ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΔΙΑΛΕΞΗ $6^{η}$

1. Μερική παραγώγιση

Έστω πολυμεταβλητή συνάρτηση y=f(**x**), με το διάνυσμα **x** να περιλαμβάνει n ανεξάρτητες μεταβλητές, τις $x_1, x_2, \ldots x_n$.
Η μερική παράγωγος της y ως προς τη μεταβλητή x_i συμβολίζεται με:

$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{dy}{dx_i}|_{dx_j=0,\ j\neq i}$ ή με $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$.

και λαμβάνεται θεωρώντας ότι μόνο η μεταβλητή x_i μεταβάλλεται ενώ όλες οι υπόλοιπες x_j με $j\neq i$ θεωρούνται σταθερές.

Παράδειγμα:

Έστω συνάρτηση z (y,x) = $\ln(x^2+2y^2+15)$.

Μερική παράγωγος ως προς y: $\frac{\partial z(y,x)}{\partial y} = \frac{\partial(\ln(x^2+2y^2+15))}{\partial y} = \frac{4y}{x^2+2y^2+15}$

Μερική παράγωγος ως προς x: $\frac{\partial z(y,x)}{\partial x} = \frac{\partial(\ln(x^2+2y^2+15))}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+2y^2+15}$

Παράδειγμα συνάρτησης παραγωγής:

Έστω συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb Douglas $Q=f(K^{\alpha}L^{\beta}) = A\, K^{\alpha}L^{\beta}$.

Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου και της εργασίας είναι το επιπλέον προϊόν που παράγεται αν απασχολήσουμε μια επιπλέον μονάδα κεφαλαίου ή εργασίας, αντίστοιχα, ενώ οι υπόλοιπες εισροές παραμένουν σταθερές. Βρίσκεται μέσω της μερικής παραγώγισης της συνάρτησης παραγωγής ως προς K και L, αντίστοιχα:

Οριακό προϊόν του κεφαλαίου: $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$

Οριακό προϊόν της εργασίας: $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$

Παράδειγμα συνάρτησης χρησιμότητας:

Έστω συνάρτηση χρησιμότητας $U=f(x, y)$

Η οριακή χρησιμότητα κάθε αγαθού *x, y* ορίζεται ως η επιπλέον χρησιμότητα που απολαμβάνει ο καταναλωτής από μια επιπλέον μονάδα του ενός αγαθού κρατώντας την κατανάλωση του άλλου αγαθού σταθερή.

Οριακή χρησιμότητα x: $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x}$

Οριακή χρησιμότητα y: $MU_y = \frac{\partial U}{\partial y}$

2. **Διάνυσμα κλίσης**

Τις μερικές παραγώγους μιας συνάρτησης y=f(**x**) τις τοποθετούμε συχνά μαζί σε ένα διάνυσμα γραμμής ή στήλης το οποίο συμβολίζεται ως $\frac{\partial y}{\partial x}$ ή ∇y ή ∇*f*.

Αναλυτικά: $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$ ή $\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης της $U(y,x) = y^a x^b$:

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a y^{a-1} x^b \\ b y^a x^{b-1} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε το διάνυσμα κλίσης της $Q(K,L) = AK^2 + bL$:

$$\nabla Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial K} \\ \frac{\partial Q}{\partial L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2AK \\ b \end{pmatrix}$$

Γενίκευση με n συναρτήσεις:

Έστω συναρτήσεις $y_1, y_2, \ldots y_n$ με n ανεξάρτητες μεταβλητές τις $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$y_1 = f^1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y_2 = f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

.

.

.

