ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ $6^{Ο}$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ LAGRANGE

Άσκηση 1

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ακρότατα της συνάρτησης:

i. $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

Σ.Π.Τ.

$f_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3y \Leftrightarrow y = x^2,\ \lambda \acute{o} \gamma \omega\ (1)\ \ y = 0$ ή $y = 1$

$f_y = 0 \Leftrightarrow -3x + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow -x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1\ \ (\mathbf{1})$

Δηλαδή δύο είναι τα στάσιμα σημεία. Το 1ο το $(x = 0, y = 0)$ και το 2ο $(x = 1, y = 1)$

Σ.Δ.Τ.

$H_1^* = |f_{xx}| = 6x$

$H_2^* = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}, |H_2^*| = 36xy - 9$

Στο σημείο $(x = 0, y = 0), H_1 = 0\ \kappa\alpha\iota\ H_2 = -9$, άρα το σημείο δεν είναι ακρότατο.

Στο σημείο $(x = 1, y = 1), H_1 = 6\ \kappa\alpha\iota\ H_2 = 27$, άρα στο σημείο η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 2

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $f(x,y) = x + y$ υπό τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$.

1º Βήμα: Λύνουμε τον περιορισμό.

$$1 - x^2 - y^2 = 0$$

2º Βήμα: Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

Συνάρτηση Lagrange:

$$L = (x + y) + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

3º Βήμα: Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow x = {}^{1}/_{2\lambda}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow y = {}^{1}/_{2\lambda}$

Άρα $x = y = {}^{1}/_{2\lambda}$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 = {}^{1}/_{2} \Leftrightarrow \lambda = \pm {}^{\sqrt{2}}/_{2}$

Άρα οι δύο λύσεις είναι: $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ και $(x^*, y^*, \lambda^*) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

4º Βήμα: Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^* = \begin{bmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ f_y & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2x^* & -2y^* \\ -2x^* & -2\lambda^* & 0 \\ -2y^* & 0 & -2\lambda^* \end{bmatrix}$$

Για τη λύση $(x^*, y^*, \lambda^*) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ η Εσσιανή μήτρα γίνεται:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{32} > 0,$$ Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Στο δεύτερο σημείο $(x^*, y^*, \lambda^*) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ η Εσσιανή μήτρα γίνεται:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{32} < 0,$$ Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό ελάχιστο.

Άσκηση 3

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $U(x,y)=(x+1)(y+1)$ υπό τον περιορισμό $x+2y=29$.

1º Βήμα: Λύνουμε τον περιορισμό.

$$29-x-2y=0$$

2º Βήμα: Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

Συνάρτηση Lagrange:

$$L=(x+1)(y+1)+\lambda[29-x-2y]$$

3º Βήμα: Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Leftrightarrow (y+1)-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=(y+1)$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial y}=0 \Leftrightarrow (x+1)-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{x+1}{2}$ (2)

Από την (1) και (2) έχουμε:

$(y+1)=\frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x+1=2y+2 \Leftrightarrow x=2y+1$ (3)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \Leftrightarrow 29-x-2y=0 \xLeftrightarrow{\lambda \acute{o} \gamma \omega\ (3)} 29-2y-1-2y=0 \Leftrightarrow 28=4y \Leftrightarrow y^*=7$ (4)

Η σχέση 3 λόγω της σχέσης 4 γίνεται:

$x=2y+1 \Leftrightarrow x^*=15$

Από την σχέση $\Leftrightarrow \lambda=y+1 \Leftrightarrow \lambda^*=8$

Άρα η λύση είναι: $(x^*,y^*,\lambda^*)=(15,7,8)$

4º Βήμα: Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^*=\begin{bmatrix} 0 & U_x & U_y \\ U_x & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ U_y & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4>0$$

Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 4

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $U(x,y) = (x - x_0)(y - y_0)$ υπό τον περιορισμό $p_x X + p_y Y = M$.

1º Βήμα: Λύνουμε τον περιορισμό.

$$M - p_x X - p_y Y = 0$$

2º Βήμα: Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

Συνάρτηση Lagrange:

$$L = (x - x_0)(y - y_0) \ + \lambda[M - p_x X - p_y Y]$$

3º Βήμα: Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow (y - y_0) - \lambda p_x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{y - y_0}{p_x}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) - \lambda p_y = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x - x_0}{p_y}$

Άρα $\frac{y-y_0}{p_x} = \frac{x - x_0}{p_y} \Leftrightarrow y = y_0 + \frac{p_x}{p_y}(x - x_0)(1)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow M - p_x X - p_y Y = 0 \xLeftrightarrow{\lambda όγω\ (1)} M - p_x X - p_y(y_0 + \frac{p_x}{p_y}(x - x_0))$

$$x^* = \frac{M - p_y Y_0 + p_x X_0}{2p_x}$$

$$y^* = y_0 + \frac{p_x}{p_y}\left(\frac{M - p_y Y_0 + p_x X_0}{2p_x}\right) - \frac{p_x}{p_y} x_0$$

$$\lambda^* = \frac{M - p_y Y_0 + p_x X_0}{2p_x p_y} - \frac{x_0}{p_y}$$

Άρα η λύση είναι το παραπάνω σημείο.

4º Βήμα: Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$$H^* = \begin{vmatrix} 0 & -p_x & -p_y \\ -p_x & 0 & 1 \\ -p_y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2p_x p_y > 0$$

Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 5

Να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση $U(t_1,t_2)=\frac{1}{2}(B_1+B_2)=\frac{1}{2}(0.5+1.7\sqrt{t_1}+1+0.3t_2)$ υπό τον περιορισμό $t_1+t_2=25$.

<u>1ο Βήμα:</u> Λύνουμε τον περιορισμό.

$$25-t_1-t_2=0$$

<u>2ο Βήμα:</u> Ορίζουμε την συνάρτηση Lagrange

<u>Συνάρτηση Lagrange:</u>

$L=\frac{1}{2}(0.5+1.7\sqrt{t_1}+1+0.3t_2)+\lambda(25-t_1-t_2)=0.75+0.85\sqrt{t_1}+0.15t_2+\lambda(25-t_1-t_2)$

<u>3ο Βήμα:</u> Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial L}{\partial t_1}=0 \Leftrightarrow \frac{0.85}{2\sqrt{t_1}}-\lambda=0 \Leftrightarrow t_1=(\frac{0,425}{\lambda})^2 \xRightarrow{\lambda όγω\ (2)} t_1=8.03$

$\frac{\partial L}{\partial t_2}=0 \Leftrightarrow \lambda=0.15\ (2)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \Leftrightarrow t_1+t_2=25 \Leftrightarrow t_2=16.97$

Άρα η λύση είναι: $({t_1}^*,{t_2}^*,\lambda^*)=(8.03,16.97,0.15)$

<u>4ο Βήμα:</u> Σ.Δ.Τ.

Πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης συνάρτησης δύο μεταβλητών και ενός περιορισμού. Άρα η Εσσιανή γράφεται:

$H^*=\begin{bmatrix}0 & U_{t_1} & U_{t_2}\\ U_{t_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial t_2 \partial t_1}\\ U_{t_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial t_2^2}\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -0.009 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0.009>0$ Άρα στο σημείο αυτό έχουμε τοπικό μέγιστο.

Αν αντικαταστήσουμε στην συνάρτηση προκύπτει ότι:

$$B_1^*=5.317$$

$$B_2^*=6.091$$