ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΥΣ ΙΙ

ΔΙΑΛΕΞΗ 1η

1. **Ορισμός πίνακα n×k. Συμβολισμοί, στοιχεία πίνακα $\alpha_{i,j}$.**

   Ένας πίνακας (ή αλλιώς μήτρα) A είναι μια διάταξη nxk στοιχείων της μορφής:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \dots & \alpha_{nk} \end{bmatrix}$$

   Το μέγεθος του πίνακα είναι nxk με n γραμμές και k στήλες.

   Ο συμβολισμός $\alpha_{i,j}$ υποδηλώνει τη θέση ενός στοιχείου μέσα στον πίνακα. Ο πρώτος υποδείκτης υποδηλώνει τη γραμμή του πίνακα και ο δεύτερος υποδείκτης τη στήλη του πίνακα όπου βρίσκεται το στοιχείο $\alpha_{i,j}$.

   Ένας πίνακας είναι διαστάσεων nxk γιατί έχει n γραμμές και k στήλες.

2. **Βαθμωτό: Είναι ο πίνακας διαστάσεων 1×1, ή αλλιώς ένας αριθμός.**

   Ένας πίνακας με ένα μόνο στοιχείο, δηλαδή ένας 1×1 πίνακας ονομάζεται βαθμωτό και αντιστοιχεί σε έναν απλό αριθμό.

3. **Διάνυσμα, πίνακας στήλη n×1, ή πίνακας γραμμή 1×n.**

   Ένας πίνακας που περιέχει μια μόνο στήλη λέγεται **διάνυσμα στήλη,** ενώ ένας πίνακας που περιέχει μια μόνο γραμμη λέγεται **διάνυσμα γραμμή**.

Π.χ. Διάνυσμα στήλη Α= $\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{n1} \end{bmatrix}$

Διάνυσμα γραμμή Α= $[\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \dots \quad \dots \quad \alpha_{1k}]$

4. **Μοναδιαίο διάνυσμα i = (1 1 … 1)**

Είναι το διάνυσμα (γραμμή ή στήλη) του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα 1.

5. **Πράξεις με βαθμωτό.**

Όταν πολλαπλασιάζουμε ένα βαθμωτό, έστω λ, με μια μήτρα Α n×k διαστάσεων τότε πολλαπλασιάζουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα Α με το βαθμωτό.

Για παράδειγμα έστω πίνακας Α= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ \alpha & 5 & -\mu \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

Τότε λΑ = λ* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ \alpha & 5 & -\mu \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 8\lambda \\ \alpha\lambda & 5\lambda & -\mu\lambda \\ 9\lambda & 8\lambda & 7\lambda \end{bmatrix}$.

6. **Βασικοί τύποι πινάκων**

i. *Τετραγωνικός n×n πίνακας*

Τετραγωνικός πίνακας n×n ονομάζεται ο πίνακας του οποίου ο αριθμός των στηλών n είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών n. Για παράδειγμα ο επόμενος πίνακας Α είναι ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων 3×3, γιατί έχει 3 γραμμές και 3 στήλες.

$$A= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 8 \\ 4 & \mathbf{5} & -9 \\ 9 & 8 & \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Σε έναν τετραγωνικό n×n πίνακα τα στοιχεία $\boldsymbol{\alpha_{i,j}}$ του πίνακα Α όπου i=j ($\boldsymbol{\alpha_{11}=1}$, $\boldsymbol{\alpha_{22} = 5}$, $\boldsymbol{\alpha_{33}= 7}$) βρίσκονται στη διαγώνιο του πίνακα η οποία ονομάζεται **κύρια διαγώνιος**.