$y_n = f^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Η **Ιακωβιανή μήτρα** *J* του παραπάνω συστήματος και η **Ιακωβιανή ορίζουσα,** |*J*| είναι, αντίστοιχα:

$$J = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Ο έλεγχος της συναρτησιακής εξάρτησης των συναρτήσεων ενός συστήματος n εξισώσεων y_1, y_2,…y_n με n μεταβλητές x_1, x_2,…x_n στηρίζεται στο εάν η Ιακωβιανή ορίζουσα είναι μηδέν ή όχι. Για παράδειγμα οι επόμενες δύο εξισώσεις:

$y_1 = \alpha x + 5z$

$y_2 = 6\alpha x + 30z$

είναι γραμμικώς εξαρτημένες αφού η y_2 είναι 6 φορές η y_1.

Αποδεικνύεται ότι Ιακωβιανή ορίζουσα είναι $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x} & \frac{\partial y_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 5 \\ 6a & 30 \end{vmatrix} = 0$

3. Ολικό διαφορικό

Έστω η συνάρτηση $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, ο τύπος του ολικού διαφορικού της είναι:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n$$

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση της ζήτησης χρήματος $\frac{M}{P}$ όπου η ζήτηση χρήματος Μ έχει αποπληθωριστεί με το επίπεδο των τιμών P. Σύμφωνα με την οικονομική θεωρία η συνάρτηση ζήτησης χρήματος εξαρτάται θετικά από το εισόδημα Y (ζήτηση για συναλλακτικούς σκοπούς) και αρνητικά από το επιτόκιο r: $\frac{M}{P} = L(Y, r)$.

Η συνολική μεταβολή της ζήτηση χρήματος δίνεται με το ολικό διαφορικό της $\frac{M}{P}$:

$$d\frac{M}{P} = \frac{\partial L}{\partial Y}dY + \frac{\partial L}{\partial r}dr$$

Σε περίπτωση όπου το εισόδημα Y παραμένει αμετάβλητο, $dY = 0$, τότε απλά έχουμε μερική παραγώγιση ως προς r:

$$d\frac{M}{P} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Y}} dY + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}} dr \rightarrow d\frac{M}{P} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{Y}} * 0 + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}} dr \rightarrow$$

$$\frac{d\frac{M}{P}}{dr} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το ολικό διαφορικό της συνάρτησης χρησιμότητας U δύο αγαθών x_1, x_2 όπου: $u = U(x_1, x_2) = k\ln x_1 + (1-k)\, x_1^a\, x_2^b$:

Ο τύπος του ολικού διαφορικού είναι:

$du = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2} dx_2 = \left(\frac{k}{x_1} + a(1-k)x_1^{a-1}\, x_2^b\right) dx_1 + \left(b(1-k)x_1^a\, x_2^{b-1}\right) dx_2$

Ολική παράγωγος

Έστω y = f (x, z) όπου x= g(z).

Τότε: y = f (g(z), z)   και το ολικό διαφορικό της y είναι:

$$\mathrm{dy} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z} dz \;\rightarrow\; \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dz}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dz}} + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z}$$

δηλαδή το **ολικό αποτέλεσμα** $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dz}}$ αναλύεται ως το άθροισμα του έμμεσου αποτελέσματος $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dz}}$ (αλυσωτός κανόνας καθώς η x εξαρτάται από το z) και του άμεσου ή αυτόνομου αποτελέσματος από την μεταβολή του z: $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial z}$.

4. Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Εάν μια συνάρτηση βρίσκεται στην μορφή της εξίσωσης $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ και δεν δίνεται καθαρά η σχέση της εξαρτημένης y και των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots x_n$ τότε λέμε ότι βρίσκεται σε **πεπλεγμένη μορφή**. Το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων εγγυάται την **επιλυσιμότητα** μιας πεπλεγμένης μορφής όταν είναι δύσκολο να επιλύσουμε την $F(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ ώστε να καταλήξουμε στην $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ προκειμένου να μπορεί να βρεθεί η μερική παράγωγος της y ως προς x_i $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial x_i}$.

