Βασική Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης – ΜΕΡΟΣ Β

Erlang B-formula / Erlang C formula

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

- Ταξινόμηση συστημάτων πλήρους διαθεσιμότητας κατά Kendall
- Σύστημα απωλειών M/M/s
- Erlang B-formula
- Σύστημα αναμονής M/M/s
- Erlang C formula
- Παραδείγματα

Ταξινόμηση συστημάτων πλήρους διαθεσιμότητας κατά Kendall

Ένα σύστημα που συνδέει εισερχόμενες με εξερχόμενες γραμμές καλείται **διακοπτικό - επιλογικό σύστημα (switching system)**.

Εάν κάθε εισερχόμενη γραμμή μπορεί να συνδεθεί με κάθε εξερχόμενη γραμμή το σύστημα καλείται **πλήρους διαθεσιμότητας (full availability system)**, διαφορετικά το σύστημα καλείται **σύστημα περιορισμένης διαθεσιμότητας (limited availability system)**.

Τα συστήματα πλήρους διαθεσιμότητας περιγράφονται από:

α) την διαδικασία εισόδου (δηλαδή τον τρόπο άφιξης των κλήσεων στο σύστημα)

β) τον μηχανισμό εξυπηρέτησης

γ) την πειθαρχία αναμονής (δηλαδή τον τρόπο διαχείρισης των κλήσεων όταν υπάρχει συμφόρηση)

Ταξινόμηση συστημάτων πλήρους διαθεσιμότητας κατά Kendall (1)

Τα συστήματα πλήρους διαθεσιμότητας ταξινομούνται σύμφωνα με τον συμβολισμό του **Kendall (Kendall notation)**:

A/B/s

A: η κατανομή πιθανότητας των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων (διαδικασία εισόδου), π.χ. A = M ή D ή U ή G

B: η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης και,

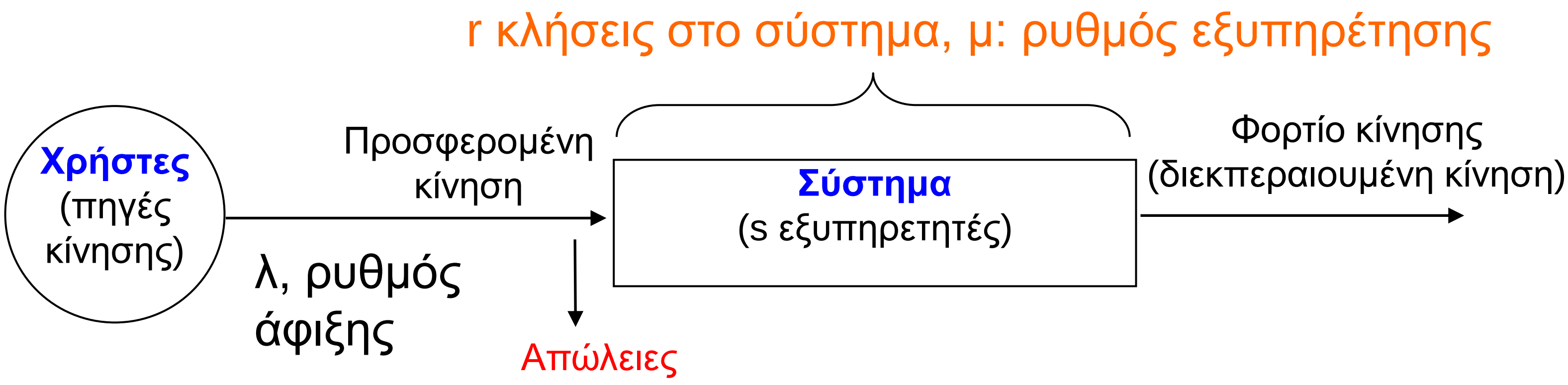
s: ο αριθμός των εξερχομένων γραμμών (εξυπηρετητές - servers).

<u>Παράδειγμα:</u> Ένα σύστημα με Poisson κατανομή άφιξης των κλήσεων, εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων και s γραμμές εξόδου (servers) δηλώνεται ως **M/M/s**.

Σύστημα με ουρά αναμονής m θέσεων: **M/M/s(m),** ή ως **M/M/s/s+m FIFO** ή **LIFO**

Σύστημα απωλειών δηλώνεται ως **M/M/s(0)** ή ως **M/M/s/s**

Το σύστημα απωλειών Erlang - M/M/s(0)



Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών με αφίξεις Poisson και εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης. Από την στιγμή που οι αφίξεις μπλοκάρονται και εγκαταλείπουν το σύστημα όταν βρουν όλους τους εξυπηρετητές (κανάλια χρηστών) απασχολημένους, είναι επόμενο ο αριθμός των υπαρχουσών κλήσεων στο σύστημα να ισούται με τον αριθμό των κλήσεων που εξυπηρετούνται, δηλαδή με τον αριθμό των απασχολημένων εξυπηρετητών.

