Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Μιχαήλ Λογοθέτης

Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιεχόμενα

- Σκοποί της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως (ΘΤΚ)
- Παραδείγματα εφαρμογής της ΘΤΚ
- Η φύση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως
- Συμφόρηση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως
- Βαθμός εξυπηρέτησης
- Το βασικό πρόβλημα των Τηλεπικοινωνιών
- Ορισμός φορτίου κίνησης και ιδιότητες αυτού
- Ο νόμος του Little και η επέκτασή του
- Τυχαίες αφίξεις
- Τυχαίες αναχωρήσεις
- Η Μαρκοβιανή ιδιότητα

Σκοποί της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως (ΘΤΚ) (1)

Η ΘΤΚ αποτελεί την μαθηματική βάση για:

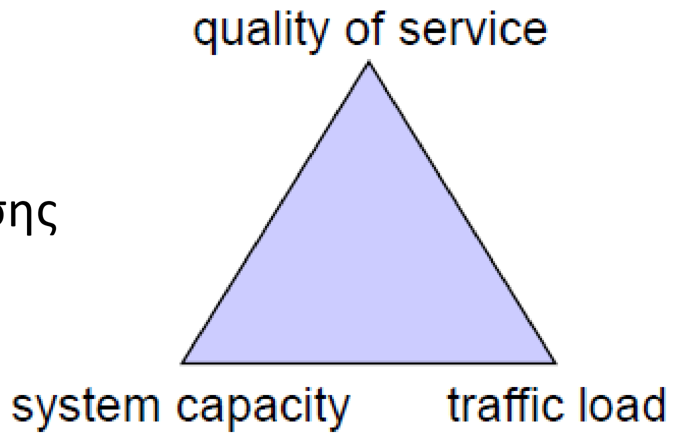
1) τον βέλτιστο σχεδιασμό τηλεπικοινωνιακών δικτύων ώστε να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές ποιότητας εξυπηρέτησης (Quality of Service – QoS).

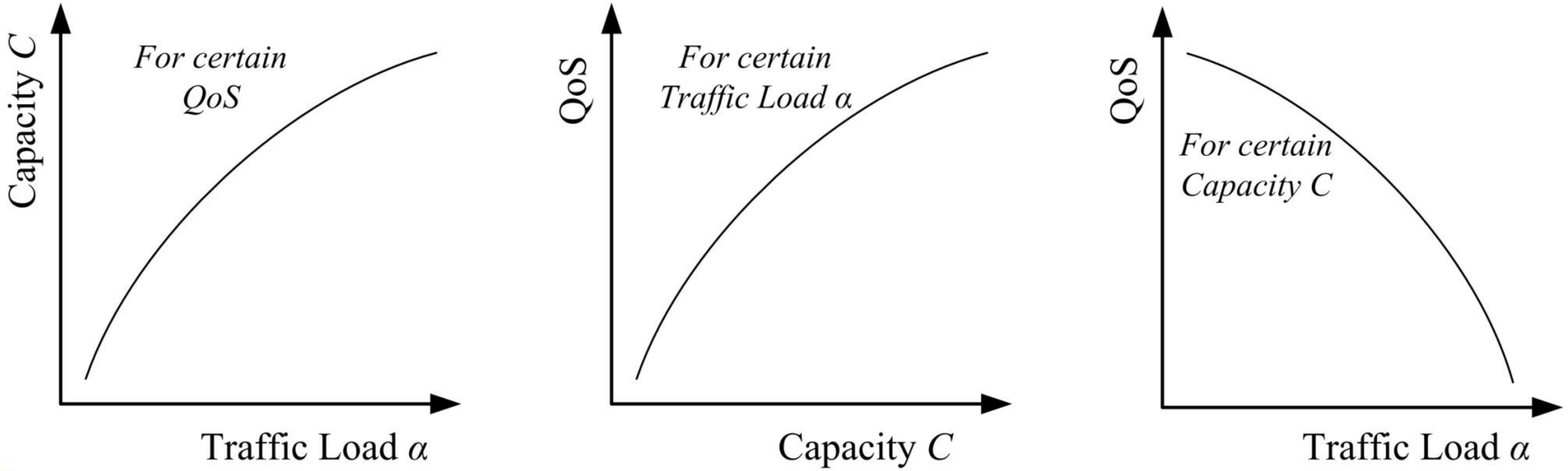
2) την αξιολόγηση της λειτουργίας του δικτύου.

Σκοποί της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως (ΘΤΚ) (2)

Εύρεση σχέσεων που συνδέουν:

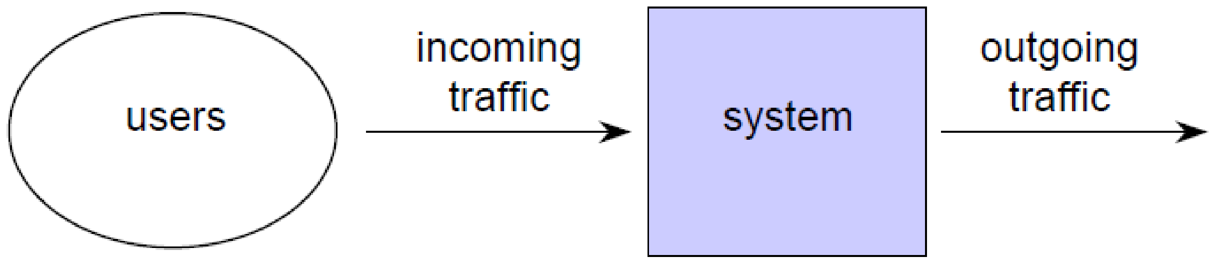
- Την χωρητικότητα του συστήματος (**system capacity**)
- Την προσφερομένη ποιότητα εξυπηρέτησης (**quality of service - QoS**)
- Το φορτίο κίνησης (**traffic load**)





