdot x_2$	$a_1 \cdot x_2$	$a_0 \cdot x_2$			
	$a_4 \cdot x_3$	$a_3 \cdot x_3$	$a_2 \cdot x_3$	$a_1 \cdot x_3$	$a_0 \cdot x_3$				
$a_4 \cdot x_4$	$a_3 \cdot x_4$	$a_2 \cdot x_4$	$a_1 \cdot x_4$	$a_0 \cdot x_4$					
p_9	p_8	p_7	p_6	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

10

Πολλαπλασιαστής πίνακα για αριθμούς χωρίς πρόσημο



11

Πολλαπλασιασμός σε Συμπλήρωμα του Δύο

12

Αναπαράσταση Συμπληρώματος του Δύο

Η τιμή X ενός δυαδικού σε συμπλήρωμα του δύο

$$x_{n-1}x_{n-2}\dots x_2x_1x_0$$

είναι

$$X = -x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i, \quad x_i \in \{0,1\}$$

Προσοχή: το περισσότερο σημαντικό ψηφίο έχει αρνητικό βάρος

13

Παράδειγμα (1)

- Έστω ζητείται ο πολλαπλασιασμός $(-3) \times 2$
- Πολλαπλασιαστέος: 101
- Πολλαπλασιαστής : 010

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \ 0 \ 1 \\
 \times 0 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 0 \ 0 \ 0 \\
 1 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 0 \ 0 \ 0
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 +1 \\
 \bar{0} \ 0 \ 0 \\
 \bar{1} \ 0 \ 1 \\
 \hline
 \bar{0} \ 0 \ 0
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{r}
 +1 \\
 1 \ 0 \ 0 \\
 0 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 0 \\
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 \hline
 = -6
 \end{array}
 \end{array}$$

14

Παράδειγμα (2)

- Έστω ζητείται ο πολλαπλασιασμός $2 \times (-3)$
- Πολλαπλασιαστέος: 010
- Πολλαπλασιαστής : 101

Αρνητικό βάρος!

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 010 \\
 \times 101 \\
 \hline
 010 \\
 000 \\
 110 \\
 \hline
 110
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{\text{two's complement}} \quad
 \begin{array}{r}
 010 \\
 +1 \\
 \hline
 \bar{0}10 \\
 \bar{0}00 \\
 \bar{1}10 \\
 \hline
 110
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{+1} \quad
 \begin{array}{r}
 110 \\
 +1 \\
 \hline
 110 \\
 100 \\
 010 \\
 \hline
 11010 = -6
 \end{array}
 \end{array}$$

To 110 είναι το $(-1) \times 010$, δηλ. το συμπλήρωμα του 010

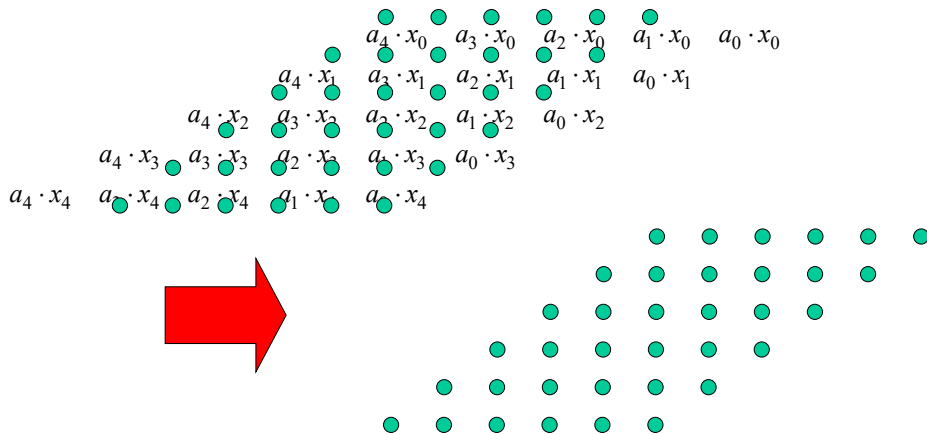
15

Συμπέρασμα

- Η μέθοδος για την άθροιση μερικών γινομένων απλοποιώντας την επέκταση προσήμου ισχύει **πάντα**.
- Το ζήτημα είναι **πώς** θα προκύψουν τα προς άθροιση μερικά γινόμενα.
 - Όταν ο πολλαπλασιαστής είναι αρνητικός, δηλ. έχει περισσότερο σημαντικό ψηφίο =1, το αντίστοιχο μερικό γινόμενο είναι το **συμπλήρωμα του δύο του πολλαπλασιαστέου**, γιατί λόγω της αναπαράστασης συμπληρώματος, το περισσότερο σημαντικό ψηφίο έχει αρνητικό βάρος