Ανάλυση του συστήματος M/M/s(0)

- Σκοπός: Πιθανότητα να έχομε r κλήσεις στο σύστημα κατά μέσον όρον.
- Έστω $P_r(t) = P\{N(t)=r\}$.

Επειδή η πιθανότητα να τερματίσει μια κλήση στο (t, t+Δt), με r κλήσεις να βρίσκονται σε εξέλιξη, ισούται με $r\mu\,\Delta t$, έχουμε τις παρακάτω πιθανότητες:

- $P\{A\} = P_r(t)\,(1-\lambda\Delta t-r\mu\Delta t)$
- $P\{B\} = P_{r-1}(t)\,\lambda\Delta t$ **(1)**
- $P\{C\} = P_{r+1}(t)\,(r+1)\mu\Delta t$

Επειδή τα γεγονότα A, B, C είναι μοναδικά έχουμε:

$$P_r(t+\Delta t) = P\{A\}+P\{B\}+P\{C\} = P_r(t)+[\lambda P_{r-1}(t)-(\lambda+r\mu)P_r(t)+(r+1)\mu P_{r+1}(t)]\Delta t \qquad \textbf{(2)}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_r(t+\Delta t)-P_r(t)}{\Delta t} = dP_r(t)/dt = \lambda P_{r-1}(t)-(\lambda+r\mu)P_r(t)+(r+1)\mu P_{r+1}(t). \qquad \textbf{(3)}$$

Ανάλυση του συστήματος M/M/s(0) – Εξήγηση σχέσεων (1)

- Έστω $N(t)$ ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα στον χρόνο t, τότε το γεγονός $\{N(t + \Delta t) = r\}$ προκύπτει από μία από τις τρεις περιπτώσεις Α, Β, Γ:
  - Α: $\{ N(t) = r \}$ *και { καμία κλήση δεν ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα* $(t, t + \Delta t]$ $\}$.
  - Β: $\{ N(t) = r-1\}$ *και { μία μόνο κλήση ξεκινά στο* $(t, t + \Delta t]$ $\}$.
  - Γ: $\{ N(t) = r+1$ *και { μία μόνο κλήση (από τις* $r+1$*) τερματίζει στο* $(t, t + \Delta t]$ $\}$.
- Οπότε η πιθανότητα των γεγονότων αυτών θα είναι, P{A}, P{B}, P{Γ} - σχέση (1) στην διαφάνεια 6. Δηλ. το «και» εκφράζεται με το γινόμενο των πιθανοτήτων.

{ καμία κλήση δεν ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα $(t, t + \Delta t]$ $\}$ =

{ καμία κλήση δεν [ξεκινά ή τερματίζει στο διάστημα $(t, t + \Delta t]$] } =

$1 - (\lambda\Delta t + r\mu\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t - r\mu\Delta t.$ Επομένως $P\{A\} = P_r(t)\,(1-\lambda\Delta t-r\mu\Delta t)$

{ μία μόνο κλήση ξεκινά στο $(t, t + \Delta t]$ $\} = \lambda\,\Delta t$ Επομένως $P\{B\} = P_{r-1}(t)\,\lambda\Delta t$

{ μία μόνο κλήση (από τις $r+1$*) τερματίζει στο* $(t, t + \Delta t]$ $\} = 1 - (r+1)\mu\Delta t$. Εξήγηση:

Η πιθανότητα να τερματίσει μία κλήση στο Δt είναι ανάλογος του Δt *(σύμφωνα με τα αξιώματα των τυχαίων γεγονότων – άφιξης ή τερματισμού). Επειδή όμως έχουμε συνολικά r+1 κλήσεις υπό εξυπηρέτηση, ο τερματισμός 1 κλήσης, μπορεί να συμβεί από τον τερματισμός της 1ης κλήσης ή της 2ης κλήσης … ή της (r+1) κλήσης. Το «ή» εκφράζεται με πρόσθεση πιθανοτήτων. Κάθε ένα από αυτά τα (r+1) γεγονότα έχει πιθανότητα* $\mu\Delta t$, *οπότε η πρόσθεση μας δίνει* $(r+1)\mu\Delta t$. Επομένως $P\{C\} = P_{r+1}(t)\,(r+1)\mu\Delta t$

Πιθανότητες μονίμου καταστάσεως

Πρακτικά ενδιαφερόμαστε για την μόνιμη κατάσταση μετά από αρκετό χρόνο. Αν υπάρχει μια τέτοια κατάσταση τότε υπάρχει και μια μοναδική οριακή πιθανοτική κατανομή $\{P_r\}$ τέτοια ώστε για $t \rightarrow \infty$ να ισχύει:

$$P_r(t) \rightarrow P_r\,,\quad \{dP_r(t)/dt\} \rightarrow 0$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση.