Τηλεπικοινωνιακό Σύστημα από την σκοπιά της ΘΤΚ

- Κίνηση (**traffic**) δημιουργείται από τους χρήστες (**users**) του συστήματος (**system**).
- Το σύστημα εξυπηρετεί την εισερχόμενη κίνηση.
- *Ποια η προσφερομένη ποιότητα εξυπηρέτησης (QoS) για ένα συγκεκριμένο σύστημα;*
- *Δεδομένου του φορτίου κίνησης και προδιαγράφοντας την ποιότητα εξυπηρέτησής του, ποια πρέπει να είναι η χωρητικότητα του συστήματος;*
- *Δεδομένης της χωρητικότητας του συστήματος και της παρεχομένης ποιότητας εξυπηρέτησης, ποιο είναι το μέγιστο φορτίο κίνησης που μπορεί να εξυπηρετεί;*

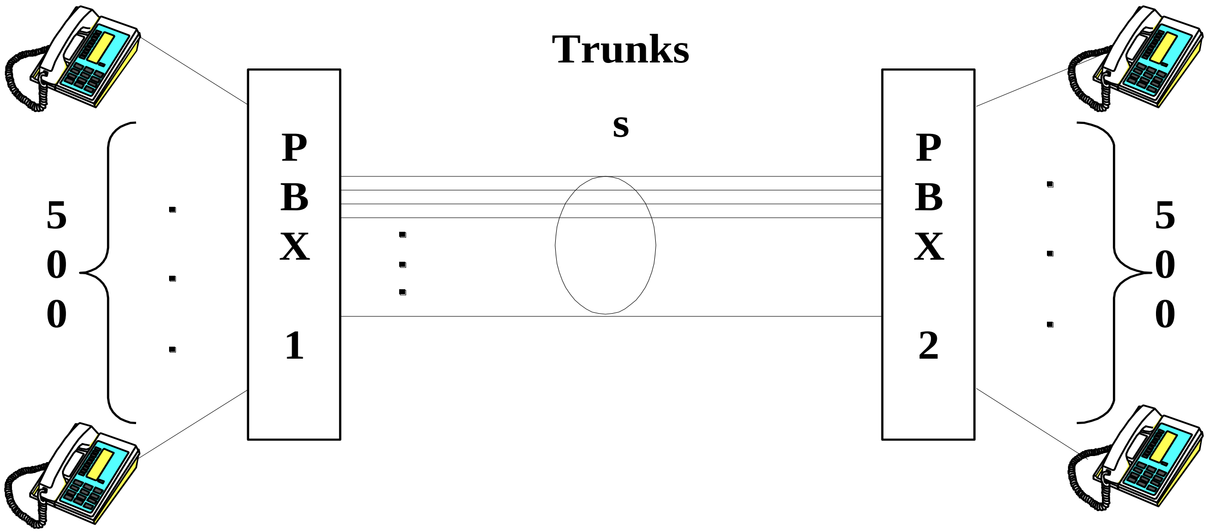


Διαφάνεια J. Virtamo, Helsinki University of Technology (HUT), Finland

Παραδείγματα εφαρμογής της ΘΤΚ (1)

- **Βέλτιστος υπολογισμός των διαστάσεων μιας ζεύξης**

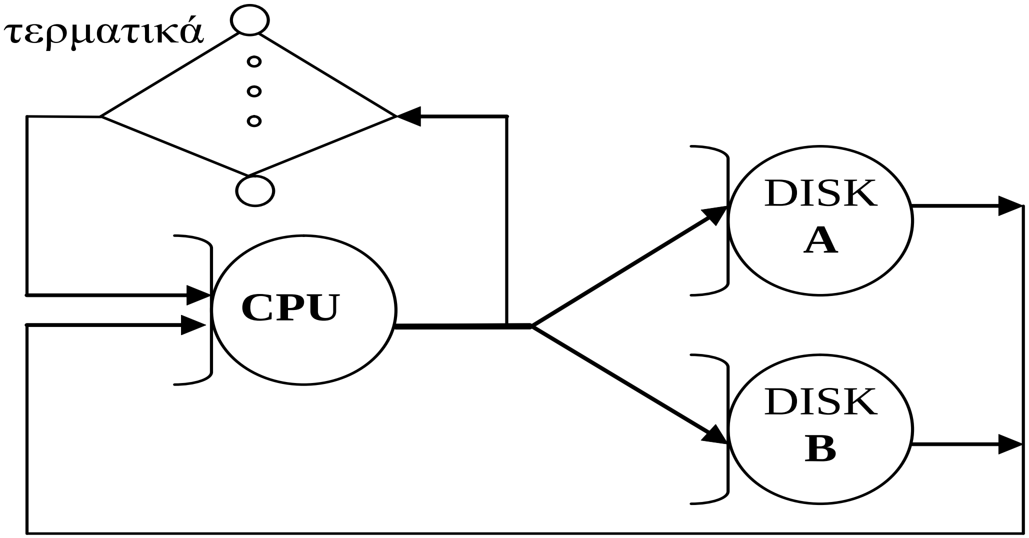
Ζητείται να υπολογίσουμε τον αριθμό s των γραμμών μεταξύ δύο ιδιωτικών συνδρομητικών κέντρων (PBX – Private Branch Exchange), κάθε ένα από τα οποία έχει 500 συνδρομητές.



Παραδείγματα εφαρμογής της ΘΤΚ (2)

