ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 4^{O}

ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ-ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Άσκηση 1

Να βρείτε το ολικό διαφορικό για τις παρακάτω συναρτήσεις:

i. $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = a, \qquad \frac{\partial fU(x_1,x_2)}{\partial x_2} = b, \qquad dU = a\,dx_1 + bdx_2$$

ii. $U(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2, \qquad \frac{\partial fU(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 3x_2^2 + x_1,$$

$$dU = (2x_1 + x_2)\,dx_1 + (3x_2^2 + x_1)dx_2$$

iii. $U(x_1, x_2) = x_1^a + x_2^b$

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = ax_1^{a-1}x_2^b, \qquad \frac{\partial fU(x_1,x_2)}{\partial x_2} = bx_2^{b-1}x_1^a,$$

$$dU = (ax_1^{a-1}x_2^b)\,dx_1 + (bx_2^{b-1}x_1^a)dx_2$$

iv. $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x + y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x - 6y^2$$

$$df = (6x + y)\,dx + (x - 6y^2)dy$$

v. $U(x_1, x_2) = 2x_1 + 9x_1x_2 + x_2^2$

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2 + 9x_2, \qquad \frac{\partial fU(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 9x_1 + 2x_2,$$

$$dU = (2 + 9x_2)\, dx_1 + (9x_1 + 2x_2)dx_2$$

vi. $f(x,y) = 3x^2 - xy^3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x - y^3, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2$$

$$df = (6x - y^3)\, dx + (3x^2 - 3xy^2)dy$$

vii. $f(x,y) = x^2 ylnx + x^2 y^3 lny$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y[(x^2)'lnx + x^2(lnx)'] + 2xy^3 lny = 2xylnx + xy + 2xy^3 lny$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 lnx + x^2[(y^3)'lny + y^3(lny)'] =$$

$$x^2 lnx + 3x^2y^2 lny + x^2y^2$$

viii. $U(x_1,x_2) = klnx_1 + (1-k)x_1^a x_2^b$

$$\frac{\partial U(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{k}{x_1} + a(1-k)x_1^{a-1}x_2^b,$$

$$\frac{\partial fU(x_1,x_2)}{\partial x_2} = b(1-k)x_1^a x_2^{b-1},$$

$$dU = \left[\frac{k}{x_1} + a(1-k)x_1^{a-1}x_2^b\right] dx_1 + [b(1-k)x_1^a x_2^{b-1}]dx_2$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι των παρακάτω πεπλεγμένων συναρτήσεων:

1. Έστω $y = f(x) = 3x^4$ (1) $=> y - 3x^4$

Να βρεθεί η $\frac{dx}{dy}$ για την πεπλεγμένη συνάρτηση που ορίζεται από τη (1).
Επειδή η $F(y,x)$ παίρνει την μορφή $y - 3x^4$ έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-12x^3}{1} = 12x^3$$

2. $F(y, x) = x^2 + y^2 - 9$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2y}{2x} = \frac{y}{x}$$

3. $F(x, y, w) = y^3x^2 + w^3 + xyw - 3 = 0$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2y^3x + yw}{3y^2x^2 + xw}$$

4. Υποθέτουμε ότι η $F(Q, K, L) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια συνάρτηση παραγωγής $Q = f(K, L)$. Να βρεθούν το οριακό προϊόν της εργασίας και του κεφαλαίου.

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = -\frac{F_K}{F_Q}$$
$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_Q}$$

Ο λόγος $\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{F_L}{F_K}$ είναι ίσος με το λόγο οριακής τεχνικής υποκατάστασης.