Αυτό καλείται **στατιστική ισορροπία (statistical equilibrium)** και το P_r λέγεται **πιθανότητα μονίμου καταστάσεως (steady state probability).**

Άρα, στην μόνιμη κατάσταση, το αριστερό μέλος της (3) είναι 0.

$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1}$, $r = 0,1,\ldots,s$ όπου $P_r = 0$ για $r = -1$ ή για $r = s+1$

Εξίσωση κατάστασης (σφαιρικής) ισορροπίας

Έτσι προκύπτει η **εξίσωση κατάστασης (σφαιρικής) ισορροπίας (global balanced equation)**:

$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1}$, $r = 0,1,...,s$ όπου $P_r= 0$ για $r = -1$ ή $r = s+1$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη επί Δt έχομε:

$$P_r \lambda \Delta t + P_r r \mu \Delta t = P_{r-1} \lambda \Delta t + P_{r+1} (r+1) \mu \Delta t \qquad \textbf{(4)}$$

η οποία ερμηνεύεται ως εξής:

Έστω S_r η κατάσταση όπου υπάρχουν r κλήσεις στο σύστημα. Τότε, η σχέση **(4)** αναπαριστά την πιθανότητα

$S_r \rightarrow S_{r+1}$ ή $S_r \rightarrow S_{r-1}$ (από την S_r σε γειτονικές καταστάσεις)

ενώ το δεξιό μέλος αναπαριστά την πιθανότητα

$S_{r-1} \rightarrow S_r$ ή $S_{r+1} \rightarrow S_r$ (από τις γειτονικές καταστάσεις στην S_r)

Διάγραμμα Μεταπτώσεως των Καταστάσεων (State Transition Diagram)

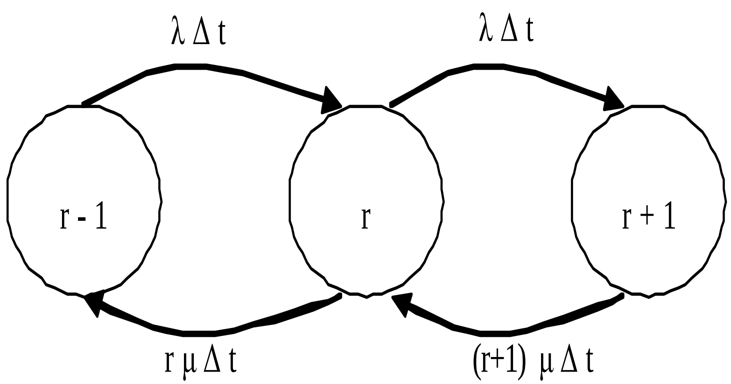
$P_r\lambda\,\Delta t + P_r\, r\,\mu\,\Delta t = P_{r-1}\lambda\,\Delta t + P_{r+1}(r+1)\mu\Delta t \Rightarrow P_r\lambda + P_r\, r\mu = P_{r-1}\lambda + P_{r+1}(r+1)\mu$

«ρυθμός εισόδου = ρυθμός εξόδου» (rate-in = rate-out)

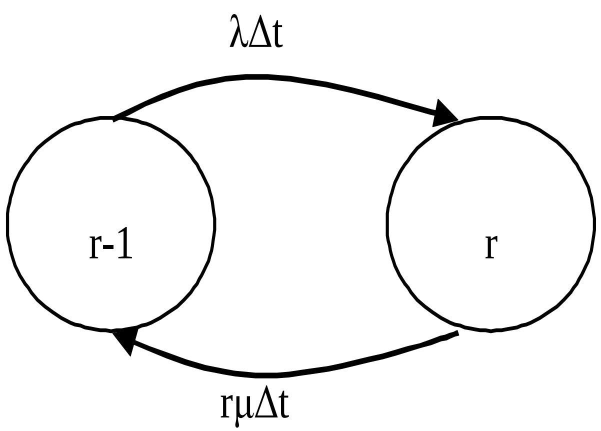
Προσθέτοντας κατά μέλη για r=0 ως r = i-1, $P_i=(\alpha/i)P_{i-1}$ $i=1,2,...s$, $\alpha=\lambda/\mu$ **(5)**