ii. *Συμμετρικός πίνακας.*

Ένας πίνακας με στοιχεία που ικανοποιούν την ιδιότητα $α_{i,j} = α_{j,i}$ για κάθε i,j ονομάζεται συμμετρικός πίνακας. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ 0 & 5 & -9\\ 8 & -9 & 7\end{bmatrix}$$

iii. *Αντισυμμετρικός πίνακας.*

Τα στοιχεία του ικανοποιούν την ιδιότητα $α_{i,j} = -α_{j,i}$ για κάθε i,j Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 5 & 8\\ -5 & 0 & -9\\ -8 & 9 & 0\end{bmatrix}$$

Σημείωση: Στους αντισυμμετρικούς πίνακες τα στοιχεία που βρίσκονται επί της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 0 γιατί μόνο τότε ισχύει ότι $α_{i,j} = -α_{j,i}$ για κάθε i,j .

iv. *Μηδενικός πίνακας*

Ένας πίνακας πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με 0 ονομάζεται μηδενικός πίνακας. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

v. *Διαγώνιος πίνακας*

Διαγώνιος πίνακας ονομάζεται ο **τετραγωνικός** πίνακας του οποίου όλα τα στοίχεια πλήν της κύριας διαγωνίου είναι μηδενικά. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \kappa & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

vi. Μοναδιαίος πίνακας

Ο διαγώνιος πίνακας του οποίου όλα τα στοίχεια της κύριας διαγωνίου είναι ίσα με 1 ονομάζεται μοναδιαίος πίνακας. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

vii. *Βαθμωτός πίνακας*

Βαθμωτός πίνακας ονομάζεται ο διαγώνιος πίνακας του όποιου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι ίσα μεταξύ τους. Π.χ.

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2\end{bmatrix}$$

Η Σ μπορεί να γραφεί και ως: $\sigma^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}= \sigma^2\,\mathbf{I_3}$

viii. *Τριγωνικός (άνω και κάτω) πίνακας.*

Ο τετραγωνικός πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με 0 **πάνω** από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνικός κάτω** πίνακας. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ c & b & 0\\ f & e & d\end{bmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας με όλα του τα στοιχεία ίσα με 0 **κάτω** από την κύρια διαγώνιο ονομάζεται **τριγωνικός άνω** πίνακας. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}a & d & f\\ 0 & b & e\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}$$

ix. *Μήτρα Toeplitz και συμμετρική μήτρα Toeplitz.*

Οι μήτρες Toeplitz είναι πίνακες που έχουν σε κάθε διαγώνιό τους ίδια στοιχεία. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{bmatrix}$$

Οι **συμμετρικές** μήτρες Toeplitz είναι μήτρες Toeplitz που έχουν την ιδιότητα της συμμετρίας $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Στην οικονομετρία συναντάμε συχνά μήτρες Toeplitz. Η πιο συνηθισμένη είναι η **μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης** μιας χρονολογικής σειράς u_i, η οποία γράφεται ως εξής:

$$Var(u)=\begin{bmatrix} Var(u_1) & Cov(u_1,u_2) & \dots & Cov(u_1,u_t) \\ Cov(u_2,u_1) & Var(u_2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Cov(u_{t-1},u_t) \\ Cov(u_t,u_1) & \dots & Cov(u_t,u_{t-1}) & Var(u_t) \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω μήτρα Var(u) είναι μήτρα Toeplitz εάν ισχύουν δύο υποθέσεις: α) οι μεταβλητές u_i για i=1 έως t έχουν την ίδια διακύμανση $var\ (u_i)$ και β) η συνδιακύμανση δύο στοιχείων u_i εξαρτάται από τη σχετική τους θέση και μόνο. Π.χ. εάν θεωρήσουμε ότι η συνδιακύμανση των u_i, u_{i-1} για i=2,3,4,5 δίνεται από Cov (u_i, u_{i-1}) = $\frac{1}{2}$, τότε η 5×5 μήτρα Toeplitz είναι:

