Διάλεξη 7 Σημειώσεις

1 Ανάπτυγμα ή "προσέγγιση" Taylor (και Maclaurin)

Πολλά θεωρητικά και υπολογιστικά προβλήματα στην οικονομική απαιτούν την **τοπική (local)** προσέγγιση μίας συνάρτησης γύρω από συγκεκριμένο ή συγκεκριμένα σημεία.

Η τοπική προσέγγιση ή ανάπτυξη της συνάρτησης διευκολύνει την αναλυτική διερεύνηση ή επίλυση διαφόρων (οικονομικών) προβλημάτων.

Για παράδειγμα

- σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων της οικονομικής, οι συναρτήσεις που υιοθετούνται υπόκεινται σε συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ. ομαλότητας, ή οριακές συνθήκες) χωρίς όμως να περιορίζεται η αναλυτική συναρτησιακή μορφή τους
- συχνά, η επίλυση σύνθετων (και ρεαλιστικότερων) προβλημάτων βελτιστοποίησης στην οικονομική θεωρία και οικονομετρία οδηγεί σε **Σ.Π.Τ** οι οποίες δεν έχουν ή είναι δύσκολο να βρεθεί η ανηγμένη μορφή τους. Συνεπώς "προσεγγίζονται" με δεδομένο βαθμό ακρίβειας

Γνωστές τοπικές μέθοδοι προσέγγισης

- Taylor ανάπτυγμα
- Padé ανάπτυγμα

Γνωστές συνολικές (global) μέθοδοι προσέγγισης

- L^p προσέγγιση (ορθογώνια πολυώνυμα κτλ)
- Μέθοδοι interpolation (Lagrange, Hermite, Chebyshev, τμηματική πολυωνυμική)

- Μέθοδοι παλινδρόμησης

Για τις ανάγκες του μαθήματος, **ανάπτυγμα** μίας συνάρτησης $y = f(x)$ γύρω από το σημείο x_0 σημαίνει "μετασχηματισμός" της $f(x)$ σε ένα πολυώνυμο με συντελεστές εκφρασμένους ως συναρτήσεις των παραγώγων της συνάρτησης,

$$f'(x_0) \quad , \quad f''(x_0) \quad , \quad f'''(x_0)\,, \ldots \quad \text{κτλ}$$

Δηλαδή χρησιμοποιούμε τις παραγώγους ώστε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση γύρω από δεδομένο σημείο.

1.1 Παρένθεση: Παραγοντικό ακέραιου αριθμού

Το παραγοντικό φυσικού ακέραιου n συμβολίζεται με $n!$ και δίνεται από

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ενώ

$$0! = 1 \quad \text{και} \quad 1! = 1$$

Για παράδειγμα κάποιες άλλες τιμές του παραγοντικού δίνονται στον παρακάτω πίνακα

$$\begin{aligned}
2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \\
6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\
7! &= \ldots = 5040
\end{aligned}$$

1.2 Παρένθεση

- Μία συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και θα γράφουμε ότι $f(x) \in C^{(n)}$ όταν είναι συνεχής και όταν υπάρχουν και είναι συνεχείς οι πρώτες n παράγωγοι της συνάρτησης.

- Η $n-$οστή παράγωγος θα συμβολίζεται για ευκολία ως $f^{(n)}$ άρα $f' = f^{(1)}$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$, ...
- Επίσης θα θεωρούμε ότι $f^{(0)} = f$

1.3 Ανάπτυγμα Maclaurin

Έστω ένα πολυώνυμο $n-$οστής τάξης

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + ... + a_n x^n$$

Αν παραγωγίσουμε το πολυώνυμο n φορές τότε οι πρώτες n παράγωγοι δίνονται από

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + ... + na_n x^{n-1} \\
f''(x) &= 2a_2 + 3(2)a_3 x + 4(3)a_4 x^2 + 5(4)a_5 x^3 + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} \\
f'''(x) &= 3(2)a_3 + 4(3)(2)a_4 x + 5(4)(3)a_5 x^2 + ... + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \\
f^{(4)}(x) &= 4(3)(2)a_4 + 5(4)(3)(2)a_5 x + ... + n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)a_n
\end{aligned}$$