ή $P_{r-1}\,\lambda\,\Delta t = P_r\, r\,\mu\,\Delta t \Rightarrow P_{r-1}\,\lambda = P_r\, r\,\mu$

«ρυθμός ανόδου = ρυθμός καθόδου» (rate-up = rate-down)



Σφαιρική ισορροπία (Global Balance)



Τοπική ισορροπία (Local Balance)

Κατανομή Erlang

Από (5)⇒ $P_i = (\alpha/i)P_{i-1} = [\alpha^2/i(i-1)]P_{i-2} = \ldots = (\alpha^i/i!)P_0$ (6)

όπου P_0 η πιθανότητα το σύστημα να είναι κενό (χωρίς κλήσεις).

Από την συνθήκη κανονικοποίησης:

$$\sum_{i=0}^{s} P_i = P_0 + P_0 \sum_{i=1}^{s} \frac{\alpha^i}{i!} = 1 \qquad (7)$$

προκύπτει τελικά ότι:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1} \qquad (8)$$

και λόγω της (6), προκύπτει η **κατανομή Erlang**:

$$P_r = \frac{\dfrac{\alpha^r}{r!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}} \qquad (9)$$

s→ ∞ τότε η Erlang γίνεται Poisson:

$P_r \rightarrow [\alpha^r / r!]\, e^{-\alpha}$

Erlang B-formula

$$P_s = B = E_s(a) = \frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{s} \frac{\alpha^i}{i!}}$$

Erlang B-formula υπό αναδρομική μορφή:

$E_s(\alpha) = \alpha E_{s-1}(\alpha)/(s+\alpha E_{s-1}(\alpha))$, $E_0(\alpha) = 1$

- Στο παρελθόν είχαμε (και έχουμε) πίνακες!

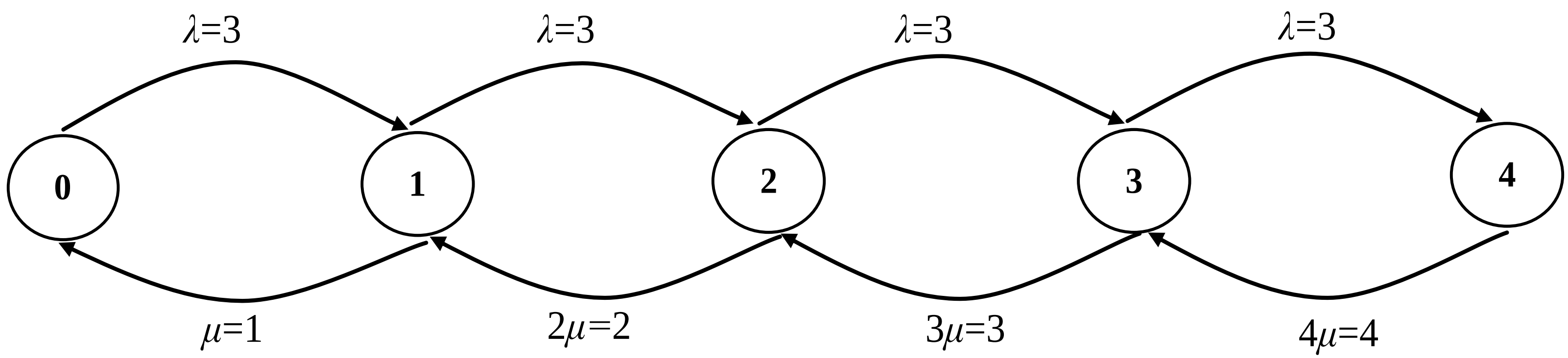
Παράδειγμα Erlang

- Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών το οποίο αποτελείται από 4 εξυπηρετητές (κανάλια χρηστών) και δέχεται κλήσεις που ακολουθούν την κατανομή Poisson. Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης είναι 3 erl και η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων (εκθετικά κατανεμημένος) είναι μονάδα.

1. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων.
2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο.
3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το σύστημα να έχει τουλάχιστον 2 κατειλημμένους εξυπηρετητές.
4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα απώλειας των κλήσεων.

