ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 5^{Ο}

<u>ΣΥΝΘΗΚΕΣ 1ης ΤΑΞΗΣ- ΣΥΝΘΗΚΕΣ 2ης ΤΑΞΗΣ -ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ</u>

Άσκηση 1

Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα στάσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $y(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$

Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 4x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2^* = 0$

Σ.Δ.Τ.

$$H_1^* = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 4 > 0 \; και \; H_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, |H_2^*| = 8 > 0$$

Άρα $x_1^* = x_2^* = 0, y^*(0,0) = 0, ελάχιστο.$

ii. $y(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$

Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 4 - 2x_1 + x_2 = 0 \;\; (1), \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x_2 + x_1 = 0 \;\; (2)$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (1) με το 2 έχουμε:

$8 - 4x_1 + 2x_2 = 0$

$2 - 2x_2 + x_1 = 0 \quad +$

$x_1^* = \frac{10}{3}, x_2^* = \frac{8}{3}, y^* = \frac{28}{3}$

Σ.Δ.Τ.

$$H_1^* = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = -2 < 0 \; και \;\; H_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, |H_2^*| = 3 > 0$$

Άρα $x_1^* = x_2^* = 0, y^*(0,0) = 0, μέγιστο.$

iii. $y(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1 + 2x_3$

Σ.Π.Τ.

$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 2x_1^* - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1^* = \frac{1}{4}$ (3)

$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 2x_2^* = 0 \Leftrightarrow x_2^* = 0$ (4)

$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow 8x_3^* + 2 = 0 \Leftrightarrow x_3^* = -\frac{1}{4}$ (5)

Από τις (3),(4) και (5) προκύπτει η μοναδική λύση $x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = 0, x_3^* = -\frac{1}{4}, y^* = -0{,}375$

Σ.Δ.Τ.

$$H_1^* = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 4 > 0 \; και \;\; H_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, |H_2^*| = 8 > 0$$

$$H_3^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, |H_3^*| = 64 > 0$$

Άρα $x_1^* = \frac{1}{4}, x_2^* = 0, x_3^* = -\frac{1}{4}, y^* = -0{,}375$ $, ελάχιστο.$

iv. $y(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_2 + 2x_3$

Σ.Π.Τ.

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 0 \ (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 4x_2^* - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2^* = \frac{1}{4} \ (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow 2x_3^* + 2 = 0 \Leftrightarrow x_3^* = -1 \ (5)$$

Από τις (3),(4) και (5) προκύπτει η μοναδική λύση $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{4}, x_3^* = -1, y^* = -\frac{7}{8}$

Σ.Δ.Τ.

$$H_1^* = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 8 > 0 \ \kappa\alpha\iota \ H_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, |H_2^*| = 48 > 0$$

$$H_3^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_3} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3 x_2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, |H_3^*| = 96 > 0$$

Άρα $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{4}, x_3^* = -1, y^* = -\frac{7}{8}, \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o$

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 lnx$

$$f_x = \frac{\partial y}{\partial x} = 2x + 4y + y^2\frac{1}{x}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{y^2}{x^2}, f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 + \frac{2y}{x}$$

$$f_y = \frac{\partial y}{\partial y} = 4x + 2ylnx, f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2lnx, f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 + \frac{2y}{x}$$

2. $g(x,y) = e^{x^2+y^2} + \frac{y}{x}$

$$g_x = \frac{\partial y}{\partial x} = e^{x^2+y^2}2x - \frac{y}{x^2}, g_{xx} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = (4x^2+2)e^{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^3}$$

$$g_y = \frac{\partial y}{\partial y} = e^{x^2+y^2}2y + \frac{1}{x} \, , g_{yy} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = (4x^2+2)e^{x^2+y^2}$$

$$g_{yx} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2} \, , g_{xy} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2}$$

3. $h(x, y) = \sin(xy^2) + (x^3 + y)^2$

$$h_x = \frac{\partial x}{\partial y} = \cos(xy^2)y^2 + 6x^2(x^3 + y) \, ,$$

$$h_{xx} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -y^4 \sin(xy^2) + 12x^4 + 12xy + 18x^4,$$

$$h_y = \frac{\partial y}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2) + 2(x^3 + y)$$

$$h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2x\cos(xy^2) - 4x^2y^2\sin(xy^2) + 2,$$

$$h_{yx} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 6x^2 \, ,$$

$$h_{xy} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 6x^2$$

Άσκηση 3

Έστω ότι $P_x = 50 - 2x$ και $P_y = 30 - y$ και η συνάρτηση συνολικού κόστους $TC = x^2 + 2xy + y^2 + 20$. Να βρεθούν τα μέγιστα έσοδα.