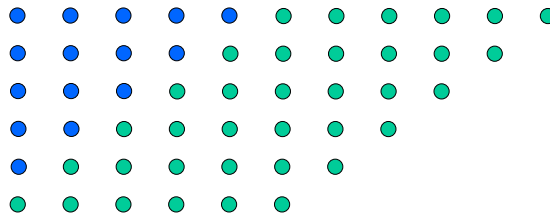
16

Dot diagrams: Τα μερικά γινόμενα σε μορφή πίνακα



17

Άθροιση Μερικών Γινομένων με Πρόσημο



Επέκταση προσήμου (sign extension)

18

Μείωση Πολυπλοκότητας Επέκτασης Προσέμου

$$X = -x_{m-1}2^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} x_i 2^i \quad \text{SSSSSS}z_4z_3z_2z_1z_0$$

$$-s2^{10} + s2^9 + s2^8 + s2^7 + s2^6 + s2^5 + z_42^4 + z_32^3 + z_22^2 + z_12^1 + z_0$$

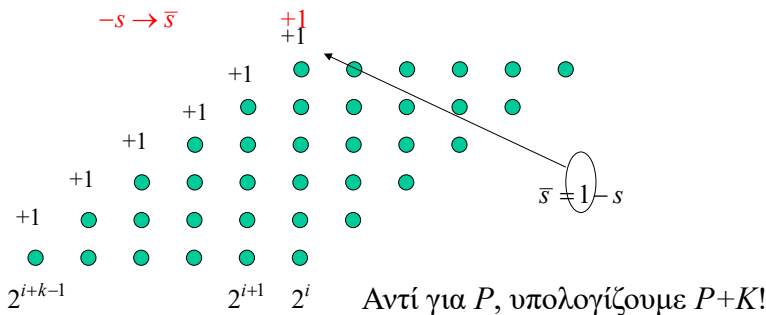
$$00000(-s)z_4z_3z_2z_1z_0$$

$$\begin{aligned} &-s2^{10} + s2^9 + s2^8 + s2^7 + s2^6 + s2^5 + z_42^4 + z_32^3 + z_22^2 + z_12^1 + z_0 = \\ &-s2^{10} + s(2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5) + z_42^4 + z_32^3 + z_22^2 + z_12^1 + z_0 = \\ &-s2^{10} + s(2^{10} - 2^5) + z_42^4 + z_32^3 + z_22^2 + z_12^1 + z_0 = \\ &(-s)2^5 + z_42^4 + z_32^3 + z_22^2 + z_12^1 + z_0 \end{aligned}$$

$$\bar{s} = 1 - s$$

19

Άθροιση k Προσημασμένων Όρων



$$K = \sum_{l=0}^{k-1} 2^{i+l} = 2^i \sum_{l=0}^{k-1} 2^l = 2^i \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 2^i (2^k - 1)$$

$$K' = K + 2^i = 2^i (2^k - 1) + 2^i = 2^i 2^k = 2^{i+k}$$

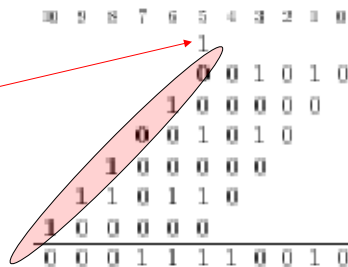
$$\text{mod}(P + 2^{i+k}, 2^{i+k}) = P$$

Για σωστό αποτέλεσμα, αγνοούμε το bit 2^{i+k} .

20

Παράδειγμα Άθροισης Προσημασμένων Αριθμών

Αντιστρέφουμε το πρόσημο και προσθέτουμε '1' στην πρώτη στήλη με πρόσημο.