- **Αξιοποίηση υποσυστημάτων συστήματος χρονομερισμού**

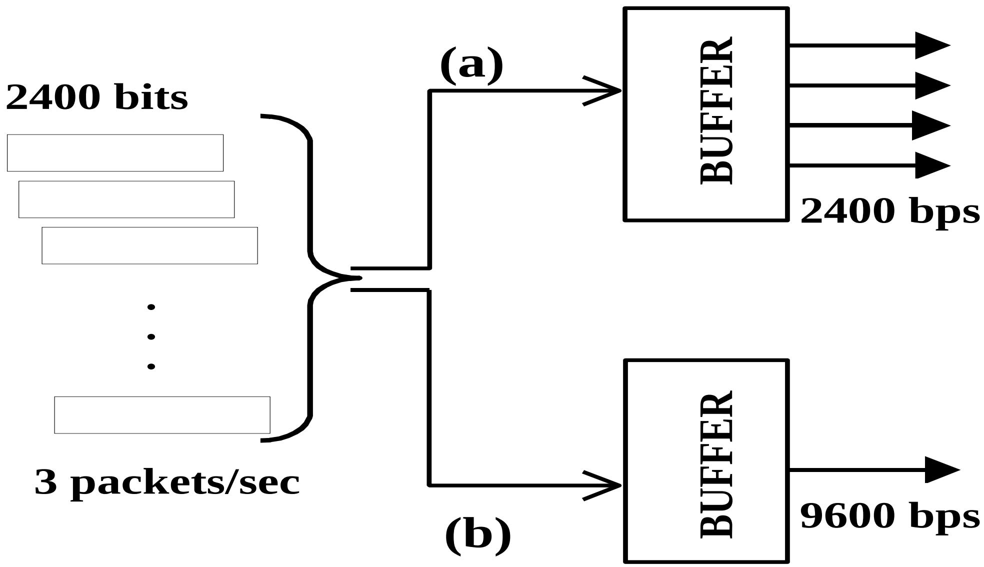
Ζητείται να υπολογίσουμε την αξιοποίηση των δίσκων Α, Β σε ένα σύστημα χρονομερισμού (timesharing) με μία CPU, 17 τερματικά και δύο δίσκους (Α, Β) στο οποίο η CPU σχεδιάζει τις επισκέψεις που θα κάνουν οι κλήσεις στους δύο δίσκους.



Παραδείγματα εφαρμογής της ΘΤΚ (3)

- **Αξιολόγηση «καλής» λειτουργίας**

Στο παρακάτω σύστημα, που εξυπηρετεί πακέτα σταθερού μεγέθους τα οποία φθάνουν τυχαία στον προσωρινό καταχωρητή, ζητείται να αποφασίσουμε αν είναι καλύτερο να έχουμε 4 γραμμές μετάδοσης με ταχύτητα 2400 bits/sec σε κάθε μία, ή, να έχουμε 1 μόνο γραμμή μετάδοσης με ταχύτητα 9600 bits/sec.



Παραδείγματα εφαρμογής της ΘΤΚ (4)

- Η διεκπεραιωτική ικανότητα δύο συστημάτων **για** δύο διαφορετικά φορτία κίνησης είναι:

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΦΟΡΤΙΟ #1	ΦΟΡΤΙΟ #2	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
Α	100%	50%	75%
Β	50%	100%	75%

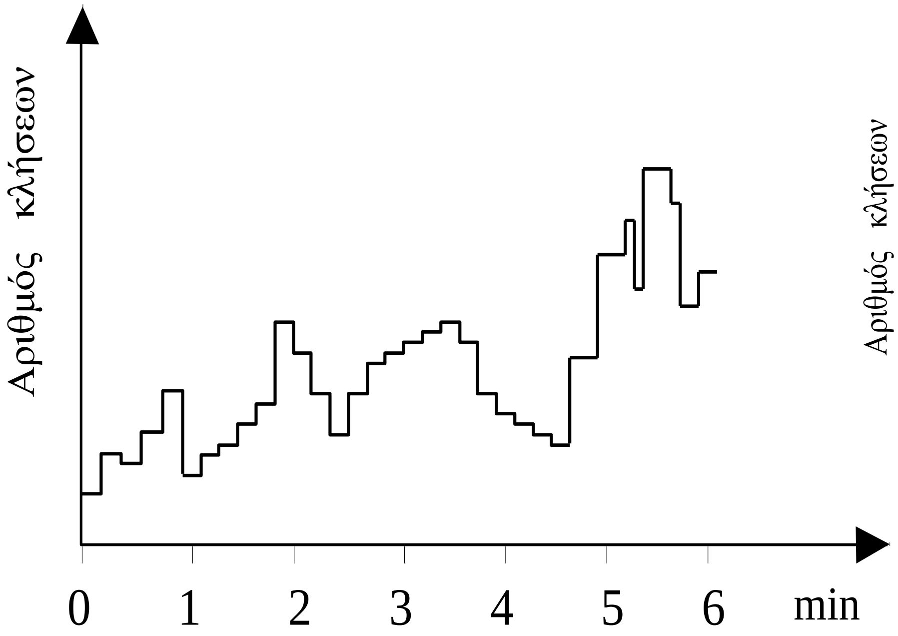
- Τα δύο συστήματα αξιολογούνται ως ισοδύναμα. Ένας αναλυτής όμως θα μπορούσε να παρουσιάσει ως καλύτερο το σύστημα Α, λαμβάνοντας ως βάση το σύστημα Β, και τους λόγους ΦορτίοΑ/ΦορτίοΒ:

ΣΥΣΤΗΜΑ	ΦΟΡΤΙΟ #1	ΦΟΡΤΙΟ #2	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
Α	2	0.5	1.25
Β	1	1	1

- Με βάση την μέση τιμή των λόγων, το σύστημα Α είναι καλύτερο. Ένας άλλος αναλυτής, λαμβάνοντας ως βάση το σύστημα Α, παρουσιάζει καλύτερο το σύστημα Β:

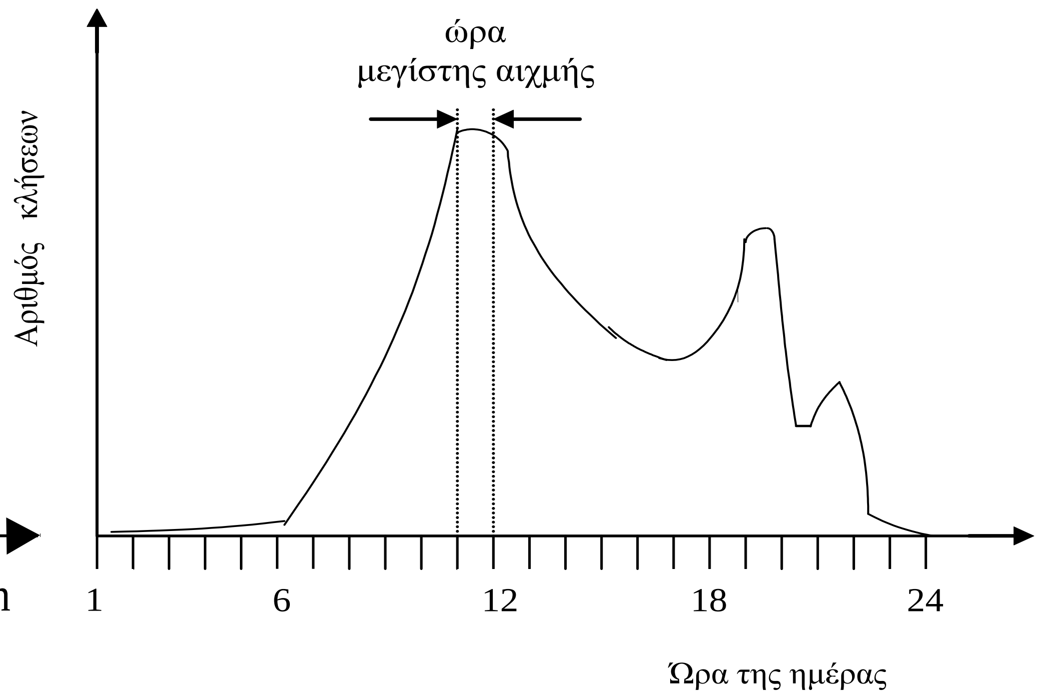
ΣΥΣΤΗΜΑ	ΦΟΡΤΙΟ #1	ΦΟΡΤΙΟ #2	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
Α	1	1	1
Β	0,5	2	1.25

Η φύση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως



Λεπτομερής μεταβολή της τηλεφωνικής κίνησης

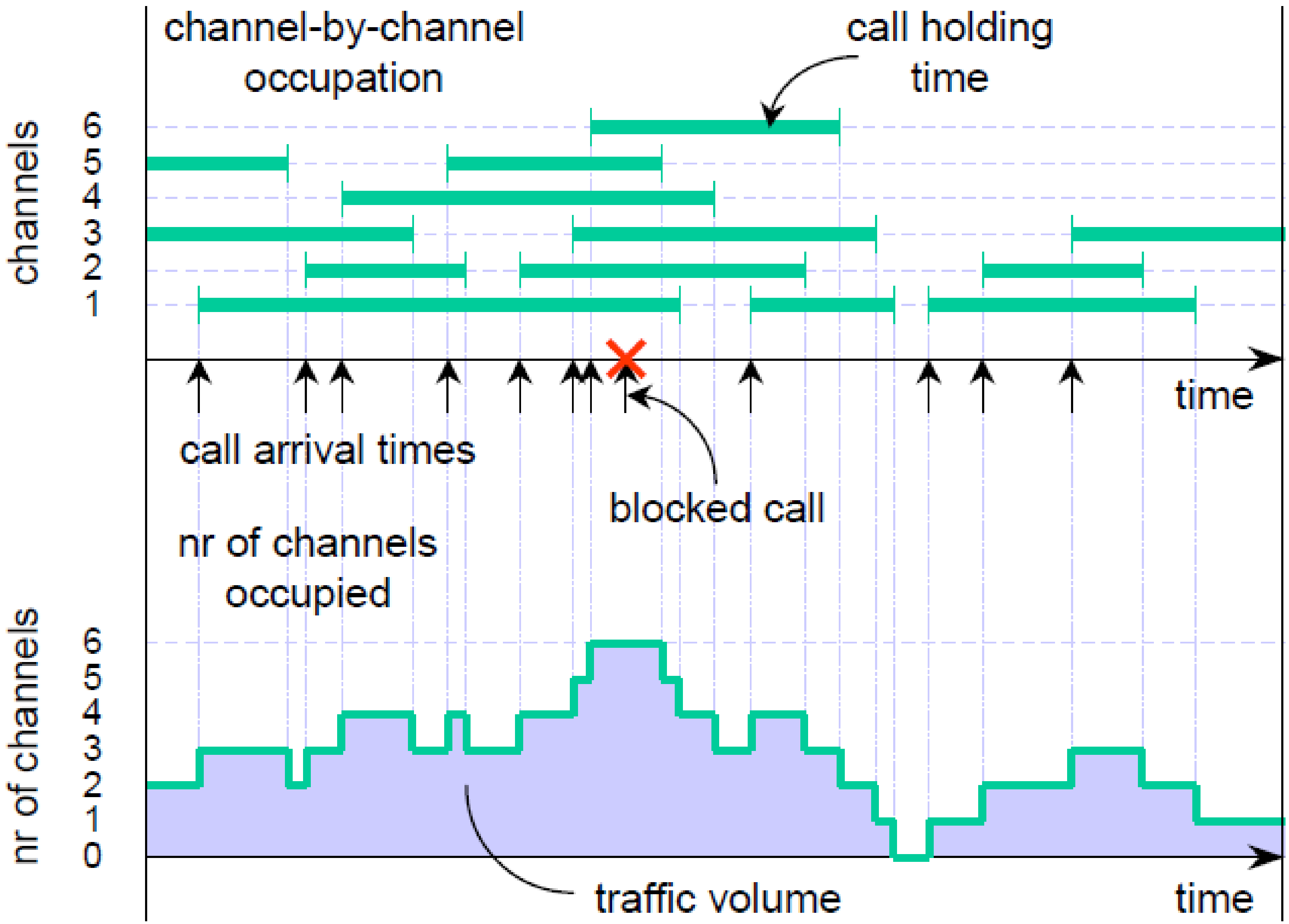
(ο αριθμός των κλήσεων μεταβάλλεται τυχαία, καθώς κλήσεις αρχίζουν και τελειώνουν τυχαία)



Μεταβολή της κίνησης κατά την διάρκεια μιας ημέρας (εικοσιτετραώρου)

(Ώρα μεγίστης αιχμής: η ώρα που αντιστοιχεί στην αιχμή των κλήσεων (κίνησης)