Παράδειγμα Erlang (συνέχεια 1)

1. Αφού α= 3 erl και h = 1, τότε λ = α / h = 3 αφίξεις στην μονάδα του χρόνου. Το σύστημα εξυπηρέτησης είναι σύστημα απωλειών M/M/s, επομένως το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων έχει ως εξής:



2. Η πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο, P_0, δίδεται από την κατανομή Erlang:

$$P_0 = \frac{\frac{a^0}{0!}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{a^i}{i!}} = \frac{\frac{3^0}{1}}{\sum_{i=0}^{4} \frac{3^i}{i!}} = \frac{1}{1+3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{2*3}+\frac{3^4}{2*3*4}} = \frac{1}{16{,}375}$$

Δηλ. P_0 = 6.1%

Παράδειγμα Erlang (συνέχεια 2)

3. Η ζητουμένη πιθανότητα, P_{2+}, υπολογίζεται ως: P_{2+}=1 - P_0 - P_1

$$P_1 = \frac{\frac{a^1}{1!}}{\sum_{i=0}^{4}\frac{a^i}{i!}} = \frac{\frac{3^1}{1}}{\sum_{i=0}^{4}\frac{3^i}{i!}} = \frac{3}{16,375} = 18.32\%$$

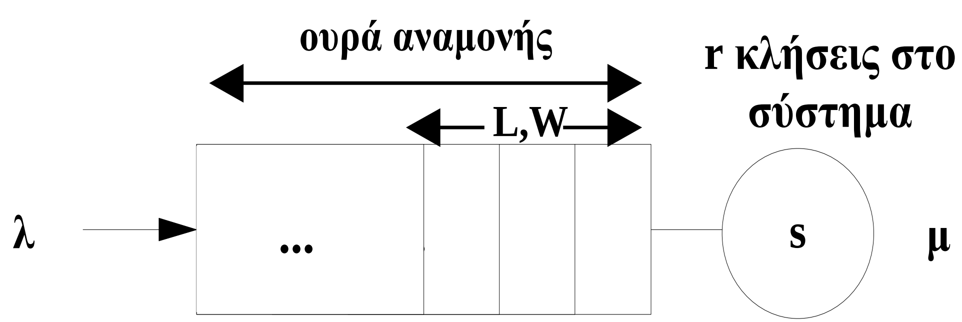
Άρα P_{2+}=1-P_0-P_1=1–0.061–0.1832= **75.58%**

4. Η πιθανότητα απώλειας κλήσεων υπολογίζεται από την Erlang B-formula:

$$E_s(a) = E_4(3) = P_4 = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{i=0}^{4}\frac{a^i}{i!}} = \frac{\frac{3^4}{4!}}{\sum_{i=0}^{4}\frac{3^i}{i!}} = \frac{\frac{81}{24}}{1+3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{2*3}+\frac{3^4}{2*3*4}} = \frac{3.375}{16.375} = 20,61\%$$

Σύστημα αναμονής M/M/s

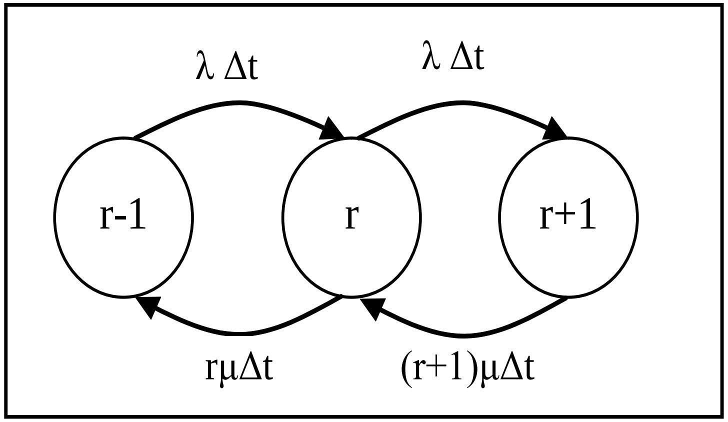
- Έστω το σύστημα αναμονής M/M/s του κατωτέρω σχήματος με είσοδο Poisson, εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης, s εξυπηρετητές, και άπειρες θέσεις αναμονής, στις οποίες όλες οι κλήσεις παραμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν κατά μέρον όρον επί χρόνον W. L είναι το πλήθος των κλήσεων στην ουρά αναμονής, κατά μέσον όρο, ενώ λ και μ είναι ο μέσος ρυθμός άφιξης και εξυπηρέτησης, αντίστοιχα.



