ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018
Χειμερινό Εξάμηνο
Διάλεξη 1 η -2η – Εισαγωγή σε βασικές έννοιες-Διαφορικό-Ακρότατα Πολυμετάβλητων Συναρτήσεων-Langrange

Διδάσκων: Κουνετάς Η. Κωνσταντίνος Επίκουρος Καθηγητής ΤΟΕ

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ Ι

- Εισαγωγή: ακρότατα πολυμεταβλητών συναρτήσεων, ολικό διαφορικό & ολικό διαφορικό δεύτερης τάξεως, τετραγωνικές μορφές, μήτρα Hesse-κοιλότητα (κυρτότητα) και οιονεί κοιλότητα (κυρτότητα) συναρτήσεων, το θεώρημα της περιβάλλουσας, συγκριτική στατική ανάλυση πολυμεταβλητών συναρτήσεων. Στατική αριστοποίηση.
- Κλασσικός προγραμματισμός: αριστοποίηση με περιορισμούς ισότητας. Η μέθοδος Lagrange: συνθήκες πρώτης & δεύτερης τάξης, οικονομική ερμηνεία των πολλαπλασιαστών Lagrange, συγκριτική στατική ανάλυση στον κλασσικό προγραμματισμό.
- Εφαρμογές στην οικονομική: μεγιστοποίηση χρησιμότητας & μη-αντισταθμιστικές καμπύλες ζήτησης, ελαχιστοποίηση δαπάνης καταναλωτή & αντισταθμιστικές καμπύλες ζήτησης, ελαχιστοποίηση κόστους επιχείρησης.

ΛΙΓΑ ΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΙΙ

- Μη Γραμμικός Προγραμματισμός: αριστοποίηση με περιορισμούς ανισότητας. Συνθήκες Kuhn-Tucker (K-T). O όρος περιορισμού. Οι συνθήκες K-T ως ικανές και αναγκαίες συνθήκες. Οιονεί κοίλος, μη-γραμμικός προγραμματισμός: συνθήκες Arrow-Enthoven. Εφαρμογές στην οικονομική: λύση «γωνίας» σε προβλήματα μεγιστοποίησης χρησιμότητας & ελαχιστοποίησης δαπάνης, γενίκευση συνθηκών ελαχιστοποίησης κόστους και μεγιστοποίησης κέρδους επιχειρήσεων.

- Διαφορικές εξισώσεις & εξισώσεις διαφορών, διαγράμματα φάσης, Συστήματα γραμμικών ή μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων & εξισώσεων διαφορών , τοπική ανάλυση σταθερότητας, εισαγωγή στο δυναμικό προγραμματισμό με προσδιοριστικά (μη-τυχαία) προβλήματα περιορισμένου χρονικού ορίζοντα.

Ακρότατα πολυμεταβλητών συναρτήσεων

- **Αξίωμα Ορθολογικής Συμπεριφοράς:**Τα οικονομικά υποκείμενα επιλέγουν μέσα απο ένα πλέγμα αποφάσεων αυτές που τους μεγιστοποιούν μια συνάρτηση ωφελείας ή που τους ελαχιστοποιούν μαι συνάρτηση κόστους σχηματίζοντας ένα συγκεκριμένο χώρο εφικτών για αυτούς λύσεων.

LECTURES 1&2

- Εισαγωγή: ακρότατα πολυμεταβλητών συναρτήσεων, ολικό διαφορικό & ολικό διαφορικό δεύτερης τάξεως, τετραγωνικές μορφές, μήτρα Hesse-κοιλότητα (κυρτότητα) και οιονεί κοιλότητα (κυρτότητα) συναρτήσεων, το θεώρημα της περιβάλλουσας, συγκριτική στατική ανάλυση πολυμεταβλητών συναρτήσεων. Στατική αριστοποίηση.
- Κλασσικός προγραμματισμός: αριστοποίηση με περιορισμούς ισότητας. Η μέθοδος Lagrange: συνθήκες πρώτης & δεύτερης τάξης, οικονομική ερμηνεία των πολλαπλασιαστών Lagrange, συγκριτική στατική ανάλυση στον κλασσικό προγραμματισμό.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ Ι

