ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 8^{O}

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

Άσκηση 1

Έστω οι συναρτήσεις ζήτησης $P_x = 50 - 2x$ για το προϊόν X και $P_y = 30 - 2y$ για το προϊόν Y. Η συνολική συνάρτηση κόστους και για τα δύο αγαθά είναι $TC = x^2 + 2xy + y^2 + 20$. Έστω ότι η αρχική παραγωγή των X και Y αυξάνεται κατά 8 μονάδες. Να βρείτε τις ποσότητες των X και Y που μεγιστοποιούν το κέρδος καθώς και το μέγιστο κέρδος.

Έσοδα: $TR(x,y) = P_x X + P_y Y = 50x - 2x^2 + 30y - y^2$

Κόστος: $TC(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 20$

Κέρδος: $\Pi(x,y) = TR(x,y) - TC(x,y) = -3x^2 - 2xy - 2y^2 + 50x + 30y - 20$

1^{o} Βήμα: Λύνουμε τον περιορισμό.

$$\Phi(x,y) = x + y - 8 = 0$$

2^{o} Βήμα: Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

Συνάρτηση Lagrange:

$$L(x,y) = -3x^2 - 2xy - 2y^2 + 50x + 30y - 20 - \lambda(x + y - 8)$$

3^{o} Βήμα: Σ.Π.Τ.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -6x - 2y + 50 - \lambda = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 50 = -\lambda \ (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -4y - 2x + 30 - \lambda = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - 30 = -\lambda \ (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -(x + y - 8) = 0 \Leftrightarrow x + y = 8 \ (3) \Leftrightarrow y = 8 - x \ (4)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και προκύπτει:

$$\frac{6x+2y-50}{2x+4y-30}=\frac{-\lambda}{-\lambda} \Leftrightarrow 6x+2y-50=2x+4y-30 \Leftrightarrow 4x-2y=20 \text{ (5)}$$

Λύνοντας τις σχέσεις (4) και (5) και προκύπτει ότι $x^*=6 \; και \; y^*=2$.

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι: $\lambda=10$

Άρα η λύση είναι: $(x^*, y^*, \lambda^*)=(6,2,10)$

<u>4ο Βήμα:</u> Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^*=\begin{bmatrix} 0 & \Phi_x & \Phi_y \\ \Phi_x & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \Phi_y & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}=6>0$$ Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Τα μέγιστα κέρδη υπολογίζονται αν αντικαταστήσουμε στην συνάρτηση κερδών τις ποσότητες x και y που έχουν προκύψει από την λύση της συνάρτησης Lagrange. Συνεπώς, $\Pi(6,2)=200$.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση παραγωγής μιας επιχείρησης $Q(L,K)=L^2K^2$. Να βρεθούν οι συναρτήσεις ζήτησης των εισροών (L^*, K^*) που μεγιστοποιούν την παραγωγή (με δεδομένο κόστος).

<u>1ο Βήμα:</u> Λύνουμε τον περιορισμό.

$$\Phi(L,K)=wL+rK-c=0$$

<u>2ο Βήμα:</u> Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

<u>Συνάρτηση Lagrange:</u>

$L(x,y)=L^2K^2-\lambda(wL+rK-c)$

<u>3ο Βήμα:</u> Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Leftrightarrow 2LK^2-\lambda w=0 \Leftrightarrow 2LK^2=\lambda w$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial y}=0 \Leftrightarrow 2KL^2-\lambda r=0 \Leftrightarrow 2KL^2=\lambda r$ (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow -wL - rK + c = 0 \Leftrightarrow wL + rK = c$ (3)

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και προκύπτει:

$$\frac{2LK^2}{2KL^2} = \frac{\lambda w}{\lambda r} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Leftrightarrow wL = rK \ (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) προκύπτει ότι:

$L^* = \frac{c}{2w}$, Συνάρτηση Ζήτησης Εργασίας (5)

$K^* = \frac{c}{2r}$, Συνάρτηση Ζήτησης Κεφαλαίου (6)

