ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 7$^{\text{Ο}}$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ LAGRANGE- ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΥΣΑΣ

Άσκηση 1

Βλ. λυμένο παράδειγμα 2.3 στο e-class του μαθήματος στην 9$^{\eta}$ διάλεξη-σημειώσεις Ιωάννη Βενέτη σελίδες 15-18.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση χρησιμότητας

$$u(x,y) = \alpha x + \beta \ln y$$

και ο εισοδηματικός περιορισμός

$$x + p_y y = M$$

ενός αντιπροσωπευτικού καταναλωτή όπου $\alpha, \beta, p_y, M > 0$ και $M - {}^{\beta}/_{\alpha} > 0$, ενώ $x, y \in R_{++}$.

Ερωτήματα

1) Προβείτε σε επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης της χρησιμότητας του καταναλωτή.
2) Βεβαιωθείτε ότι η λύση σας αντιστοιχεί, τουλάχιστον, σε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας.
3) Πώς μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί το εισόδημα; Σχολιάστε.
4) Πώς μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα όταν μεταβληθεί η παράμετρος προτιμήσεων β; Σχολιάστε.

Απάντηση

1)

<u>1$^{\text{ο}}$ Βήμα:</u> Λύνουμε τον περιορισμό.

$$M - x - p_y y = 0$$

<u>2$^{\text{ο}}$ Βήμα:</u> Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

<u>Συνάρτηση Lagrange:</u>

$$L = \alpha x + \beta ln y + \lambda[M - x - p_y y]$$

3ο Βήμα: Σ.Π.Τ.

(1): $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \alpha - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^* = \alpha$

(2): $\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{y} - \lambda p_y = 0 \Leftrightarrow y^* = {}^{\beta}/_{\alpha p_y}$

(3): $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow M - x - p_y y = 0 \overset{\lambda \acute{o}\gamma\omega\ (2)}{\Longleftrightarrow} M - x - p_y \left({}^{\beta}/_{\alpha p_y}\right) = 0 \Leftrightarrow x^* = M - \frac{\beta}{\alpha}$

Άρα η λύση είναι: $(x^*, y^*, \lambda^*) = (M - \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha p_y}, \alpha)$.

2)

4ο Βήμα: Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & L_x & L_y \\ L_x & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ L_y & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p_y \\ 1 & 0 & 0 \\ p_y & 0 & -\frac{\beta}{y^2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow |H^{B,*}| = -1\left(\frac{\beta}{(y^*)^2}\right) = \left(\frac{\beta}{(y^*)^2}\right) > 0$$

Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο της συνάρτησης χρησιμότητας για ζήτηση x^*, y^*.

3)

Θεώρημα Περιβάλλουσας

$$\frac{du^*}{dM} = \frac{\partial L}{\partial M}\bigg|_{x=x^*, \lambda=\lambda^*} = \lambda^* = \alpha > 0$$

Στη συγκεκριμένη ημι-γραμμική (quasi-linear) συνάρτηση χρησιμότητας μόνο η βέλτιστη ζήτηση του x^*εξαρτάται από το διαθέσιμο εισόδημα M. Έτσι βλέπουμε ότι μία αύξηση του εισοδήματος κατά μία μονάδα θα αυξήσει (πάντα) την βέλτιστη χρησιμότητα u^*που απολαμβάνει ο καταναλωτής κατά α μονάδες (δηλαδή κατά την παράμετρο προτιμήσεων που αντιστοιχεί στο αγαθό x στην συνάρτηση χρησιμότητας $u(x, y) = \alpha x + \beta \ln(y)$.

4)

Θεώρημα Περιβάλλουσας

$$\frac{du^*}{d\beta} = \frac{\partial L}{\partial \beta}\bigg|_{x=x^*, \lambda=\lambda^*} = \ln(y^*) = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha p_y}\right)$$

Μία αύξηση στην τιμή της παραμέτρου β που εκφράζει την βαρύτητα του y στη συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας οδηγεί σε αύξηση της βέλτιστης χρησιμότητας μόνο όταν $\ln\left(\frac{\beta}{\alpha p_y}\right) > 0$ δηλαδή όταν $p_y < \frac{\beta}{\alpha}$.