Έστω ότι υπολογίζουμε τις n πρώτες παραγώγους στο σημείο $x_0 = 0$ ώστε να τις απλοποιήσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο. Τότε

$$\begin{array}{ccc}
f'(0) = a_1 & \Rightarrow & a_1 = \frac{f'(0)}{1!} \\
f''(0) = 2a_2 & \Rightarrow & a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \\
f'''(0) = 3(2)a_3 & \Rightarrow & a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} \\
f^{(4)}(0) = 4(3)(2)a_4 & \Rightarrow & a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3)...(3)(2)(1)a_n & \Rightarrow & a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}
\end{array}$$

Επίσης, στο $x_0 = 0$ η τιμή της συνάρτησης δίνεται από

$$f\left(0\right) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + +... + a_n \cdot 0^n = a_0$$

Άρα το πολυώνυμο $n-$οστής τάξης

$$f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + ... + a_n x^n$$

μπορεί να γραφεί **ακριβώς** μέσω της ανάπτυξης

$$f\left(x\right) = f\left(0\right) + \frac{f'\left(0\right)}{1!}x + \frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2 + \frac{f'''\left(0\right)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}\left(0\right)}{4!}x^4 + ... + \frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n$$

Η προηγούμενη σχέση ονομάζεται **ανάπτυγμα Maclaurin** του πολυωνύμου $f(x)$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$

1.3.1 Παράδειγμα

Έστω το πολυώνυμο

$$f\left(x\right) = 5x^2 + 6x + 7$$

Βεβαιώστε ότι η ανάπτυξη Maclaurin δεύτερης τάξης «δίνει» το πολυώνυμο $f\left(x\right)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(0\right) &= 7 \\ f'\left(x\right) &= 10x + 6 \Rightarrow f'\left(0\right) = 6 \\ f''\left(x\right) &= 10 \Rightarrow f''\left(0\right) = 10 \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\
&= 7 + \frac{6}{1!}x + \frac{10}{2!}x^2 \\
&= 5x^2 + 6x + 7
\end{aligned}
$$

Παρατηρήστε ότι αναπτύγματα τάξης $n > p$ για πολυώνυμα τάξεως p δεν έχουν νόημα αφού $f^{(n)} = 0$ για κάθε $n > p$.

1.4 Ανάπτυγμα Taylor πολυωνύμου

Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε το σημείο $x_0 = 0$ ως το σημείο "ανάπτυξης" της πολυωνυμικής συνάρτησης. Το προηγούμενο συμπέρασμα γενικεύεται μέσω του **αναπτύγματος Taylor** πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)$ γύρω από οποιοδήποτε σημείο x_0.

Έτσι, για κάθε $f(x) \in C^n$ τουλάχιστον σε μία γειτνίαση του x_0 έχουμε το **ανάπτυγμα Taylor** ,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

1.4.1 Παράδειγμα

Υπολογίστε το **ανάπτυγμα Taylor** της $f(x) = 2x^3 + 2x + 10$ γύρω από το $x_0 = 1$.

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την $f(1) = 2 + 2 + 10 = 14$ ενώ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2 \Rightarrow f'(1) = 8 \\ f''(x) &= 12x \Rightarrow f''(1) = 12 \\ f'''(x) &= 12 \Rightarrow f'''(1) = 12 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= 14 + \frac{8}{1!}(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 \\ &= 14 + 8(x-1) + 6(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \\ & \ldots \\ &= 2x^3 + 2x + 10 \end{aligned}$$

1.5 Ανάπτυγμα Taylor για συναρτήσεις $f \in C^{(n)}$

Έχοντας ως βάση το θεώρημα Taylor μπορούμε να αναπτύξουμε οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ γύρω από ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Συγκεκριμένα,