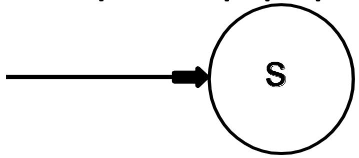
Η φύση της τηλεπικοινωνιακής κινήσεως (2)



Διαφάνεια J. Virtamo, Helsinki University of Technology (HUT), Finland

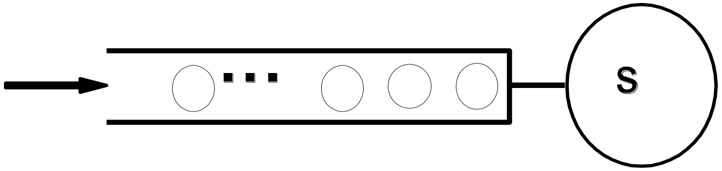
Βαθμός εξυπηρέτησης (1)

- **Σύστημα απωλειών (loss system):** Η εισερχόμενη κλήση μπλοκάρεται και εγκαταλείπει το σύστημα λόγω συμφόρησης.



Σύστημα Απωλειών

- **Σύστημα αναμονής (waiting or delay system):** Η εισερχόμενη κλήση περιμένει, λόγω συμφόρησης, για να συνδεθεί στο σύστημα.



Σύστημα αναμονής

- **Βαθμός εξυπηρέτησης (Grade Of Service – GOS):** Το ποσοστό των κλήσεων που χάνονται ή καθυστερούν να διεκπεραιωθούν λόγω συμφόρησης.

Βαθμός εξυπηρέτησης (2)

- Για ένα σύστημα απωλειών ο βαθμός εξυπηρέτησης Β ορίζεται ως:

$$B = \frac{\text{Συνολικός αριθμός χαμένων κλήσεων}}{\text{Συνολικός αριθμός προσφερθεισών κλήσεων}}$$

Από την σχέση αυτή, προκύπτει επίσης:

$$B = \frac{\text{Κίνηση που χάθηκε}}{\text{Κίνηση που προσφέρθηκε}}$$ ή

Β = *Ποσοστό χρόνου όπου υπάρχει συμφόρηση*, ή

Β = *Πιθανότητα συμφόρησης*, ή

Β = *Πιθανότητα ότι μία κλήση θα χαθεί λόγω συμφόρησης*

✓Επομένως, αν φορτίο κίνησης **α** προσφερθεί σε ζεύξη με **GOS=B**, η κίνηση που θα χαθεί είναι **α*Β** και η κίνηση που θα διεκπεραιωθεί είναι **α*(1-Β)**.

Βαθμός εξυπηρέτησης (3)

Ο βαθμός εξυπηρέτησης:

1. Καθορίζεται για την κίνηση κατά την ώρα αιχμής.
2. Είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδος (εξ’ ορισμού).
3. Όσο μεγαλύτερος είναι, τόσο χειρότερο είναι το σύστημα.
4. Δεν είναι ενιαίος για ολόκληρο το τηλεπικοινωνιακό σύστημα αλλά μεταβάλλεται στα διάφορα μέρη του (π.χ. διαφορετικό GOS στις αστικές ζεύξεις απ’ ότι στις διεθνείς ζεύξεις).

Το βασικό πρόβλημα των Τηλεπικοινωνιών

- Γνωστό και ως πρόβλημα διαστασιολόγησης (dimensioning problem), είναι ο υπολογισμός του μεγέθους ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος.

✓ Το πρόβλημα τίθεται ως:

*Δεδομένης της προσφερόμενης κινήσεως **α** και ενός επιθυμητού βαθμού εξυπηρέτησης **B** να ευρεθεί ο αριθμός των απαιτούμενων trunks **N**.*

✓ Το πρόβλημα αυτό είναι σύνθετο στην σημερινή εποχή, καθόσον τίθεται για δίκτυα που εξυπηρετούν διαφορετικά είδη κίνησης με διαφορετικό GOS.

Φορτίο κίνησης

- **Βασικοί ορισμοί**

α) *Κλήση (call) - Η απαίτηση για σύνδεση σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.*

β) *Διάρκεια κλήσης (holding time),* ***h*** *- Το χρονικό διάστημα που διαρκεί μια κλήση, γνωστό και ως χρόνος εξυπηρέτησης (service time).*

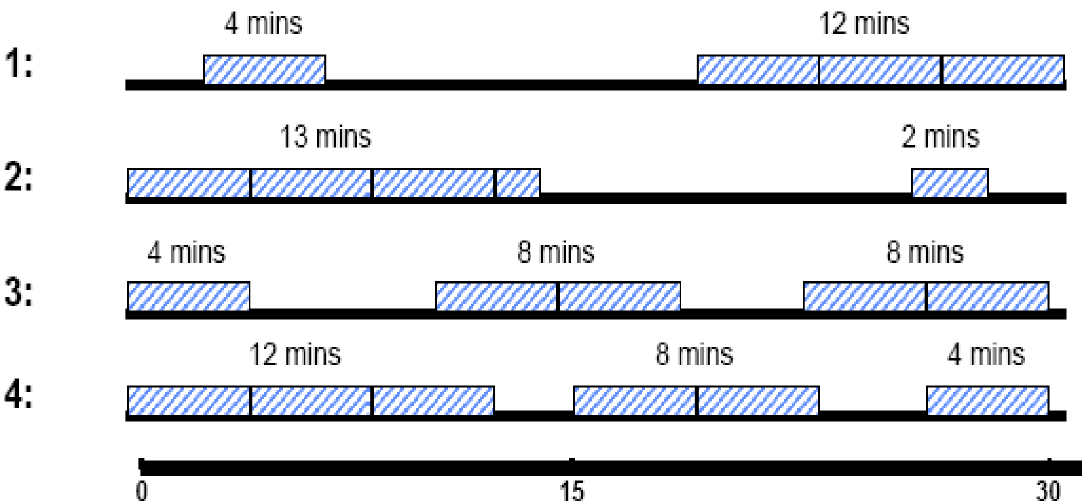
γ) *Φορτίο κίνησης (traffic load),* ***α*** *- Η συνολική διάρκεια όλων των κλήσεων εντός ενός χρονικού διαστήματος που λαμβάνεται ως μονάδα.*