$$\text{Var(u)} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

x. *Σύνθετες μήτρες και διαμέριση.*

Συχνά στην οικονομετρία, όταν οι μήτρες είναι μεγάλου μεγέθους εμφανίζονται αλγεβρικές δυσκολίες. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μελέτη διευκολύνεται εάν οι μήτρες διαμεριστούν σε **υπο-μήτρες**. Η επόμενη μήτρα Α ονομάζεται σύνθετη αν επιμεριστεί σε επιμέρους υπο-μήτρες:

$$\text{A}= \begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Η παραπάνω μήτρα μπορεί να διαμεριστεί ως εξής:

$$\text{A}= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

με $A_{11}= \begin{bmatrix} \alpha & d \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $A_{12}= \begin{bmatrix} f \\ e \end{bmatrix}$, $A_{21} = [0 \quad 0]$ και $A_{22} = [c]$,

Εναλλακτικά η μήτρα Α θα μπορούσε να διαμεριστεί και ως

$$\text{A}= \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

με $A_1= \begin{bmatrix} \alpha & d & f \\ 0 & b & e \end{bmatrix}$ και $A_2= [0 \quad 0 \quad c]$.

7. Πρόσθεση, αφαίρεση και ισότητα πινάκων

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ορίζονται μόνο μεταξύ πινάκων με ίσες διαστάσεις και γίνονται μέσω της πρόσθεσης και αφαίρεσης των αντίστοιχων στοιχείων τους.

$$\text{Έστω A=}\begin{bmatrix}4 & d & 9\\0 & 5 & 7\\3 & 9 & 12\end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix}7 & 8 & 7\\3 & 3 & 5\\3 & c & 1\end{bmatrix}$$

Τότε A+B= $\begin{bmatrix}4 & d & 9\\0 & 5 & 7\\3 & 9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 8 & 7\\3 & 3 & 5\\3 & c & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+7 & d+8 & 9+7\\0+3 & 5+3 & 7+5\\3+3 & 9+c & 12+1\end{bmatrix}$

A-B= $\begin{bmatrix}4 & d & 9\\0 & 5 & 7\\3 & 9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 8 & 7\\3 & 3 & 5\\3 & c & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-7 & d-8 & 9-7\\0-3 & 5-3 & 7-5\\3-3 & 9-c & 12-1\end{bmatrix}$

Δύο πίνακες είναι ίσοι όταν είναι **ίδιων** διαστάσεων και τα επιμέρους στοιχεία τους είναι ίσα $A_{i,j} = B_{j,i}$ για κάθε i,j. Π.χ. οι πίνακες

A= $\begin{bmatrix}5 & d\\0 & 9\end{bmatrix}$ και B= $\begin{bmatrix}5 & 7\\0 & c\end{bmatrix}$ είναι ίσοι εάν d=7 και c=9.

Επίσης ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Αντιμεταθετική: A+B = B+A

Προσεταιριστική: (A+B) + Γ = A + (B+Γ)

Ουδέτερου στοιχείου A + O = O+A = A.

8. Πολλαπλασιασμός πινάκων και ιδιότητες πολλαπλασιασμού

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες A και B (A*B) θα πρέπει ο αριθμός των στηλών της A να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών της B. Ο παραγόμενος πίνακας Γ=AB έχει αριθμό γραμμών ίσο με αυτόν του A και αριθμό στηλών ίσο με αυτόν του B. Επομένως, εάν έχουμε πίνακα A διαστάσεων nxk και πίνακα B διαστάεων kxm, τότε ο πίνακας Γ που προκύπτει ως AB θα είναι διαστάσεων nxm. Η πράξη του πολλαπλασιασμού ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο κάθε γραμμής του A με κάθε στήλη του B. Έστω πίνακας A διαστάσεων nxk και πίνακας B διαστάσεων nxm. Κάθε στοιχείο του πίνακα Γ $\gamma_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} * B_{pj}$

για i=1…n, j=1…m.