Θεώρημα Taylor: *Έστω ότι $n \geq 1$ ακέραιος και η συνάρτηση $f(x)$ είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, β), δηλαδή $f(x) \in C^{(n)}$ με $x, x_0 \in (a, \beta)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε την $f(x)$ με βάση το παρακάτω πολυωνυμικό ανάπτυγμα*

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots \\ &\quad \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + R_n\left(x, x_0\right) \\ &= P_n + R_n \end{aligned}$$

όπου P_n ένα πολυώνυμο $n-$οστής τάξης όπως παραπάνω και R_n καλείται «υπόλοιπο» (remainder) το οποίο τείνει στο μηδέν καθώς το $x \to x_0$

- Το πολυώνυμο μηδενικής τάξης P_0 είναι $P_0 = f\left(x_0\right)$
- Το πολυώνυμο πρώτης τάξης P_1 είναι $P_1 = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right)$
- Το πολυώνυμο δεύτερης τάξης P_2 είναι $P_2 = f\left(x_0\right) + \frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2$
- ...
- Το **υπόλοιπο** R_n δίνει σαφώς το σφάλμα ή απόκλιση μίας οποιασδήποτε πολυωνυμικής προσέγγισης P_n από την συνάρτηση $f(x)$

$$f(x) - P_n = R_n$$

Το υπόλοιπο R_n μπορεί να είναι θετικό $f(x) - P_n = R_n > 0$ (**υποεκτίμηση**) ή αρνητικό $f(x) - P_n = R_n < 0$ όταν **υπερεκτιμά** η προσέγγιση P_n την συνάρτηση $f(x)$. Θα δούμε ότι συνήθως ενδιαφερόμαστε για την απόλυτη τιμή του υπολοίπου $|R_n|$ δηλαδή για το μέγεθος του σφάλματος.

- **Αν παραλείψουμε το υπόλοιπο R_n, τότε γράφουμε $f(x) \approx P_n$, το οποίο διαβάζεται ως** *«$n-$οστής τάξης προσέγγιση Taylor της συνάρτησης»* .

1.6 Παραδείγματα

1.6.1 Προσέγγιση (Taylor) πρώτης τάξης ή γραμμική προσέγγιση

Αν επιλέξουμε $n = 1$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= P_1 + R_1 \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_1 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1 \end{aligned}$$

ή

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Η γραμμική προσέγγιση της συνάρτησης ημιτόνου $\sin x$ στο σημείο $x_0 = 0$ δίνεται από

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \Rightarrow \cos 0 = 1 \\ \sin x &\approx \sin 0 + (\cos 0)(x - 0) \\ &\approx 0 + 1 \cdot x \end{aligned}$$

δηλαδή για τιμές του x κοντά στο 0 έχουμε $\sin x \approx x$, π.χ.,

$$\sin 0.05 = 0.049979 \approx 0.05$$

1.6.2 Γραμμική προσέγγιση διωνυμικής συνάρτησης

Έστω ότι

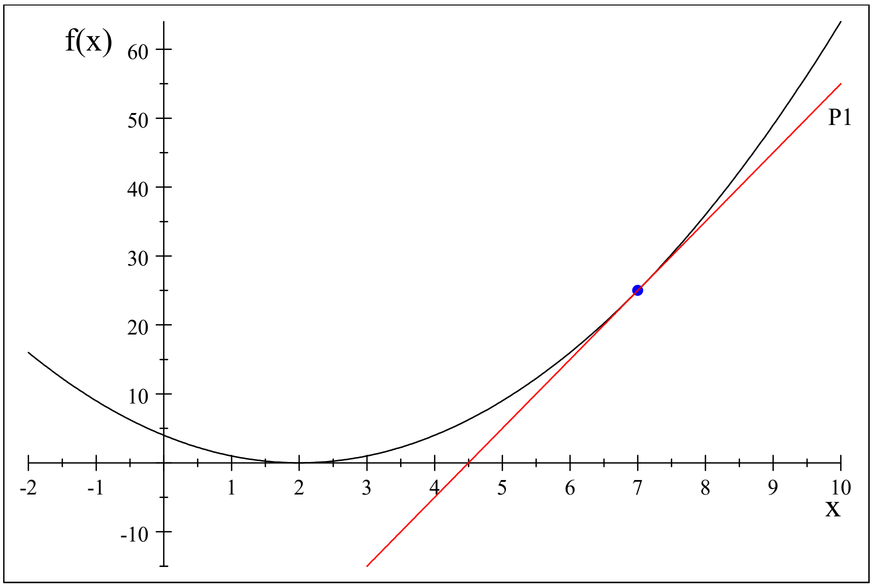
$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