✓ Από τον ορισμό, η τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι αδιάστατο μέγεθος! Προς τιμήν του Δανού μαθηματικού Erlang, χρησιμοποιούμε ως μονάδα φορτίου κίνησης το **Erlang (erl).**

Παράδειγμα Φορτίου κίνησης

- Σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα 4 γραμμών υπάρχουν 10 κλήσεις με χρόνους εξυπηρέτησης όπως φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Το φορτίο κίνησης, ***α***, υπολογίζεται ως:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{(4 + 12 + 13 + 2 + 4 + 8 + 8 + 12 + 8 + 4)\ mins\ /\ 30\ mins = 2.5\ erl}$$



Χρόνος σε λεπτά (mins)

✓Με βάση τον ορισμό του φορτίου κίνησης, μια γραμμή μεταφέρει 1 erl, αν είναι πλήρως κατειλημμένη για όλο το διάστημα παρατήρησης.

✓Το σύστημα των 4 γραμμών μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε φορτίο κίνησης μεταξύ των τιμών 0 και 4 erl.

Ιδιότητες του φορτίου κίνησης

1. *Αν* ***c*** *είναι ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα και* ***h*** *είναι η μέση διάρκειά τους, τότε το φορτίο κίνησης* ***α*** *δίδεται από την σχέση:* ***α = c h***
2. *Το φορτίο κίνησης ισούται προς τον αριθμό των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα εντός χρονικού διαστήματος ίσου προς την μέση τιμή της διάρκειάς των.*
3. *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται (ποσοστό του χρόνου που η γραμμή είναι κατειλημμένη). Επομένως μία γραμμή δεν μπορεί να μεταφέρει παρά μόνον 1 erl, το πολύ (αφού η μεγίστη τιμή πιθανότητος είναι 1).*
4. *Το φορτίο κίνησης που διεκπεραιώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης.*

Παράδειγμα χρήσης ιδιοτήτων

Έστω ότι έχουμε τις εξής μετρήσεις σε διαστήματα 5 λεπτών, κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής, που αφορούν τις κατειλημμένες γραμμές ενός συστήματος:

11, 13, 8, 10, 14, 12, 7, 9, 15, 17, 16, 12

Ποια είναι η διεκπεραιουμένη κίνηση;

<u>Απάντηση</u>

Υπολογίζουμε τότε ότι η διεκπεραιουμένη κίνηση θα ισούται με:

$$\frac{11+13+8+10+14+12+7+9+15+17+16+12}{12} = 12\text{erl}$$

Παράδειγμα – Βαθμός εξυπηρέτησης (1)

Σε μια τηλεπικοινωνιακή ζεύξη (σύστημα απωλειών), κατά την ώρα αιχμής προσφέρθηκαν 1200 κλήσεις και χάθηκαν (δεν διεκπεραιώθησαν) 12 απ’ αυτές. Αν η μέση διάρκεια των κλήσεων ήταν 60 sec (1 min):

(**a**) Πόσο φορτίο κίνησης προσφέρθηκε στην ζεύξη;

(**b**) Πόση κίνηση διεκπεραιώθηκε από την ζεύξη;

(**c**) Πόση κίνηση χάθηκε;

(**d**) Ποιος ο βαθμός εξυπηρέτησης της ζεύξης;

Παράδειγμα – Βαθμός εξυπηρέτησης (2)

Λύση

(**a**) Το προσφερόμενο φορτίο α στην ζεύξη, υπολογίζεται βάσει της σχέσης α = λ h:

$$\alpha = (1200/60) \text{ κλήσεις/min} * 1 \text{ min} = 20 \text{ erl}$$

(**b**) Η διεκπεραιωμένη κίνηση α_c υπολογίζεται από την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης:

α_c= ch=(1200–12)/60 κλήσεις/min*1 min=19.8 erl

(**c**) Η κίνηση που χάθηκε α_{loss} υπολογίζεται ως:

$$\alpha_{loss} = \alpha - \alpha_c = 20 - 19.8 \text{ erl} = 0.2 \text{ erl}$$

Ή, από τον αριθμό των κλήσεων που δεν εξυπηρετήθηκαν εντός του χρονικού διαστήματος παρατήρησης του συστήματος, επί την μέση διάρκεια που θα είχαν αν εξυπηρετούντο:

$$\alpha_{loss} = (12/60) \text{ κλήσεις/min} * 1 \text{ min} = 0.2 \text{ erl}$$

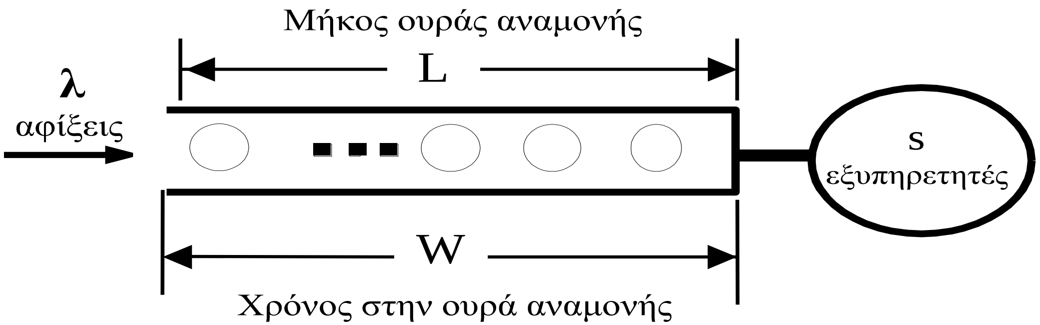
(**d**) Ο βαθμός εξυπηρέτησης, Β, της ζεύξης υπολογίζεται ως το ποσοστό των κλήσεων που χάθηκαν:

B= (κλήσεις που χάθηκαν)/(συνολικές κλήσεις) = 12/1200 = 0.01 =1.0 %.