Συνολικά Έσοδα

$TR = P_x X + P_y Y = 50x - 2x^2 + 30y - y^2$

$TC = x^2 + 2xy + y^2 + 20$

Η συνάρτηση κερδών ισούται:

$\Pi(x, y) = TR - TC = -3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20$

$\Pi_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -6x - 2y + 50 = 0 \overset{*2}{\Rightarrow} 12x + 4y - 100 = 0$

$\Pi_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y} = -4y - 2x + 30 = 0 \Leftrightarrow \underline{-4y - 2x + 30 = 0 +}$

$$x^* = 7, y^* = 4$$

$H_1^* = -6 < 0 \; και \; H_2^* = \begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{yx} & \Pi_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, |H_2^*| = 24 - 4 = 20 > 0,$ μέγιστο.

Μέγιστα έσοδα: $\Pi(x, y) = \Pi(7{,}4) = 215$

Άσκηση 4

Ένα μονοπώλιο παράγει δύο προϊόντα q_1 , q_2 με γραμμικές συναρτήσεις ζήτησης:

$$q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$$

$$q_2 = 120 - 3p_1 + 5p_2$$

Η συνάρτηση κόστους είναι η παρακάτω:

$$TC(q_1, q_2) = 50 + 10q_1 + 20q_2$$

Η συνάρτηση εσόδων της επιχείρησης δίνεται από:

$$TR(q_1, q_2) = p_1q_1 + p_2q_2 \; (1)$$

Μεγιστοποιείστε την συνάρτηση κέρδους της επιχείρησης

$$\Pi(q_1, q_2)$$

Αρχικά πρέπει να ορίσουμε την συνάρτηση κέρδους, την οποία θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε στη συνέχεια. Επομένως, λύνουμε τις συναρτήσεις ζήτησης των δύο προϊόντων q_1, q_2 ως προς τις αντίστοιχες τιμές τους p_1, p_2

$$p_1 = \frac{100+p_2-q_1}{2} \text{ και } p_1 = \frac{120+3p_1-q_2}{5}$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε στην συνάρτηση συνολικών εσόδων. Συνεπώς προκύπτει:

$$\textit{Από την } (1) \textit{ προκύπτει}: TR(q_1, q_2) = 50q_1 + \frac{p_2q_1}{2} - \frac{q_1^2}{2} + \frac{120q_2}{5} + \frac{3p_1q_2}{5} - \frac{q_2^2}{5}$$

Τέλος ορίζουμε την συνάρτηση κέρδους ως εξής:

$$\Pi(q_1, q_2) = TR(q_1, q_2) - TC(q_1, q_2) =$$

$$= 40q_1 + \frac{p_2q_1}{2} - \frac{q_1^2}{2} + 4q_2 + \frac{3p_1q_2}{5} - \frac{q_2^2}{5} - 50$$

Στην συνέχεια ακολουθείται η γνωστή διαδικασία.

Σ.Π.Τ.

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = 0 \Leftrightarrow 40 + \frac{p_2}{2} - q_1 = 0 \Leftrightarrow q_1^* = p_2 + 40$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow 4 + \frac{3p_1}{5} - \frac{2q_2}{5} = 0 \Leftrightarrow q_2^* = 10 + \frac{3p_1}{5}$$

Σ.Δ.Τ.

$$H_1^* = \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} = -1 < 0 \; \textit{και} \; H_2^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 q_2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial q_2 q_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, |H_2^*| = \frac{2}{5} > 0,$$

$\mu\acute{\varepsilon}\gamma\iota\sigma\tau o.$

Άσκηση 5

Μία μονοπωλιακή επιχείρηση έχει συνάρτηση ζήτησης P=125.5-3Q και συνάρτηση κόστους $TC = \frac{Q^3}{2} - 15Q^2 + 175Q + 300$. Να υπολογιστεί η παραγωγή στην οποία το κέρδος ελαχιστοποιείται και μεγιστοποιείται.

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q) = -\frac{Q^3}{2} + 12Q^2 + 22{,}5Q + 300$$

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = -\frac{3Q^2}{2} + 24Q + 22{,}5$$

$$\frac{d\Pi(Q)}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 1.5Q^2 - 24Q + 22{,}5 \ (1)$$

$$\textit{Λύνοντας το τριώνυμο της σχέσεως (1) προκύπτουν}: Q_1^* = 15 \ \textit{και} \ Q_2^* = 1$$

$$\frac{d^2\Pi(Q)}{dQ^2} = -3Q + 24$$

Για την τιμή Q=1=>$\frac{d^2\Pi(Q)}{dQ^2} = 21 > 0$

Για την τιμή Q=15=>$\frac{d^2\Pi(Q)}{dQ^2} = -21 < 0$

Π(1)=-311 ελάχιστα έσοδα.

Π(15)=375 μέγιστα έσοδα.