με πρώτη παράγωγο

$$f'(x) = 2x - 4$$

Η γραμμική προσέγγιση του πολυωνύμου στο σημείο $x_0 = 7$ δίνεται από

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
&\approx \left(x_0^2 - 4x_0 + 4\right) + (2x_0 - 4)(x - x_0) \\
&\approx \left(7^2 - 4 \cdot 7 + 4\right) + (2 \cdot 7 - 4)(x - 7) \\
&\approx 25 + 10(x - 7) \\
&\approx -45 + 10x
\end{aligned}$$



Η $f(x) = x^2 - 4x + 4$ στο διάστημα $[-2, 10]$ και η $P_1 = -45 + 10x$

1.6.3 Προσέγγιση δεύτερης τάξης ή τετραγωνική προσέγγιση

Αν επιλέξουμε $n = 2$ τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= P_2 + R_2 \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_2 \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2 \end{aligned}$$

ή

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

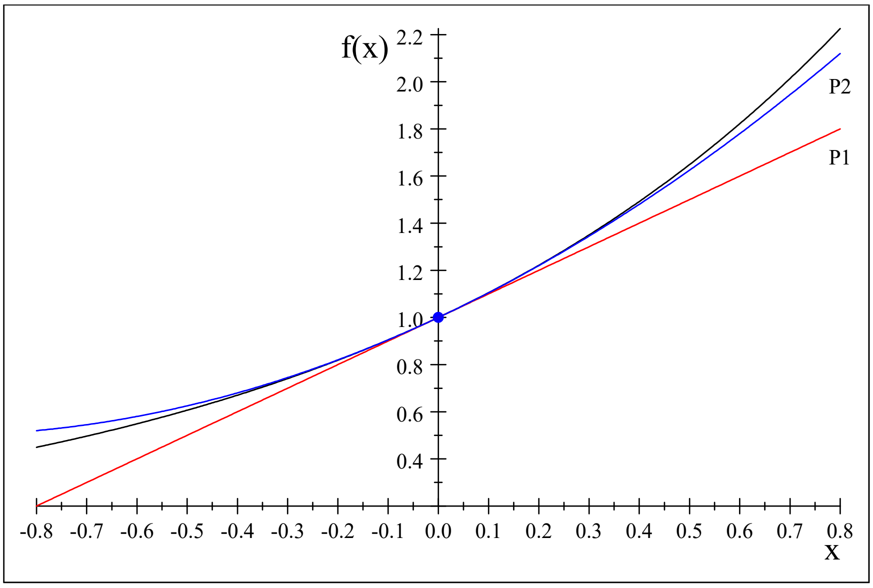
1.6.4 Τετραγωνική προσέγγιση εκθετικής συνάρτησης, $f(x) \approx P_2$

Έστω $f(x) = e^x$. Η τετραγωνική προσέγγιση της $f(x) = e^x$ στο σημείο $x_0 = 0$ δηλαδή η τιμή της $f(x)$ για x κοντά στο 0 δίνεται από