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Εάν η συνάρτηση F $(y, x_1, x_2,\dots x_n)$ είναι συνεχής και υπάρχει σημείο $z_0 = (y_0, x_0)$ τέτοιο ώστε: 1. $F(z_0) = 0$, 2. οι μερικές παράγωγοι $F_y, F_1,.., F_n$ είναι συνεχείς σε μια γειτνίαση του σημείου z_0 και 3. $F_y(z_0) \neq 0$ τότε υπάρχει περιοχή του x_0 και συνάρτηση $y = f(x)$ τέτοια ώστε: α) $y_0 = f(x_0)$, β) $F(x, f(x)) = 0$ γ) $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_y}$.

Κάνοντας χρήση του ολικού διαφορικού:

$$F_y dy + F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = d(0) \rightarrow$$

$$F_y dy + F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = 0 \rightarrow$$

(όταν $dx_j = 0$, $\forall j \neq i$)

$$F_y dy + F_i dx_i = 0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_i}{F_y}.$$

Παράδειγμα

Έστω συνάρτηση σε πεπλεγμένη μορφή που δίνεται από:

$F(y,x,w) = y^3x^2 + w^3 + yxw - 3 = 0$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την $\frac{\partial y}{\partial x}$ και την $\frac{\partial y}{\partial w}$.

Λύση: Η συγκεκριμένη μορφή είναι δύσκολο να επιλυθεί σε μια μορφή $y = f(x,w)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους F_y, F_x, F_w:

$F_y = 3y^2x^2 + xw$

$F_x = 2y^3x + yw$

$F_w = 3w^2 + yx$

και βρίσκουμε $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2y^3x+yw}{3y^2x^2+xw}$ και $\frac{\partial y}{\partial w} = -\frac{F_w}{F_y} = -\frac{3w^2+yx}{3y^2x^2+xw}$

Παράδειγμα συνάρτηση παραγωγής

Έστω συνάρτηση παραγωγής $F(Q, K, L) = 0$. Αν ισχύει το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων τότε ορίζεται η συνάρτηση παραγωγής ως $Q = f(K,L)$.

<u>Ερώτημα:</u> Βρείτε το οριακό προϊόν του κεφαλαίου MP_K και της εργασίας MP_L. Βρείτε, επίσης, τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης κεφαλαίου K και εργασίας L.

<u>Απάντηση:</u> Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου MP_K είναι η πρώτη μερική παράγωγος του παραγόμενου προϊόντος Q ως προς το κεφάλαιο K: $\frac{\partial Q}{\partial K}$. Εφόσον η συνάρτηση

παραγωγής είναι σε πεπλεγμένη μορφή F(Q, K, L) = 0 και ισχύει το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων τότε ισχύει ότι $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = -\frac{F_K}{F_Q}$. Ομοίως, το οριακό προϊόν της εργασίας $MP_L=\frac{\partial Q}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_Q}$.

Ο οριακός λόγος τεχνικής υποκατάστασης $MRTS_{K,L}$ μας δείχνει πόσο πρέπει να μειωθεί το κεφάλαιο K όταν αυξηθεί η εργασία L ώστε το συνολικό παραγόμενο προϊόν Q να παραμείνει σταθερό. Δίνεται από την μερική παράγωγο του κεφαλαίου K ως προς την εργασία L: $\frac{\partial K}{\partial L}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων ισχύει ότι: $MRTS_{K,L} = \frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_K} = -\frac{MP_L}{MP_K}$.

Επίσης, χρησιμοποιώντας το ολικό διαφορικό πάνω στην καμπύλη ίσου προϊόντος (ισχύει ότι dQ = 0):

$$F_Q dQ + F_L dL + F_K dK = 0 \rightarrow$$

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K} \rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_K}$$

Παράδειγμα συνάρτηση χρησιμότητας

Αντίστοιχα με τις καμπύλες ίσου προϊόντος στη θεωρία παραγωγής έχουμε τις καμπύλες αδιαφορίας στη θεωρία καταναλωτή. Αντί για συνάρτηση παραγωγής Q = f(K,L) έχουμε συνάρτηση χρησιμότητας U(x,y) όπου οι συνδυασμοί κατανάλωσης δύο αγαθών x,y πάνω σε μια καμπύλη αδιαφορίας (dU = 0, δηλαδή δεν μεταβάλλεται η συνολική ευημερία) αποδίδουν το ίδιο επίπεδο χρησιμότητας και επομένως ο καταναλωτής είναι αδιάφορος σχετικά με τον ποιο συνδυασμό αγαθών x,y θα καταναλώσει.