Ο Νόμος του Little και η επέκτασή του

- Έστω το παρακάτω σύστημα αναμονής όπου λ είναι ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων, L η μέση τιμή των κλήσεων στην ουρά αναμονής και W ο μέσος όρος του χρόνου αναμονής στην ουρά. Σύμφωνα με τον νόμο του Little, τα μεγέθη L, λ και W συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$L = \lambda W$$



- Ο χρόνος παραμονής μιας κλήσεως στο σύστημα (system time) ισούται με το άθροισμα του χρόνου αναμονής της κλήσεως στην ουρά και του χρόνου εξυπηρετήσεώς της.
- Η μέση τιμή, Τ, του χρόνου παραμονής των κλήσεων στο σύστημα καλείται **χρόνος απόκρισης του συστήματος (response time).**
- Αν Ν είναι ο μέσος αριθμός κλήσεων στο σύστημα, τότε κατ' επέκταση του νόμου του Little ισχύει ότι: $N = \lambda\, T$

Παράδειγμα εφαρμογής του νόμου του Little

- Έστω ότι πελάτες προσέρχονται σε μια τράπεζα με μέσο ρυθμό 30 πελάτες ανά ώρα. Όταν όλοι οι ταμίες είναι απασχολημένοι σχηματίζεται ουρά αναμονής η οποία έχει μέσο μήκος 3.0 πελάτες. Ζητείται:

1) Πόση ώρα, κατά μέσο όρο, χρειάζεται να παραμείνει ένας πελάτης στην ουρά;
2) Αν ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη από κάποιον ταμία είναι 6 min κατά μέσο όρο, να υπολογιστεί ο συνολικός αριθμός πελατών που βρίσκονται στην τράπεζα κατά μέσο όρο;

Παράδειγμα εφαρμογής του νόμου του Little -Λύση

1) Ισχύει ότι $L = 3.0$ και $\lambda = 30/60\ min^{-1} = 0.5\ min^{-1}$. Άρα, από τον νόμο του Little, ο μέσος όρος του χρόνου W αναμονής στην ουρά είναι

   $W = L / \lambda = (3.0 / 0.5)\ min = 6\ min.$

2) Βάσει της επέκτασης του νόμου του Little, ο συνολικός αριθμός N πελατών στην τράπεζα είναι $N = \lambda\ T$, όπου $T = W + h = (6 + 6)\ min = 12$ min.

   Άρα, $N = 0.5*12 = 6.0$ πελάτες.

- Η τιμή του N μπορεί να υπολογισθεί εναλλακτικά ως εξής: Αφού $h = 6$ min και $\lambda = 0.5\ mim^{-1}$, η διεκπεραιουμένη κίνηση είναι $\alpha = \lambda\ h = 3$ erl, το οποίο σημαίνει ότι ο αριθμός των απασχολημένων ταμιών, άρα και των εξυπηρετουμένων πελατών (ένας ταμίας εξυπηρετεί έναν πελάτη), κατά μέσο όρο είναι 3.

- Επομένως, $N = L + \alpha = (3.0 + 3)$ πελάτες = 6.0 πελάτες.

Βασικό μοντέλο άφιξης κλήσεων

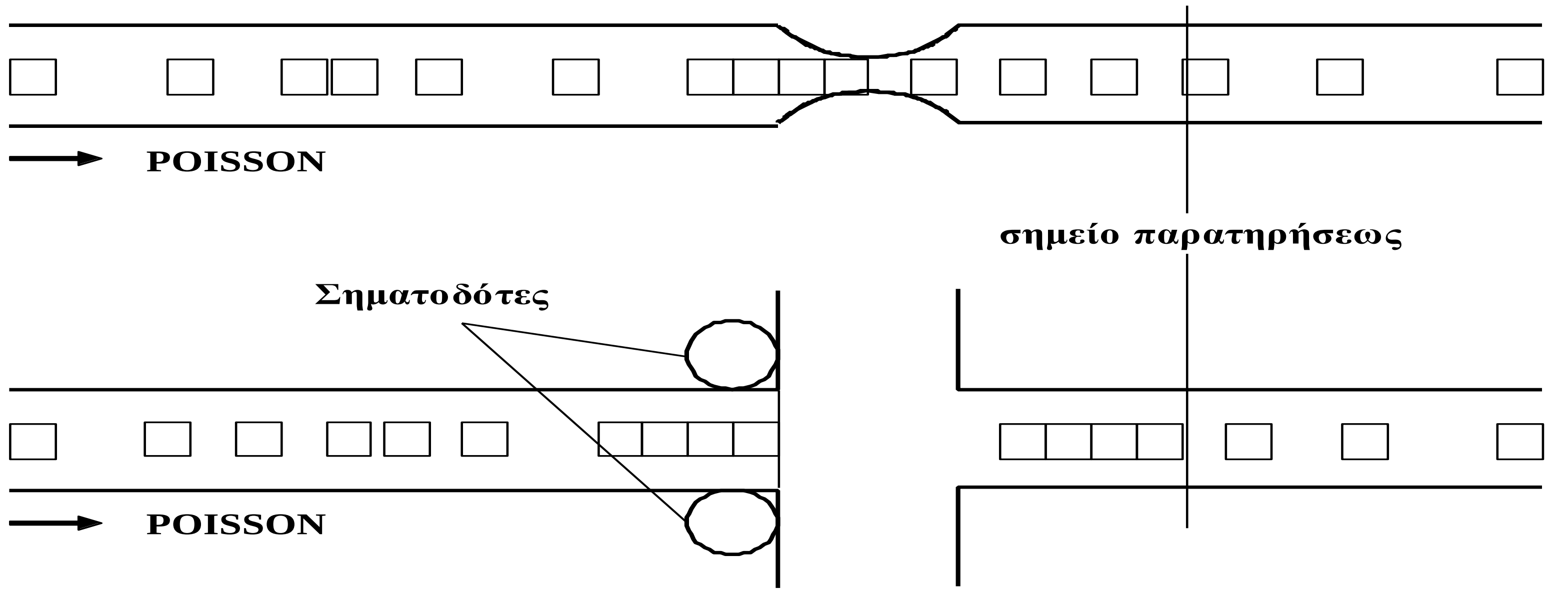
Τυχαίος τρόπος γεννήσεως (άφιξης) μιας κλήσης

