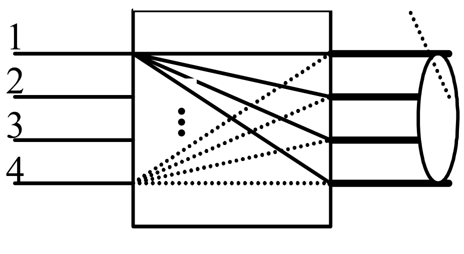
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΗΣ ΤΗΛΕΦΩΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Τέλεια δέσμη: όλες οι γραμμές της είναι προσπελάσιμες από οποιαδήποτε είσοδο.

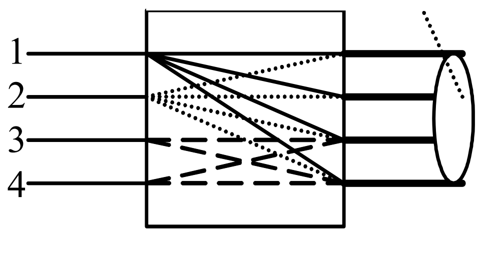
Ατελής δέσμη: όλες οι γραμμές της δεν είναι προσπελάσιμες από οποιαδήποτε είσοδο (π.χ. στην ατελή δέσμη του κατωτέρω σχήματος οι δύο πρώτες (πάνω) γραμμές της δεν είναι προσπελάσιμες από τις εισόδους 3 και 4).

Προσιτότητα: ο αριθμός των γραμμών μιας ατελούς δέσμης με τον οποίο μπορεί να συνδεθεί πάντοτε μια είσοδος (π.χ. στην ατελή δέσμη του κατωτέρω σχήματος η προσιτότητα είναι 2, λόγω των εισόδων 3 και 4 που μπορούν να συνδεθούν με 2 μόνον γραμμές της δέσμης).

Τέλεια Δέσμη



Ατελής Δέσμη



Φορτίο Κίνησης (Traffic load)

Ορισμοί

Κλήση (call)

Κλήση ορίζεται ως η απαίτηση για σύνδεση σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

Διάρκεια κλήσεως (holding time)

Διάρκεια κλήσεως ορίζεται ως το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια κλήση και αναφέρεται επίσης ως χρόνος εξυπηρετήσεως (service time).

Φορτίο κίνησης (traffic load)

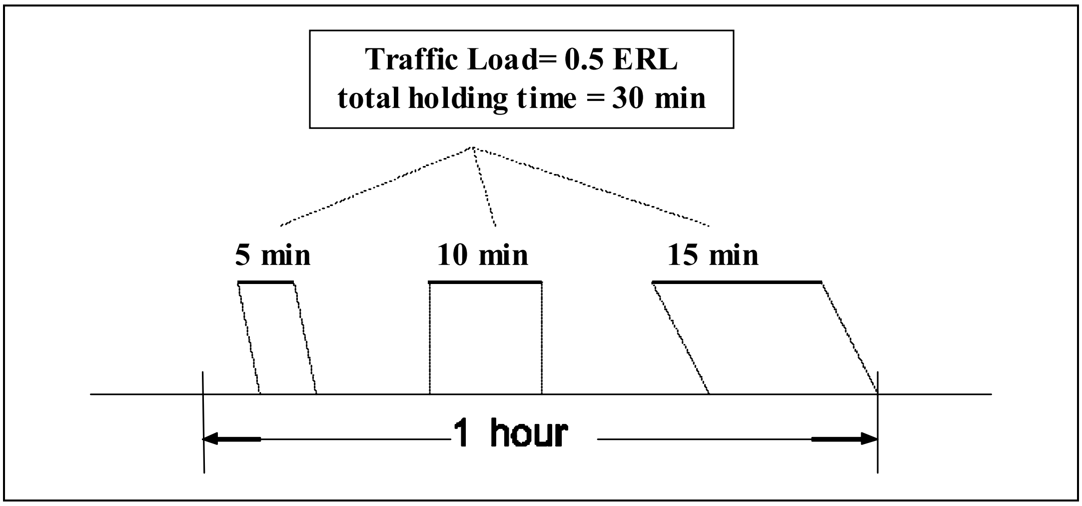
Φορτίο κίνησης είναι, εξ ορισμού, η συνολική διάρκεια όλων των κλήσεων εντός ενός χρονικού διαστήματος που λαμβάνεται ως μονάδα.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι αδιάστατο μέγεθος. Ωστόσο, έχουμε ως μονάδα φορτίου κινήσεως το ***Erlang (erl)*** *προς τιμήν του Δανού μαθηματικού Α. Κ. Erlang, ιδρυτού της θεωρίας τηλεπικοινωνιακής κινήσεως.*

Παράδειγμα υπολογισμού του φορτίου κινήσεως

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα (μια δέσμη γραμμών ΟΤΕ) υπάρχουν 3 κλήσεις (συνδιαλέξεις) με διάρκεια 5 min, 10 min και 15 min, αντιστοίχως όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί. Τότε το φορτίο κινήσεως α υπολογίζεται ως:

$$\alpha = \frac{(5+10+15)\,\mathrm{min}}{60\ \mathrm{min}} = 0.5\ erl$$



Φορτίο κινήσεως 1 Erlang σημαίνει π.χ. ότι μία γραμμή είναι συνεχώς κατειλημμένη εντός του χρονικού διαστήματος που την παρακολουθούμε.