5. $F(x_1, x_2, y) = x_1^2 - 3x_2^2 - y$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y} = -\frac{2x_1}{-1} = 2x_1$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y} = -\frac{-6x_2}{-1} = -6x_2$$

6. $F(x_1, x_2, x_3, y) = x_1^2y^3 - 2x_2x_3y^2 + x_3^2y^5 = 100$

Θεωρούμε την πεπλεγμένη συνάρτηση:

$F(x_1, x_2, x_3, y) = x_1^2y^3 - 2x_2x_3y^2 + x_3^2y^5$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3} = -\frac{F_{x_3}}{F_y} = -\frac{-2x_2y^2 + 2x_3y^5}{3x_1^2y^2 - 4x_2x_3y + 5x_3^2y^4}$$

Άσκηση 3

Έστω ότι Y ακαθάριστο εθνικό προϊόν μίας κλειστής οικονομίας και r το επίπεδο του επιτοκίου οι ενδογενείς μεταβλητές και G_0, M_0 οι εξωγενείς μεταβλητές όπου G_0 οι κρατικές ή δημόσιες δαπάνες που ελέγχονται από το κράτος και M_0 η προσφορά χρήματος που ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα. L(Y, r) συμβολίζει τη ζήτηση χρήματος στην οικονομία με πρόσημα μερικών παραγώγων $L_y > 0$ και $L_r < 0$. Επίσης $Y_d = Y – T(1)$, η οριακή ροπή προς κατανάλωση δίνεται υπό μορφή μερικής παραγώγου και όχι αναλυτικά $0 < C_y < 1$, T = T(Y) , το ίδιο και ο συντελεστής φορολογίας $0 < T_y < 1$ ενώ η επένδυση εξαρτάται αρνητικά από το επιτόκιο $I_r < 0$. Για μία απλή κλειστή οικονομία, σας δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$Y = C(Y^d) + I(r) + G_0$$

$$L(Y, r) = M_0$$

Χρησιμοποιήστε ένα σύστημα πεπλεγμένων εξισώσεων και την σχέση που ρυθμίζει την γενική συγκριτική ανάλυση ενός τέτοιου συστήματος και βρείτε αν μία αύξηση των κρατικών δαπανών G_0 αυξάνει το επιτόκιο r.

Οι δύο πεπλεγμένες εξισώσεις είναι οι:

$$F_1(Y, r, G_0, M_0) = Y - C\big(-T(Y)\big) - I(r) - G_0 = 0 \ λόγω\ της\ σχέσης\ (1)$$

$$F_2(Y, r, G_0, M_0) = L(Y, r) - M_0 = 0$$

Βρίσκουμε την ιακωβιανή μήτρα η οποία είναι η παρακάτω:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y} & \frac{\partial F_1}{\partial r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y} & \frac{\partial F_2}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial r}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial G_0} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial G_0} \end{bmatrix} =>$$

$$\begin{bmatrix} 1 - C_Y(1 - T_Y) & -I_r \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial G_0} \\ \frac{\partial r}{\partial G_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τις λύσεις της μεθόδου Cramer θα πρέπει να υπολογίσω τις ορίζουσες των πινάκων J και J_2.

$$|J| = \big(1 - C_Y(1 - T_Y)\big)L_r + L_Y I_r < 0$$

$$|J_2| = \begin{bmatrix} 1 - C_Y(1 - T_Y) & -I_r \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} => |J_2| = -L_Y < 0$$

Η λύση Cramer δίνει:

$$\frac{\partial r}{\partial G_0} = \frac{|J_2|}{|J|} = \frac{-L_Y}{\big(1 - C_Y(1 - T_Y)\big)L_r + L_Y I_r} < 1$$

Βλέποντας τις σχέσεις, που μας έχουν δοθεί στην εκφώνηση της άσκησης, για τις μεταβλητές που αποτελούν τη λύση του συστήματος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση είναι ένας θετικός και μικρότερος της μονάδας αριθμός, δηλαδή $0 < \frac{\partial r}{\partial G_0} < 1$. Αυτό σημαίνει ότι μια αύξηση των κρατικών δαπανών κατά μία μονάδα θα αυξήσει το επιτόκιο μεν, αλλά η αύξησή του θα είναι μικρότερη της μονάδας.