Η άφιξη μιας κλήσης σε κάποιο σύστημα καλείται **τυχαία** όταν:

1. *Η πιθανότητα $P_1(\Delta t)$ ότι μια κλήση θα γεννηθεί σε χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t]$ τείνει στο $\lambda\Delta t$, ανεξάρτητα από τον χρόνο t, όπου λ είναι σταθερός αριθμός.*
2. *Η πιθανότητα $P_{2+}(\Delta t)$ ότι δύο ή περισσότερες κλήσεις γεννώνται εντός του χρονικού διαστήματος $(t, t+\Delta t]$ τείνει στο μηδέν.*
3. *Οι κλήσεις γεννώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.*

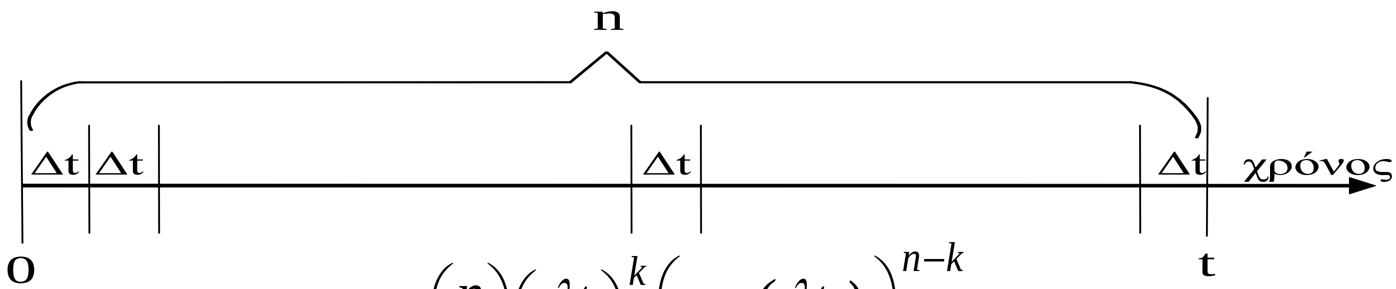
✓ Η παραπάνω διαδικασία άφιξης κλήσεων καλείται επίσης **Poisson.**

Διαταραχή της τυχαίας άφιξης σε ένα σημείο



Κατανομή Poisson

Μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της πιθανότητα $P_k(t)$, ότι k κλήσεις γεννώνται εντός του χρονικού διαστήματος (0,t] όπου t = nΔt.



$$P_k(t) = \lim_{(n\to\infty)} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{(\lambda t)}{n}\right)^{n-k}$$

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad P_0(t) = e^{-\lambda t} \qquad A(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

κατανομή Poisson (Poisson distribution)
με <u>μέση τιμή</u> λt,
το λ καλείται **ρυθμός άφιξης των κλήσεων (arrival rate)**

Πιθανότητα ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων **(interarrival time)** να μην υπερβεί την τιμή *t*

Εκθετική κατανομή
με μέση τιμή λ^{-1}

Βασικό μοντέλο εξυπηρέτησης κλήσεων

Τυχαίος τερματισμός κλήσης

Αρχίζοντας την μέτρηση του χρόνου από την στιγμή που η κλήση αρχίζει να εξυπηρετείται, η πιθανότητα να τερματίσει **τυχαία** η κλήση αυτή σε διάστημα (t, t+Δt) είναι $\mu\Delta t$.

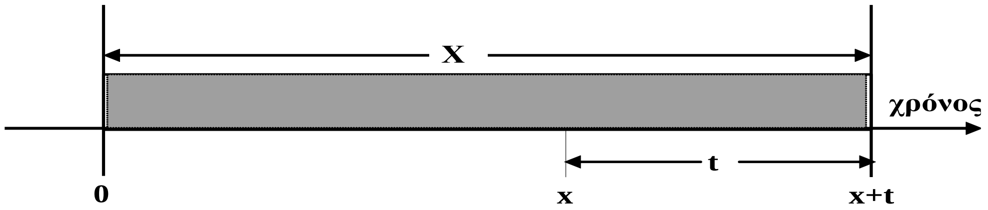
Έστω H(t) η πιθανότητα ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από t, δηλαδή η πιθανότητα ότι η κλήση δεν θα τερματιστεί σε διάστημα $[0,t]$. Τότε:

$$H(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\mu t}{n}\right)^n = e^{-\mu t}$$

Άρα ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $\boldsymbol{\mu^{-1}}$, όπου το μ ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης (service rate).**

- ✓ <u>Από την 1η ιδιότητα του φορτίου κίνησης (α = c h):</u> **α = λ/μ**

Η Μαρκοβιανή ιδιότητα



Θεωρούμε την χρονική διάρκεια X ενός φαινομένου. Εάν το X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ^{-1}, τότε η πιθανότητα ότι το φαινόμενο συνεχίζεται μετά από την χρονική στιγμή x, εκφράζεται από την σχέση:

$$P (X > x) = e^{-\mu x}$$

$$P(X > x+t \mid X > x) = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu x}} = e^{-\mu t} = P(X > t)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη του x.

Η στοχαστική συμπεριφορά του φαινομένου μετά από χρόνο *x* (μέλλον) εξαρτάται μόνο από την κατάσταση κατά την παρούσα χρονική στιγμή *x* και όχι από την εξέλιξη του φαινομένου πριν την στιγμή αυτή (παρελθόν).

✓ Αυτό καλείται **Μαρκοβιανή ιδιότητα (Markov or memoryless property)**.

✓ Μόνο η εκθετική κατανομή (από τις συνεχείς κατανομές) έχει την ιδιότητα της αμνησίας!

Τέλος Ενότητας