4ο Βήμα: Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_L & \Phi_K \\ \Phi_L & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} \\ \Phi_K & \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & w & r \\ w & 2K^2 & 4KL \\ r & 4KL & 2L^2 \end{vmatrix} = -2w^2L^2 - -2r^2K^2 + 8wrKL \ (7)$$

Η σχέση (7) λόγω των (5) και (6) γίνεται:

$$-2w^2\frac{c^2}{4w^2} - -2r^2\frac{c^2}{4r^2} + 8wr\frac{c}{2w}\frac{c}{2r} = c^2 > 0$$

Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 3

Έστω ότι η τιμή του κεφαλαίου (K) είναι $P_K = 1$€ και της εργασίας (L) είναι $P_L = 4$€, ενώ η επιχείρηση πρέπει να παράγει 400 μονάδες προϊόντος. Αν η συνάρτηση παραγωγής είναι $Q(L,K) = 100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$ να βρεθούν οι ποσότητες των K,L που ελαχιστοποιούν το κόστος της επιχείρησης καθώς και το ελάχιστο κόστος.

$$TC(L,K) = 4L + 1K$$

1ο Βήμα: Λύνουμε τον περιορισμό.

$$Q(L,K) = 100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} - 400 = 0$$

2ο Βήμα: Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

Συνάρτηση Lagrange:

$L(x,y) = 4L + 1K - \lambda\left(100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} - 400\right)$

<u>3ο Βήμα:</u> Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow 4 - 50L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow 50L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 4$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow 1 - 50L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow 50L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} = 1$ (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} - 400 = 0 \Leftrightarrow 100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 400$ (3)

Διαιρώ κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και προκύπτει:

$$\frac{50L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}}{50L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}}} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \frac{K}{L} = 4 \Leftrightarrow K = 4L \ (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) προκύπτει ότι:

$$100L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 400 \Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} = 4 \Leftrightarrow L^{\frac{1}{2}}\,(4L)^{\frac{1}{2}} = 4 \ \Leftrightarrow L^* = 2 \ \kappa\alpha\iota \ K^* = 8$$

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι $\lambda = \frac{1}{50}L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} > 0$

<u>4ο Βήμα:</u> Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & \Phi_L & \Phi_K \\ \Phi_L & \frac{\partial^2 L}{\partial L^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial L \partial K} \\ \Phi_K & \frac{\partial^2 L}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} & L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} \\ L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} & 25\lambda L^{-\frac{3}{2}}K^{\frac{1}{2}} & -25\lambda L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} \\ L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} & -25\lambda L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} & 25\lambda L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} =$$
$$-250.000\lambda L^{-\frac{1}{2}}K^{-\frac{1}{2}} < 0$$

Άρα το κόστος ελαχιστοποιείται (υπό τον περιορισμό παραγωγής) για ποσότητες $L^* = 2 \ \kappa\alpha\iota \ K^* = 8$, ενώ το ελάχιστο κόστος της επιχείρησης είναι $TC(2{,}8) = 4 * 2 + 1 * 8 = 16$€.

Άσκηση 4

Να λυθεί το παρακάνω σύστημα με την μέθοδο απαλοιφής Gauss-Jordan.

$2x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -5$

$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4$

$3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -4$

- Εύρεση κλιμακωτού πίνακα

$(A|b)=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ Αλλάζουμε την πρώτη με την δεύτερη στήλη για να έχουμε την μονάδα ως πρώτο στοιχείο.

$$(A|b)=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 4 & -5 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3R_1)+R_2]{(-2R_1)+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -9 & 7 & 10 & 3 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \div (-9)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{13}{2} & 7 & 15 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+\frac{13}{2}R_2]{R_1-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{35}{18} & \frac{140}{18} & \frac{35}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{18}{35}R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{9} & -\frac{10}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+\frac{13}{9}R_3]{R_2+\frac{7}{9}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 5x_4 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 5x_4$

$x_2 + 2x_4 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2 - 2x_4$

$x_3 + 4x_4 = 3 \Leftrightarrow x_3 = 3 - 4x_4$

Έστω $x_4 = \lambda$

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 5\lambda, 2 - 2\lambda, 3 - 4\lambda, \lambda)$ όπου λ ϵ R.