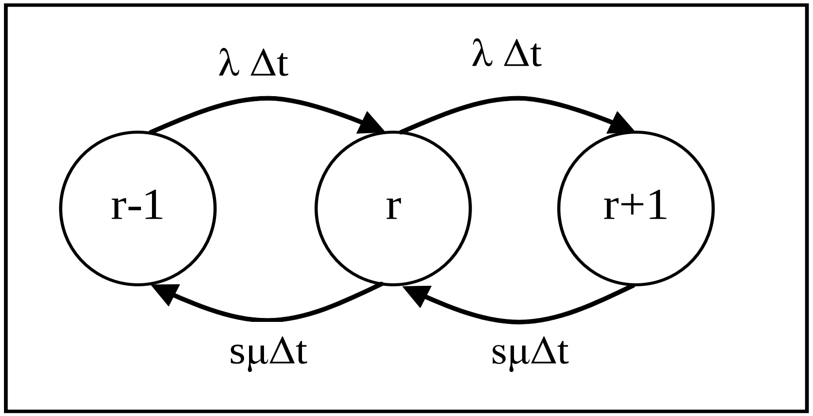
Διάγραμμα μεταπτώσεως των καταστάσεων του **M/M/s queueing**

Το διάγραμμα (α) για **r < s** είναι ισοδύναμο με αυτό του M/M/s(0).

Όμως, στο διάγραμμα (β) για **r ≥ s**, όταν s κλήσεις εξυπηρετούνται και οι εναπομείνασες (r-s) κλήσεις παραμένουν στην ουρά αναμονής, η πιθανότητα να τερματίσει μια κλήση σε χρόνο Δt, είναι sμΔt (ανεξάρτητη του r).



(α)



(β)

M/M/s queueing: *ρυθμός εξόδου = ρυθμός εισόδου*

Αν υπάρχει σταθερή κατάσταση, τότε από την σχέση *ρυθμός εξόδου = ρυθμός εισόδου*, έχουμε τις εξισώσεις μονίμου καταστάσεως:

$$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1}, \quad r < s \qquad \textbf{(1α)}$$

$$(\lambda+ s\mu)P_r = \lambda P_{r-1}+s\mu P_{r+1}, \qquad r \geq s \qquad \textbf{(1β)}$$

Λύνοντας τις (1) όμοια με την περίπτωση του συστήματος απωλειών M/M/s, και θέτοντας α=λ/μ παίρνουμε:

- ✓ Για r < s: $$P_r = \frac{\alpha^r}{r!} P_0 \qquad \textbf{(2α)}$$

- ✓ Για r≥s: $$P_r = \frac{\alpha^s}{s!}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{r-s} P_0 \qquad \textbf{(2β)}$$

Πιθανότητα μονίμου καταστάσεως στο M/M/s queueing

Αν $\{P_r\}$ είναι η κατανομή πιθανότητας στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, τότε πρέπει να ισχύει (συνθήκη κανονικοποίησης):

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_r = P_0\left[\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^r\right] = 1$$

Αν **α < s** το <u>δεύτερο άθροισμα στην αγκύλη συγκλίνει</u> σε:

$$\boxed{\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{s}\right)^r = \frac{s}{s-\alpha}}$$

οπότε:

$$P_0 = \left(\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\alpha^r}{r!} + \frac{\alpha^s}{s!}\frac{s}{s-\alpha}\right)^{-1} \quad \textbf{(3)}$$

Για r < s $\quad P_r = \dfrac{\alpha^r}{r!}P_0$

Για r ≥ s $\quad P_r = \dfrac{\alpha^s}{s!}\left(\dfrac{\alpha}{s}\right)^{r-s} P_0$

ΠΡΕΠΕΙ α < s

M/M/s queueing – Παρατηρήσεις

Αν $\alpha \geq s$ το άθροισμα (στην προηγούμενη διαφάνεια) αποκλίνει και έχουμε $P_0=0$ που σημαίνει ότι η $\{P_r\}$ δεν υπάρχει (δηλ. δεν υπάρχει “steady state”).

Πάντως, όταν s trunks μπορούν να μεταφέρουν μόνο s erl και $\alpha \geq s$, ο αριθμός των κλήσεων που αναμένουν στην ουρά αναμονής γίνεται άπειρος και το σύστημα αποκλίνει, και έτσι δεν υπάρχει σταθερή κατάσταση λειτουργίας.

Όταν δεν χάνεται καμία κλήση σε ένα σύστημα αναμονής, αυτό σημαίνει ότι όλο το προσφερόμενο φορτίο α erl διεκπεραιώνεται.

Το διεκπεραιούμενο φορτίο ανά εξυπηρετητή, $\rho=\alpha/s$, καλείται **παράγοντας αξιοποίησης (utilization factor)** ή απόδοση των trunks (το ίδιο ισχύει και στα συστήματα απωλειών).