Παράδειγμα

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 7\\8 & 3\\9 & 4\end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

Πίνακας Α διαστάσεων 4x2, πίνακας Β διαστάσεων 2x3. Αριθμός στηλών Α=2=αριθμός γραμμών Β, άρα ο πολλαπλασιασμός των δύο πινάκων είναι εφικτός και ο παραγόμενος πίνακας Γ θα είναι διαστάσεων 4x3.

$$A*B=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 7\\8 & 3\\9 & 4\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}=2*1+1*2 & =2*3+1*0 & =2*5+1*6\\=0*1+7*2 & =0*3+7*0 & =0*5+7*6\\=8*1+3*2 & =8*3+3*0 & =8*5+3*6\\=9*1+4*2 & =9*3+4*0 & =9*5+4*6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6 & 16\\14 & 0 & 42\\14 & 24 & 58\\17 & 27 & 69\end{bmatrix}$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού:

α) Προσεταιριστική (ΑΒ)Γ = Α(ΒΓ)

β) Επιμεριστική (Α+Β)*Γ = ΑΓ+ ΒΓ και Α* (Β+Γ) = ΑΒ+ ΑΓ.

γ) Δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα, ΑΒ≠ΒΑ:

δ) $A^0 = I$

ε) $A^1 = A$

9. Ανάστροφος Πίνακας

Ο ανάστροφος ενός nxk πίνακα Α συμβολίζεται με Α’, είναι ένα πίνακας kxn, του οποίου οι γραμμές αντιστοιχούν στις στήλες του Α. Π.χ.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 7\\8 & 3\\9 & 4\end{bmatrix}, \text{ τότε } A'=\begin{bmatrix}2 & 0 & 8 & 9\\1 & 7 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

Ισχύουν οι ιδιότητες:

α) (Α')' = Α

β) (Α+Β)' = Α' + Β'

γ) (ΑΒ)' = Β'Α'

δ) Οι πίνακες Α Α' και Α'Α είναι συμμετρικοί.

10. Γινόμενο διανυσμάτων

Το **εσωτερικό** γινόμενο δύο διανυσμάτων x, y, έκαστο με διάσταση nx1, όπου

x=$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$και y= $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

ορίζεται ως:

$y'x = y_{1*}\, x_1 + y_{2*}x_2 + \ldots .\, y_{n*}x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i * x_i$

ή ως

$x'y = x_{1*}y_1 + x_{2*}y_2 + \ldots .\, x_{n*}y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i * x_i$

Το **εξωτερικό** τους γινόμενο yx' δίνει έναν πίνακα nxn.

$$A=\begin{bmatrix} y_1 * x_1 & y_1 * x_2 & \ldots & y_1 * x_n \\ y_2 * x_1 & y_2 * x_2 & \ldots & y_2 * x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n * x_1 & y_n * x_2 & \ldots & y_n * x_n \end{bmatrix}$$

Όταν το **εσωτερικό** γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με 0 τότε είναι **ορθογώνια**.

11. Μέτρο Διανύσματος

Το **μέτρο** ή **μήκος** ή **νόρμα** ενός διανύσματος x συμβολίζεται με $\|x\|_2$ και είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού του γινομένου. Έστω διάνυσμα x διαστάσεων nx1, τότε $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{x'x}$

Έστω διάνυσμα 2x1 $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, τότε $\|x\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

12. Ίχνος Διανύσματος

Το **ίχνος** ενός τετραγωνικού πίνακα Α nxn δίνεται από το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του και συμβολίζεται με tr(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Π.χ. Α= $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 14 & 3 & 58 \\ 3 & 17 & 27 & 2 \end{bmatrix}$, τότε tr(A) = 5+1+3+2 = 11.

Ιδιότητες:

α) tr(AB) = tr(BA)

β) tr(A+B) = tr(A) + tr(B)

γ) tr(A) = tr(A')

δ) tr(λA) = λ tr(A)

Βιβλιογραφία – Πηγές

Ιωάννης Βενέτης, 2015 Εισαγωγή στην Οικονομετρία, Κεφάλαιο 13, Εκδόσεις Γκότση.