- **Αντικειμενική συνάρτηση (objective function):** Καλείται η συνάρτηση της παρακάτω μορφής:

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

- Το σύνολο των εφικτών λύσεων (set of feasible solutions) ορίζεται από ένασ συστημα ανισόσεων αλλά και εξισώσεων με την γενική μορφή:

$$r\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq, \geq c_i$$

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq, \geq c_j$$

$$s\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq, \geq l_k$$

- Ζητάμε ελαχιστοποίηση-μεγιστοποίηση

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΙΙ

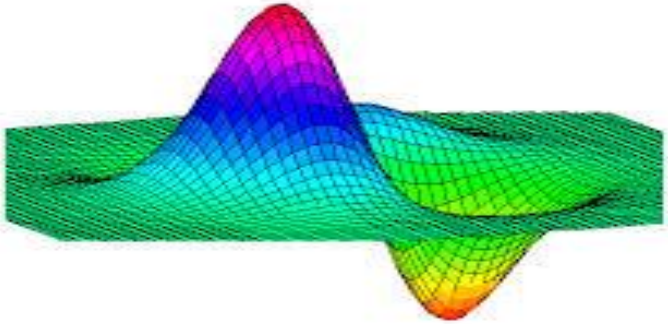
- **Δεσμευμένη βελτιστοποίηση (constrained optimization):** Το πρόβλημα μας περιέχει έναν περιορισμό.
- **Μη Δεσμευμένη βελτιστοποίηση (unconstrained optimization):** : Το πρόβλημα μας δεν περιέχει κανέναν περιορισμό και το σύνολο εφικτών λύσεων είναι το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης.λείται η συνάρτηση της παρακάτω μορφής:

ΘΕΩΡΙΑ

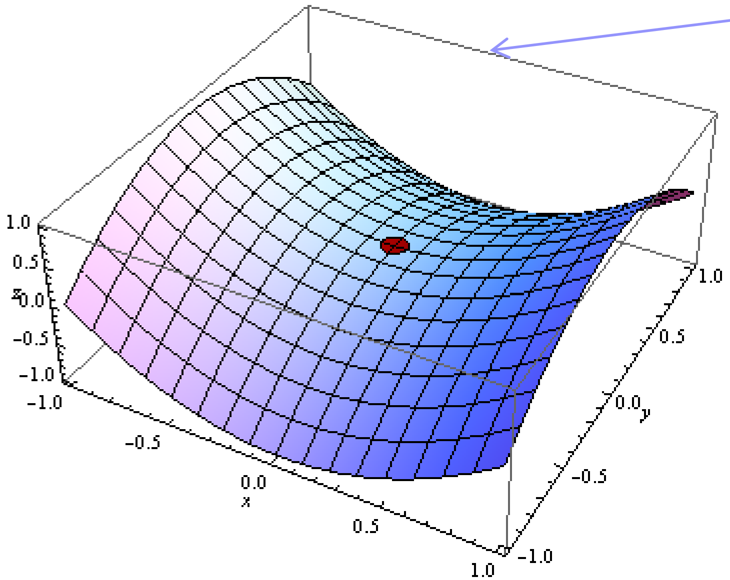
Για μια συνάρτηση $f: X \subset R^n \to R$ ένα βέλτιστο σημείο μπορεί να είναι:

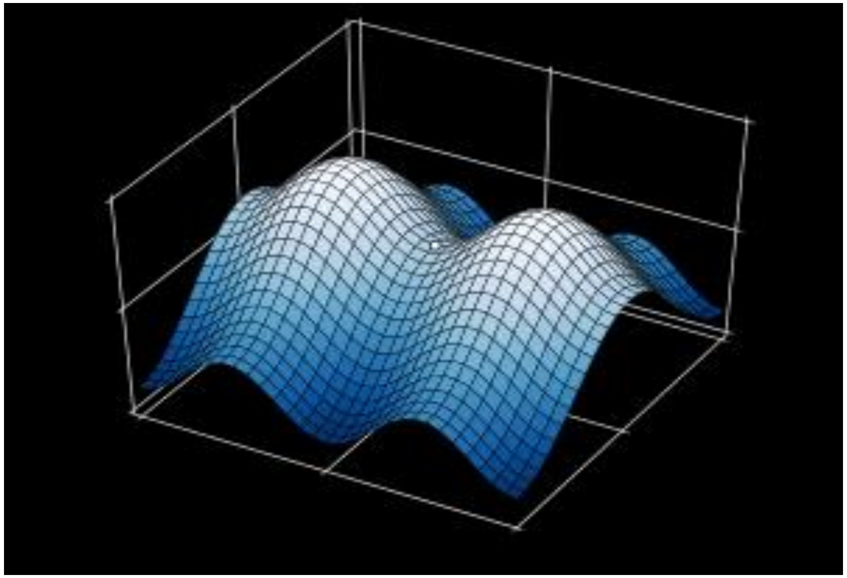
- Σφαιρικό μέγιστο (ολικό):Ενα σημείο x* το οποίο ικανοποιεί την σχέση $f\left(x^*\right) \geq f(x), \forall x \in X$
- Αυστηρά σφαιρικό μέγιστο:Ενα σημείο x* το οποίο ικανοποιεί την σχέση $f\left(x^*\right) > f(x), \forall x \in X, x \neq x^*$
- Τοπικό (σχετικό) μέγιστο:Ενα σημείο x* το οποίο ικανοποιεί την σχέση $f\left(x^*\right) \geq f(x), \forall x \in N_\varepsilon\left(x^*\right) \cap \mathrm{X}$
- Αυστηρά τοπικό μέγιστο:Ενα σημείο x* το οποίο ικανοποιεί την σχέση

  $$f\left(x^*\right) > f(x), \forall x \in N_\varepsilon\left(x^*\right) \cap \mathrm{X}, x \neq x^*$$
- Συνθήκες βελτιστότητας: Χαρακτηρίζουμε τις βέλτιστες λύσεις σε ένα πρόβλημα αριστοποίησης (ικανές και αναγκαίες). Οι ικανές εξασφαλίζουν ότι ένα σημείο είναι βέλτιστο. Οι αναγκαίες;



Saddle point
Σαγματικό Σημείο





ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση της μορφής: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ουσιαστικά οι συνθήκες πρώτου βαθμού είναι οι αναγκαίες αλλά όχι οι ικανές συνθήκες για την εύρεση ή όχι ελαχίστου ή μεγίστου. Διαγραμματικά πρόκειται για την εφαπτομένη την οποία μπορούμε να φέρουμε έχοντας θεωρήσει ότι μπορούμε να μειώσουμε τις διαστάσεις της συγκεκριμένης καμπύλης και να την προβάλλουμε σε δισδιάστατο επίπεδο. Θεωρείται όιτ εκφράζουν οικονομικές αρχές; (Να γίνει ένα παράδειγμα σε 3-διαστάσεις.)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\nabla f(x^*) = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| = [0, 0, \ldots, 0] \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Οπως ήδη γνωρίζετε το να χαρακτηρίσουμε ένα σημείο ως τοπικό ή ολικό ελάχιστο, μέγιστο ή σαγματικό σημείο απαιτεί και την παραγωγή των συνθηκών δεύτερης τάξης. Οι συγκεκριμενες συνθήκες χρησιμοποιούν τις δεύτερης τάξεως παραγώγους δηλαδή τις

$$f_{x_1x1}(\bullet),\ f_{x_2x_2}(\bullet),\ f_{x_1x_2}\,0$$

Θυμηθείτε σας παρακαλώ το θεώρημα του Young!!! Επίσης θεωρείστε την αποκαλούμενη διακρίνουσα ως εξής:

$$\Delta = f_{x_1x1}(\bullet)\, f_{x_2x_2}(\bullet) - \left(f_{x_1x_2}(\bullet)\right)^2$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΟΛΟΓΙΑ

Μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1.ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

$$f_x(\bullet) = f_y(\bullet) = 0$$

$$f_{xx}(\bullet) < 0,\ f_{yy}(\bullet) < 0$$

$$f_{xx}(\bullet)\, f_{yy}(\bullet) - \left(f_{xy}(\bullet)^2 \right) > 0$$

2.ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$$f_x(\bullet) = f_y(\bullet) = 0$$

$$f_{xx}(\bullet) > 0,\ f_{yy}(\bullet) > 0$$

$$f_{xx}(\bullet)\, f_{yy}(\bullet) - \left(f_{xy}(\bullet)^2 \right) > 0$$

3.ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

$$f_x(\bullet) = f_y(\bullet) = 0$$

$$f_{xx}(\bullet)\, f_{yy}(\bullet) - \left(f_{xy}(\bullet)^2 \right) < 0$$

4.ΚΑΜΜΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ (ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ)

$$f_x(\bullet) = f_y(\bullet) = 0$$

$$f_{xx}(\bullet)\, f_{yy}(\bullet) - \left(f_{xy}(\bullet)^2 \right) = 0$$

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ-ΜΗΤΡΩΝ Ι

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Ο υπολογισμός της αποκαλούμενη εσσιανής μήτρας (Hessian matrix) περιλαμβάνει το υπολογισμό της:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_3 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f\,(\bullet)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_n} \\ \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & \partial f_{x_n x_n} \end{vmatrix}$$

ΧΡΗΣΗ ΠΙΝΑΚΩΝ-ΜΗΤΡΩΝ ΙΙ

Για την ανάπτυξη των περιπτώσεων σε σχέση με τον χαρακτηρισμό του ακροτάτου θεωρείται ότι θα πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε την συνάρτηση προς μελέτη και φυσικά το πόσες μεταβλητές περιέχει.Βασική έννοια αποτελεί και η ελλάσονα υποορίζουσα.Για παράδειγμα

$$H = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

$$H_1 = f_{x_1x_1}, H_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΟΛΟΓΙΑ

Μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1.ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

$$(-1)^i H_i > 0, \forall i \in \{2,3,4,..,n\}, H_1 < 0$$

2.ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$$H_1, H_2, .., H_n > 0,$$

$$H_i > 0, \forall i \in \{1,2,3,4,..,n\}$$

3.ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

Οριζουσες αρτιας ταξης <0

4.ΚΑΜΜΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗ (ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ)

Παραδειγμα

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ

Η αλγεβρική έκφραση $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ με $P(x,y), Q(x,y)$ συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους είναι ολικό διαφορικό εάν και μόνο εάν ισχύει ότι

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Τότε η αντίστοιχη συνάρτηση είναι

$$f(x,y) = \int_{x}^{x_0} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt + c$$

όπου (x_0, y_0) είναι ένα σημείο του πεδίου ορισμού της f(x,y) και c μια σταθερά

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ Ι

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης με μία μεταβλητή το διαφορικό ορίζεται ως εξής: $dz = f^{'}(x)dx,$

$$d^2z = d(dz) = f^{''}(x)dx$$

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης με δύο μεταβλητές $z = f(x, y)$ ορίζεται ως $dz = f_x dx + f_y dy$ ενώ το δεύτερης τάξεως διαφορικό δίνεται ως εξής:

$$d^2z = d(dz) = d\left(f_x dx + f_y dy\right) = \ldots =$$

$$= f_{xx}dx^2 + f_{yy}dy^2 + 2f_x f_y dxdy$$

Τι όμως εκφράζει το διαφορικό;