Διαδιακασία άφιξης κλήσεων

Λέμε ότι μια κλήση φθάνει **τυχαία** στο τηλεφωνικό κέντρο όταν ισχύουν:

Σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα Δt, τείνοντος στο μηδέν ($\Delta t \dashrightarrow 0$):

(1) Η πιθανότητα $P_1(\Delta t)$ ότι μια κλήση θα γεννηθεί σε χρονικό διάστημα Δt, δηλ. στο $(t,t+\Delta t]$, τείνει στο $\lambda\Delta t$, ανεξάρτητα από τον χρόνο t, όπου λ είναι σταθερός αριθμός.

(2) Η πιθανότητα $P_{2+}(\Delta t)$ ότι δύο ή περισσότερες κλήσεις γεννώνται εντός χρονικού διαστήματος Δt, δηλ. εντός του $(t,t+\Delta t]$, τείνει στο μηδέν.

(3) Οι κλήσεις γεννώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Όταν ισχύουν τα ανωτέρω τρία αξιώματα, τότε αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των κλήσεων που θα φθάσουν π.χ. σε ένα τηλεφωνικό κέντρο ακολουθεί την κατανομή Poisson. Δηλαδή η πιθανότητα να έχουμε k αφίξεις κλήσεων εντός ενός χρονικού διαστήματος t δίδεται από την σχέση:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

όπου λ είναι η σταθερά του αξιώματος (1) και παριστά την μέση τιμή του ρυθμού αφίξεως των κλήσεων (μονάδες: κλήσεις/χρόνο). Το γινόμενο λt παριστά την μέση τιμή (και την διασπορά – συμβαίνει μέση τιμή και διασπορά να συμπίπτουν) του αριθμού των αφίξεων εντός του χρονικού διαστήματος t.

Η σχέση αυτή λέγεται κατανομή Poisson (την λέμε κατανομή πιθανοτήτων διότι μας δίνει την πιθανότητα για όλες τις τιμές του k, k=0, 1, 2, 3, …)

Από την κατανομή Poisson, για k=0, προκύπτει ότι η πιθανότητα να μη αφιχθεί κλήση στο διάστημα (0,t] είναι:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Επομένως, η πιθανότητα ότι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων (interarrival time), δεν θα υπερβεί την τιμή t, ή όπως λέμε η συνάρτηση κατανομής του interarrival time δίνεται από την σχέση:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

η οποία είναι εκθετική κατανομή με μέση τιμή λ^{-1}. Πρόκειται για Probability Distribution Function (PDF) δηλ. για αθροιστική συνάρτηση κατανομής, καθόσον η πιθανότητα αυτή είναι της μορφής P(X<t). Οπότε για να πάρουμε την probability density function (pdf) (πυκνότητα πιθανότητας) παραγωγίζουμε την PDF.

Άρα αν $PDF = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow$ pdf = $\lambda e^{-\lambda t}$ δηλ. η «αναγνωρίσιμη» ακθετική κατανομή.

Επομένως το χρονικό διάστημα (διάρκεια) μεταξύ διαδοχικών αφίξεων κλήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Γενικά το χρονικό διάστημα από μια τυχούσα χρονική στιγμή μέχρι την άφιξη μιας κλήσης ακολουθεί την (αρνητική) εκθετική κατανομή (αυτό αποδεικνύεται βάσει Μαρκοβιανών Διαδικασιών).

Συμπέρασμα: *για να έχουμε τυχαίες αφίξεις κλήσεων σε ένα σύστημα θα πρέπει: α) να ισχύουν τα τρία αξιώματα, β) η κατανομή του αριθμού των αφίξεων εντός ενός χρονικού διαστήματος να είναι η Poisson, γ) οι χρόνοι μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων να ακολουθούν την (αρνητική) εκθετική κατανομή. Στην πράξη διαπιστώνουμε τις τυχαίες αφίξεις μετρώντας την μέση τιμή και την διασπορά του αριθμού των αφίξεων εντός ενός χρονικού διαστήματος. Αν αριθμητικά συμπίπτουν σημαίνει ότι ο αριθμός των αφίξεων ακολουθεί την κατανομή Poisson (τυχαίες αφίξεις), διότι είναι η μόνη σχετική κατανομή που έχει αυτή την ιδιότητα (μέση τιμή = διασπορά).*