Κατά αντιστοιχία με τον οριακό λόγο τεχνικής υποκατάστασης $MRTS_{K,L}$ στη θεωρία παραγωγής ορίζεται ο οριακός λόγος υποκατάστασης $MRS_{y,x}$ του αγαθού x με το αγαθό y που είναι η ποσότητα του x που ο καταναλωτής είναι διαθέσιμος να υποκαταστήσει με ποσότητα του αγαθού y παραμένοντας στην ίδια καμπύλη αδιαφορίας (χωρίς να μεταβάλλει το συνολικό επίπεδο της χρησιμότητάς του): $MRS_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{U_x}{U_y} = -\frac{MU_x}{MU_y}$.

Παράδειγμα

Βρείτε τον οριακό λόγο υποκατάστασης $MRS_{y,x}$ για τη συνάρτηση χρησιμότητας u= $U(x,y) = x^a y^\beta$:

Απάντηση: $MRS_{y,x} = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{MU_x}{MU_y} = -\frac{\alpha x^{a-1}y^{\beta}}{\beta x^{a}y^{\beta-1}} = -\frac{a}{\beta}*\frac{y}{x}$

Παράδειγμα συγκριτική στατική ανάλυση σε πρόβλημα βελτιστοποίησης

Έστω συνάρτηση παραγωγής Q(L) με οριακό προϊόν εργασίας MP_L θετικό (> 0) με φθίνουσες αποδόσεις, δηλαδή η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης παραγωγής Q ως προς L $Q_{LL}<0$. Έστω p η τιμή του προϊόντος, ενώ η επιχείρηση έχει ως σκοπό της τη μεγιστοποίηση του κέρδους (έσοδα – κόστος): Π = p* Q(L) – wL, όπου w ο μισθός που πληρώνονται οι L εργαζόμενοι που χρησιμοποιούνται για να παραχθεί το προϊόν Q. Ζητείται να προβούμε σε συγκριτική στατική ανάλυση της ζήτησης εργασίας ως προς το μισθό.

Απάντηση: Εφόσον ζητείται να προβούμε σε συγκριτική στατική ανάλυση της ζήτησης εργασίας ως προς το μισθό, αυτό που μας ενδιαφέρει να βρούμε είναι το πρόσημο της μερικής παραγώγου $\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{w}}$ όπου L^* είναι η ζήτηση εργασίας. Η συνθήκη πρώτης τάξης για τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους μας δίνει ότι:

$\frac{\partial \Pi}{\partial L}=0 \rightarrow p^* Q_L - w = 0.$

Λαμβάνουμε την πεπλεγμένη μορφή: $F(L, w, p) = p^* Q_L - w = 0$ που ικανοποιείται για $L = L^*$ δηλαδή $F(L^*, w, p) = 0$.

Η μερική παράγωγος της F(L, w, p) ως προς L είναι $F_L = \frac{\partial F}{\partial L} = pQ_{LL} < 0$.

Η μερική παράγωγος της F(L, w, p) ως προς το μισθό w είναι $F_w = \frac{\partial F}{\partial w} = -1$.

Επομένως $\frac{\partial L^*}{\partial \mathrm{w}} = -\frac{F_w}{F_{L^*}} = -\frac{-1}{\mathrm{p}Q^*_{LL}} = \frac{1}{\mathrm{p}Q^*_{LL}} < 0$, δηλαδή η αύξηση του μισθού w οδηγεί σε μείωση της ζήτηση εργασίας.