Γενικώς είναι γνωστό ότι ένα σύστημα αναμονής έχει μια σταθερή κατάσταση λειτουργίας **αν και μόνο** αν $\rho < 1$.

Erlang C formula

Ως **πιθανότητα αναμονής (queuing probability)** ορίζεται η πιθανότητα ότι μια κλήση θα περιμένει στην ουρά αναμονής προτού εξυπηρετηθεί και συμβολίζεται με M(0), συμβολισμός που δείχνει την πιθανότητα ο χρόνος αναμονής > 0. Μια εισερχόμενη κλήση θα μπει στην ουρά αναμονής αν ο αριθμός των υπαρχουσών κλήσεων είναι μεγαλύτερος ή ίσος του s. Άρα:

$$M(0)=\sum_{r=s}^{\infty}P_r=\frac{\alpha^s}{s!}\frac{s}{s-\alpha}P_0=\frac{\dfrac{\alpha^s}{s!}\dfrac{s}{s-\alpha}}{\displaystyle\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\alpha^r}{r!}+\frac{\alpha^s}{s!}\frac{s}{s-\alpha}} \qquad \textbf{(4)}$$

η οποία είναι γνωστή ως **Erlang C formula**.

Η **Erlang C formula** μπορεί να εκφραστεί

συναρτήσει της Erlang B-formula:

$$M(0)=\frac{sE_s(\alpha)}{s-\alpha\left[1-E_s(\alpha)\right]}$$

Μέσος χρόνος αναμονής σε σύστημα M/M/s

Η μέση τιμή του αριθμού των κλήσεων στην ουρά αναμονής υπολογίζεται ως:

$$L = \sum_{r=s}^{\infty}(r-s)P_r = \frac{\alpha^s}{s!}P_0\sum_{r=0}^{\infty} r\left(\frac{\alpha}{s}\right)^r = M(0)\frac{\alpha}{s-\alpha} \qquad \textbf{(5)}$$

Από τον νόμο του Little, υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο αναμονής W ως:

$$W = L / \lambda = M(0)h / (s\text{-}\alpha) \qquad \textbf{(6)}$$

όπου $h=\mu^{-1}$ είναι ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και $\alpha=\lambda/\mu$ το προσφερόμενο φορτίο κίνησης.

Παράδειγμα M/M/1 queueing

Σε σύστημα αναμονής M/M/1 με άπειρες θέσεις στην ουρά αναμονής, ο ρυθμός άφιξης είναι λ = 20 κλήσεις/ώρα και ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ = 27 κλήσεις/ώρα.

(Π.χ. Άφιξη αεροπλάνων σε διάδρομο απογειώσεως.)

Υπολογίστε:

(a) Τον συνολικό χρόνο T παραμονής των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

(b) Την πιθανότητα αναμονής (στην ουρά αναμονής).

(c) Τον συνολικό αριθμό N των κλήσεων στο σύστημα κατά μέσον όρο.

(d) Τον μέσο χρόνο W παραμονής των κλήσεων στην ουρά αναμονής.

(e) Το μέσο μήκος L της ουράς αναμονής.

Παράδειγμα M/M/1 queueing (συνέχεια)

Λύση Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι (α< s): $\alpha = \lambda/\mu$ = 20/27 = 0.74 erl < 1 erl.

(**a**) Ο συνολικός χρόνος παραμονής των κλήσεων στο σύστημα προκύπτει από την "διαφορά" του ρυθμού άφιξης από τον ρυθμό εξυπηρέτησης, ως εξής:

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} \Rightarrow T = \frac{1}{27-20} = \frac{1}{7} hour = 8.6 \min$$

(b) Πιθανότητα αναμονής = Πιθανότητα ο server να είναι "busy" = Φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνει ο server ($3^{η}$ ιδιότητα) = Προσφερόμενο φορτίο: M(0) = α