21

Baugh - Wooley

$$\begin{aligned}
 X &= -x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i & Y &= -y_{n-1}2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} y_j 2^j \\
 Y \cdot X &= \left(-y_{n-1}2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} y_j 2^j \right) \left(-x_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i \right) \\
 &= x_{n-1}y_{n-1}2^{2n-2} + \sum_j \sum_i x_i y_j 2^{i+j} \\
 &\quad - x_{n-1}2^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} y_j 2^j \\
 &\quad - y_{n-1}2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i
 \end{aligned}$$

22

Baugh - Wooley (2)

$$-x_{n-1}2^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} y_j 2^j = - \sum_{j=0}^{n-2} x_{n-1} y_j 2^j 2^{n-1}$$

$$1 - x = \bar{x} \Leftrightarrow -x = \bar{x} - 1$$

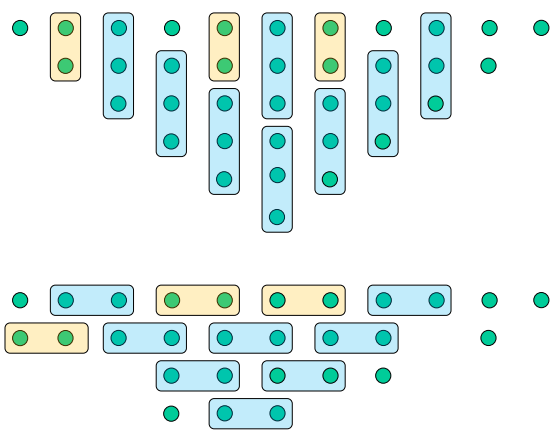
$$\begin{aligned} - \sum_{j=0}^{n-2} x_{n-1} y_j 2^j 2^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-2} (\overline{x_{n-1} y_j} - 1) 2^j 2^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \overline{x_{n-1} y_j} 2^j 2^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-2} 2^j 2^{n-1} \end{aligned}$$

23

**Δένδρα: εφαρμογή σε
πολλαπλασιαστές**

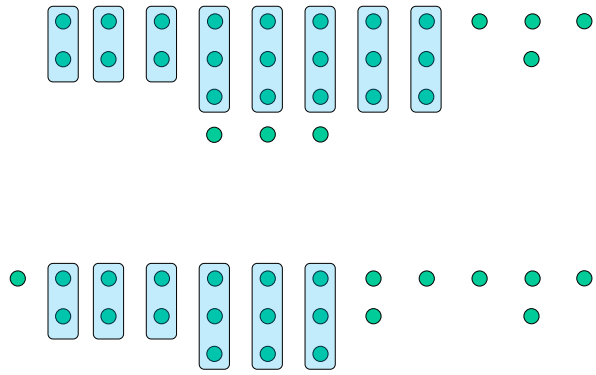
24

Συσσώρευση των μερικών γινομένων με (3,2) counters: Wallace



25

Συσσώρευση των μερικών γινομένων με (3,2) counters: Wallace



16 FAs, 9 HAs

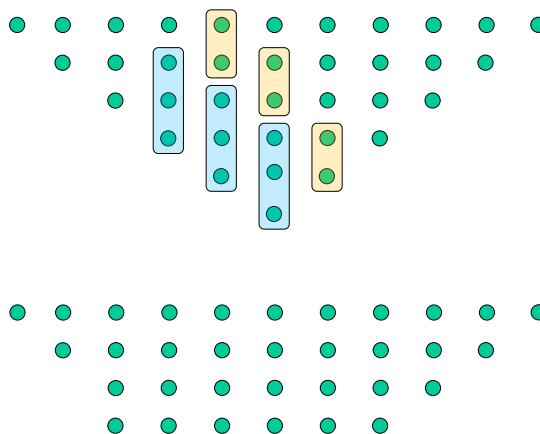
26

Η στρατηγική του Luigi Dadda

- Μειώνουμε τον αριθμό των προσθετέων στην επόμενη μικρότερη τιμή η οποία αντιστοιχεί ακριβώς σε στοιχείο της ακολουθίας $h(n)$
- Ίδια καθυστέρηση με Wallace, ελάχιστοι FAs και HAs

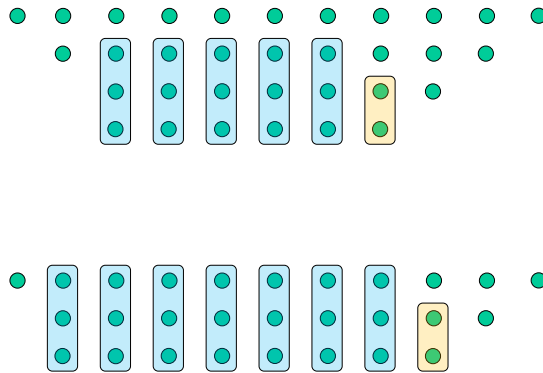
28

Συσώρευση των μερικών γινομένων με (3,2) counters: Dadda



29

Άθροιση με Dadda



15 FAs, 5 HAs