5. Πεπλεγμένες εξισώσεις και συστήματα

Έστω ένα σύστημα n πεπλεγμένων εξισώσεων ως προς n ενδογενείς μεταβλητές y:

$F^1(y_1,\dots, y_n, x_1,\dots, x_m) = 0$

$F^2(y_1,\dots, y_n, x_1,\dots, x_m) = 0$

$F^n(y_1,\dots, y_n, x_1,\dots, x_m) = 0$

όπου $y_1,..., y_n$ είναι n ενδογενείς μεταβλητές και $x_1,..., x_m$ m εξωγενείς μεταβλητές. Το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης γενικεύεται σε αυτή την περίπτωση υπό την προϋπόθεση της μη μηδενικότητας της Ιακωβιανής ορίζουσας:

$$|J| = \left|\frac{\boldsymbol{\partial F}}{\boldsymbol{\partial y}}\right| \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Σε αυτή την περίπτωση ορίζονται οι ανηγμένες μορφές $f^1,\ldots,f^n$ σε ένα σημείο y_0, x_0 που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$y_1 = f^1\,(x_1,..., x_m)$

$y_2 = f^2\,(x_1,..., x_m)$

.

.

.

$y_n = f^n\,(x_1,..., x_m)$

και ισχύει (συγκριτική στατική ανάλυση) ότι $J\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$ δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{\partial F^{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F^n}{\partial y_n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial x_i} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial x_i} \\ \vdots \\ -\frac{\partial F^n}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

Οπότε έχουμε ότι: $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \frac{|J_j|}{|J|}$.

Παράδειγμα:

Έστω μακροοικονομικό υπόδειγμα τριών εξισώσεων (Y εισόδημα, C κατανάλωση, T έσοδα από φόρους, G_0 δημόσιες δαπάνες, I_0 συνολική επένδυση, t συντελεστής φορολογίας εισοδήματος):

$Y = C + I_0 + G_0 \rightarrow Y - C - I_0 - G_0 = 0, \quad F^1(Y, C, T,..) = 0$

$C = \alpha + b(Y-T) \rightarrow C - \alpha - b(Y-T) = 0, \quad F^2(Y, C, T,..) = 0$

$T = \gamma + tY \rightarrow T - \gamma - tY = 0, \qquad F^3(Y, C, T,..) = 0$

Ερώτημα συγκριτικής στατικής ανάλυσης: να υπολογίσετε το μέγεθος της μεταβολής στο εισόδημα Y αλλά και στα φορολογικά έσοδα T όταν μεταβληθούν οι δημόσιες δαπάνες G_0, δηλαδή βρείτε τα $\frac{\partial Y}{\partial G_0}, \frac{\partial T}{\partial G_0}$.

Απάντηση: Από τα συστήματα πεπλεγμένων ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial T} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial T} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial T} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial C}{\partial G_0} \\ \frac{\partial T}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F^1}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F^2}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F^3}{\partial G_0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -b & 1 & b \\ -t & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial C}{\partial G_0} \\ \frac{\partial T}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα $|J| = 1\text{-}b(1\text{-}t) \neq 0$ οπότε η λύση Cramer δίνει:

$$\frac{\partial Y}{\partial G_0} = \frac{|J_1|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1-\mathrm{b}(1-\mathrm{t})} = \frac{1}{1-\mathrm{b}(1-\mathrm{t})} > 1 \text{ και}$$

$$\frac{\partial T}{\partial G_0} = \frac{|J_3|}{|J|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -b & 1 & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{vmatrix}}{1-\mathrm{b}(1-\mathrm{t})} = \frac{t}{1-\mathrm{b}(1-\mathrm{t})} < 1.$$

Βιβλιογραφία

Ιωάννης Βενέτης, 2021, Σημειώσεις Μαθηματικά για Οικονομολόγους ΙΙ Διάλεξη 5, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Σχολή Οικονομικών Επιστημών και Διοίκησης Επιχειρήσεων