$$f(x, y) = x^3 + 5xy - y^2,$$

$$dz = ?, d^2z = ?$$

Μεθοδος Langrage I

Θεωρούμε την συνάρτηση $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές ύπο εξέταση ικανοποιούν m εξισώσεις της μορφής:

$$g^i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, i = 1, 2, \ldots, m (m < n)$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε την συνάρτηση:

$$\phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) =$$

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

Μεθοδος Lagrange II

- Συνεπώς:

$$H = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} & g_1^1 & g_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} & g_n^1 & g_n^m \\ g_1^1 & \cdots & g_n^1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_m^1 & \cdots & g_n^m & & \end{vmatrix}$$

Εάν οι συναρτήσεις f,g είναι κλάσεις C1 σε κάποια περιοχή του σημείου P(α_i) και επίσης εάν

$$rank\begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_2^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_n^2 \\ & & \\ g_1^m & g_2^m & g_n^m \end{pmatrix} = m, \phi_i = (a_1, \ldots, a_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0$$

$$g_i = (a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Μεθοδος Lagrange III

- Τότε μπορούμε να μιλήσουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις αποτελεούν σύστημα αναγκαίων συνθηκών για να έχει η συνάρτηση f(), στο σημείο P() σχετικό ακρότατο υπό τις συνθήκες gi.Τότε μπορούμε να μιλήσουμε για ακρότατα εξασφαλίζοντιας ότι οι συναρτήσεις f(), g() είναι κλάσης C_2. Το λ καλείται πολλαπλασιαστής langrange

Μεθοδος Lagrange IV

1.ΤΟΠΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ

$H_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_\nu ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) > 0, m$ αρτιος

$i = 1, 2, \ldots, n - m$

2.ΤΟΠΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ

$H_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) < 0, m$ περιττος

$i = 1, 2, \ldots, n - m$

3.Για το σημειο P

$(-1)^n H_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) < 0, n$ αρτιος

$i = 1, 2, \ldots, n - m$

4.Για το σημειο P

$(-1)^n H_i\left(a_1, a_2, \ldots, a_n ; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\right) < 0, n$ περιττος

$i = 1, 2, \ldots, n - m$

Συγκριτική Στατική Ι

Τα τοπικά ακρότατα είναι λύσεις (σημεία ισορροπίας) και αποτελεούν αντικείμενα συγκριτική στατικής ανάλυσης. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση της μορφής $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)$

Τότε εφαρμόζοντας την ανάλογη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε τα τοπικά ακρότατα λύνοντας το σύστημα των $\dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n; a)}{\partial x_j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$

Εάν οι συνθήκες του θεώρηματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων ικανοποιούνται τότε υπάρχουν συναρτήσεις $x_i^* = x_i^*(a), i = 1, 2, \ldots, n$ (choice functions) οι οποίες εκφράζουν τις βέλτιστες τιμές των x_i^* των μεταβλητών x_i για τις παραμέτρους α.

Συγκριτική Στατική ΙΙ

Με αντικατάσταση θα μπορούμε να έχουμε τις συναρτήσεις με την παρακάτω μορφή ως σύνθετες συναρτήσεις:

$$q_j\left(x_1^*(a), x_2^*(a), \ldots, x_n^*(a); a\right),\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Με αλυσωτή παραγώγιση θα μπορούσαμε ως προς α θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1^* / \partial a \\ \\ \partial x_n^* / \partial a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{1a} \\ \cdots \\ -f_{na} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} f_{1a} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{na} & & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix}}, \ldots, \frac{\partial x_n^*}{\partial a} = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1a} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{na} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & & f_{nn} \end{vmatrix}}$$