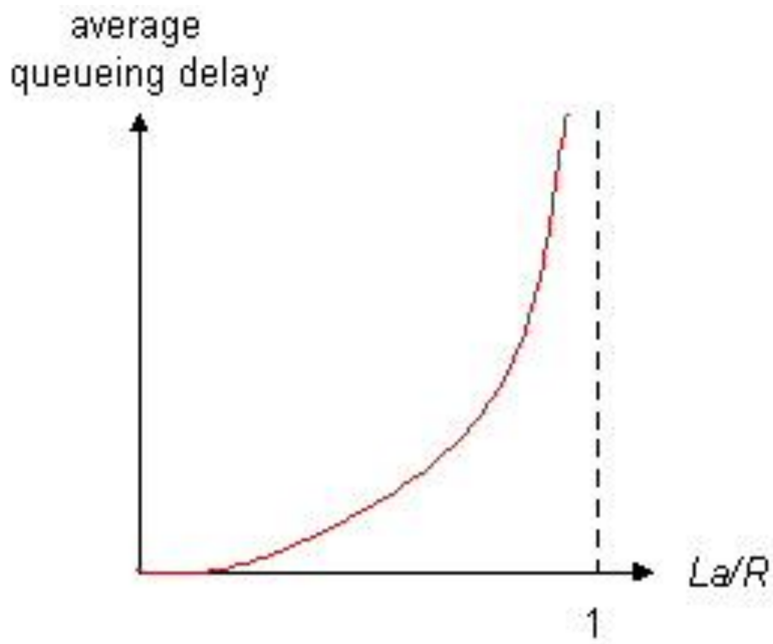
(c) $$N = \lambda T = \lambda/(\mu - \lambda) = 20/7 = 2.9$$

(d) $$W = T - 1/\mu = 8.6 - \frac{60}{27} = 6.4 \min$$

(e) $$L = \lambda W = \frac{20}{60} 6.4 = 2.1$$

Queueing delay (revisited)

- R=link bandwidth (bps)
- L=packet length (bits)
- a=average packet arrival rate



traffic intensity = La/R

- La/R ~ 0: average queueing delay small
- La/R -> 1: delays become large
- La/R > 1: more "work" arriving than can be serviced, average delay infinite!

Bandwidth x Delay Product - ΖΕΥΞΗ

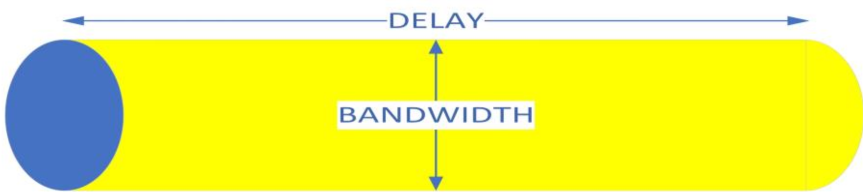
Σε μια οπτική ίνα (διηπειρωτική ζεύξη) μήκους d=15000 km με χωρητικότητα R = 45 Mbps μεταδίδεται ένα μεγάλο αρχείο, 10 MB. (Propagation Delay =d/c=15000/300000 = 0,05 s)

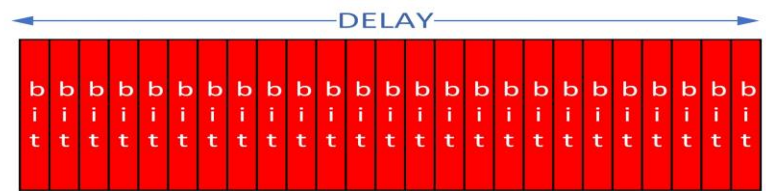
Πρόβλημα 1: Αν η μετάδοση του αρχείου είναι σε πλήρη εξέλιξη, πόσα bits θα χαθούν αν σπάσει η ζεύξη;

Πρόβλημα 2: Αν βάλουμε στην είσοδο της ζεύξης το 1ο bit που θέλουμε να μεταδώσουμε μέχρι το bit αυτό να το αντιληφθεί ο δέκτης στην άλλη άκρη της ζεύξης, πόσα bits θα έχουμε εν τω μεταξύ τοποθετήσει στην είσοδο της ζεύξης (οπτικής ίνας);

Έστω η ακόλουθη αντιστοιχία: Ζεύξη – Σωλήνας
Propagation Delay – Μήκος ζεύξης (σωλήνα)
Bandwidth – Εμβαδόν τομής (στομίου) ζεύξης

Bandwidth x Delay =
Όγκος του σωλήνα (ζεύξης)
(= *bits* = *bps* x *sec*)





Δεδομένου ότι η καθυστέρηση της διάδοσης (propagation delay) είναι χρόνος, αν θεωρήσουμε ότι κάθε bit έχει ένα πάχος, δηλ. χρονική διάρκεια, που δηλώνεται (προκύπτει) από τον αριθμό των bits ανά μονάδα χρόνου (δηλ. το bandwidth σε bps), τότε το πηλίκο **(*propagation delay*) : (*διάρκεια bit*) = το γινόμενο (*bandwidth* x *delay*)** μας δίνει τον αριθμό των bits που γεμίζουν την ζεύξη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ 1 & 2: $45 \times 10^6 \times 0,05 = 2,25 \times 10^6$ bits

Τέλος Ενότητας

Ερωτήσεις;