Διάρκεια Καταλήψεων

Κάθε κλήση που καταφθάνει σε μια δέσμη καταλαμβάνει μια γραμμή (ή trunk, όπως λέμε) για ορισμένο χρονικό διάστημα. Ποια είναι η πιθανότητα το διάστημα αυτό να είναι μεγαλύτερο από t; Θεωρούμε βεβαίως ότι η κλήση θα τερματίσει τυχαία. Η πιθανότητα λοιπόν ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης της κλήσης είναι μεγαλύτερος από t, ισούται με την πιθανότητα ότι η κλήση δεν θα τελειώσει στο διάστημα [0,t]. Αποδεικνύεται λοιπόν ότι η κατανομή των πιθανοτήτων αυτών είναι η εκθετική:

$$H(t) = e^{-\mu t}$$

Ο χρόνος λοιπόν εξυπηρέτησης μιας κλήσης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή μ^{-1}, όπου το μ ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate)** ή ρυθμός τερματισμού των κλήσεων. Ο χρόνος εξυπηρέτησης συχνά αναφέρεται ως exponential service time, εν συντομία, και το φορτίο κινήσεως εκφράζεται ως **α=λ/μ.**

Τύποι απωλειών

Θεωρούμε κλήσεις που προέρχονται από άπειρο πρακτικά πληθυσμό, καταφθάνουν σε μια τέλεια δέσμη τυχαία, με ρυθμό αφίξεως λ. Ο ρυθμός εξυπηρετήσεως στην δέσμη είναι μ. Αποδεικνύεται ότι το προσφερόμενο φορτίο κινήσεως κατά μέσον όρο είναι α = λ/μ. Η πιθανότητα απωλείας κλήσεως (δηλ. η πιθανότητα μη εξυπηρετήσεως της κλήσεως από την δέσμη διότι όλες οι γραμμές της είναι κατηλειμμένες) είναι:

$$B = \frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}} \equiv E_s(\alpha)$$

όπου **s είναι ο συνολικός αριθμός γραμμών της δέσμης** (χωρητικότητα). Ο τύπος αυτός λέγεται **B-Formula του Erlang**. Συνδέει τα μεγέθη: προσφερόμενο φορτίο κίνησης α, αριθμό γραμμών της δέσμης, s, και πιθανότητα απωλείας κλήσεως, B (Blocking).

Αν θεωρήσουμε το **s άπειρον** τότε ο παρονομαστής της B-Formula του Erlang, γίνεται e^{α}, και όλος ο τύπος είναι πλέον ο τύπος του **Poisson**.

$$\text{Δηλ.}\ \ B = e^{-\alpha} (\alpha^{s} / s!)$$

(σημειωτέον ότι το α είναι το γινόμενο του λ επί την μέση τιμή του χρόνου διάρκειας των κλήσεων, ή α = λ/μ).

Ιδιότητες Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως

Το **φορτίο κίνησης (traffic load)** μερικές φορές αναφέρεται και ως **ένταση κίνησης (traffic intensity)** και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

[1] *Αν c είναι ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα και h είναι η μέση διάρκειά τους, τότε το φορτίο κίνησης α δίδεται από την σχέση:*

$$\alpha = ch \ \ [erl]$$

[2] *Το φορτίο κίνησης ισούται προς τον αριθμό των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα εντός χρονικού διαστήματος ίσου προς την μέση τιμή της διάρκειάς των.*

[3] *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται (ποσοστό του χρόνου που η γραμμή είναι κατειλημμένη). Επομένως μία γραμμή δεν μπορεί να μεταφέρει παρά μόνον 1 erl, το πολύ (αφού η μεγίστη τιμή πιθανότητος είναι 1).*

[4] *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης.*

Απόδειξη:

Οι ιδιότητες [1], [2] και [3] αποδεικνύονται άμεσα από τον ορισμό του φορτίου κίνησης. Η ιδιότητα [4] αποδεικνύεται ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι μια δέσμη από s γραμμές διεκπεραιώνει φορτίο κίνησης α erl. Τότε, το φορτίο που θα μεταφέρεται από κάθε μία γραμμή, κατά μέσον όρον, είναι $\alpha_1 = (\alpha/s)$ erl, το οποίο είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα η γραμμή αυτή να είναι κατειλημμένη, βάσει της ιδιότητας [3]. Ως εκ τούτου, ο μέσος αριθμός των κατειλημμένων γραμμών προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό του αριθμού των γραμμών, s, επί την πιθανότητα η μία γραμμή να είναι κατειλημμένη, δηλ. $s\,\alpha_1 = \alpha$.