Συγκριτική Στατική ΙΙΙ

Η συγκριτική στατική ανάλυση ασχολείται με την μεταβολή των ενδογενών μεταβλητών ενός ποδείγματος όταν μεταβάλλονται οι τιμές των εξωγενών του. Ως πολλαπλασιαστής συγκρητικής στατιτκής Τα τοπικά ακρότατα είναι λύσεις (σημεία ισορροπίας) και αποτελεούν αντικείμενα συγκριτική στατικής ανάλυσης. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση της μορφής

Τότε εφαρμόζοντας την ανάλογη διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε τα τοπικά ακρότατα λύνοντας το σύστημα των

Εάν οι συνθήκες

Ιακωβιανή Ορίζουσα

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots,\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

με κοινό πεδίο ορισμού $A \subseteq R^n$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μερικές παραγώγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Η Ιακωβιανή ορίζουσα των παραπάνω συναρτήσεων καλείται η παρακάτω ορίζουσα:

$$\frac{D(\ )}{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$$

Θεώρημα Περιβάλλουσας (Δεσμευμένη)

Εάν $X=(x_1,x_2)$ μια ενδογενής μεταβλητή, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ ΄μια παράμετρος,για κάθε Α υπάρχει μια μοναδική θέση x*(α) όπου βελτιστοποιείται η συνάρτηση f(x,α) που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης.

$f^*(\alpha)=f\left(x^*(\alpha),\alpha\right)$ βέλτιστη τιμή της συνάρτησης

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial f\alpha_j}=\frac{\partial f}{\partial f\alpha_j}\,f\left(x^*(a),a\right)$$

Λήμμα Hotelling's

Για την συνάρτηση $\Pi = pf(K,L) - rK - wL$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p}(p,r,w) = Q\left(K^*(p,r,w), L^*(p,r,w)\right) = F(p,r,w)$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial r}(p,r,w) = -K^* = g(p,r,w)$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial w}(p,r,w) = -L^* = h(p,r,w)$$

Μας δείχνουν την επίδραση που έχει στο μέγιστο κέρδος μια μεταβολη των παραμέτρων p,w,r.

Λήμμα Shepard’s

Το λήμμα του Shepard στηρίζεται στην πρόταση ότι η μερική παράγωγος της συνάρτησης ελαχίστου κόστους ως προς έναν παραγωγικό συντελεστή προσδιορίζει την συνάρτηση ζήτησης του συντελεστή.

Θεώρημα Περιβάλλουσας (μη-Δεσμευμένη)

Εάν $X=(x_1,x_2)$ μια ενδογενής μεταβλητή, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$

Σε ένα πρόβλημα βελτιστιποίησης της συνάρτησης f(x,α) σε σύνολο που ορίζεται με περιορισμό ισότητας ισχύει: $\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial f\alpha_j}=\frac{\partial L}{\partial f\alpha_j}\, f\left(x^*(a),\lambda^* a\right)$

Όπου $f^*(\alpha)$ η συνάρτηση βέλτιστης τιμής και $\frac{\partial L}{\partial f\alpha_j}$ υπολογίζεται στην βέλτιστη λύση.

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΩ

- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ALPHA C. CHIANG, KEVIN WAINWRIGHT
- Μαθηματικά Οικονομικών Επιστημών, Hoy Michael, Livernois John, McKenna Chris, Stengos Thanasis.(Κεφάλαια 13 έως 15)
- Μαθηματικές μέθοδοι στα οικονομικά, Ξεπαπαδέας Αναστάσιος Π., Γιαννίκος Ιωάννης Χ. (Κεφάλαια 1&2 απο το πράσινο βιβλίο)
- Μαθηματικά οικονομικής ανάλυσης, Τσουλφίδης Λευτέρης
- Να λυθούν οι ασκήσεις που μοιράστηκαν στην τάξη!

Επικοινωνία με τον Διδάσκοντα

- E-mail:Kounetas@upatras.gr
- Ώρες Γραφείου

Δευτέρα: 11.00-13.00

Τρίτη:11.00-12.00

(*Η κατόπιν επικοινωνίας με τον διδάσκοντα*)