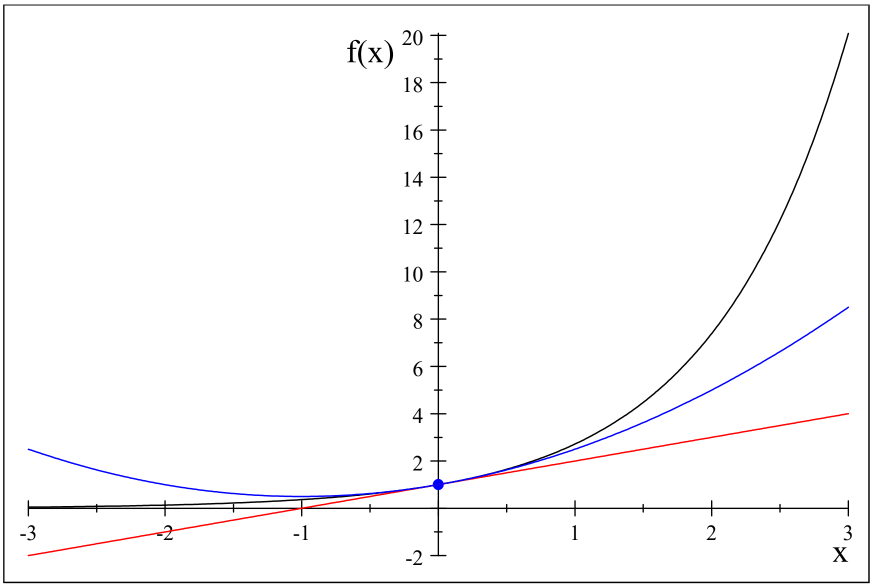
$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \ , \ f'(x) = e^x \ , \ f''(x) = e^x \\ f(0) &= 1 \ , \ f'(0) = 1 \ , \ f''(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\ &\approx f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 \\ &\approx 1 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2}(x - 0)^2 \\ &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει την εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ (μαύρη καμπύλη), την γραμμική προσέγγιση $f(x) \approx 1 + x$ (κόκκινη γραμμή), και την τετραγωνική προσέγγιση $f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (μπλέ καμπύλη), της εκθετικής για τιμές του x στο διάστημα $[-0.8, 0.8]$



Εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ (μαύρη καμπύλη), γραμμική προσέγγιση $f(x) \approx P_1 = 1 + x$ (κόκκινη γραμμή), και τετραγωνική προσέγγιση $f(x) \approx P_2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (μπλέ καμπύλη) για τιμές του x στο διάστημα $[-0.8, 0.8]$



Το παραπάνω γραφημα με το x να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $-3 \leq x \leq 3$

1.6.5 Τετραγωνική προσέγγιση λογαριθμικής συνάρτησης

Έστω ότι $f(x) = \ln x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Η προσέγγιση δεύτερης τάξης $f(x) \approx P_2$ της λογαριθμικής συνάρτησης δίνεται από

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x \ , \ f'(x) = \frac{1}{x} \ , \ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \\
f(x_0) &= \ln x_0 \ , \ f'(x_0) = \frac{1}{x_0} \ , \ f''(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
&\approx \ln x_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0) - \frac{1}{2x_0^2}(x - x_0)^2 \\
&\approx \underbrace{\ln x_0 + \frac{x}{x_0} - 1}_{\text{πρώτης τάξης } P_1} - \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + x_0^2}{2x_0^2} \\
&\approx \ln x_0 + \frac{x}{x_0} - \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2x_0^2} + \frac{x}{x_0} \\
&\approx \underbrace{\ln x_0 + \frac{2x}{x_0} - \frac{x^2}{2x_0^2} - \frac{3}{2}}_{\text{δεύτερης τάξης } P_2}
\end{aligned}$$

- **Για παράδειγμα,** έστω ότι το $x_0 = 1$ (για ευκολία) τότε

$$f(x) \approx P_1 = \ln 1 + \frac{x}{1} - 1 = x - 1$$

ενώ

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx P_2 \\
&= \ln 1 + \frac{2x}{1} - \frac{x^2}{2 \cdot 1^2} - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Έτσι, ο φυσικός λογάριθμος του $x = 1.1$ είναι ίσος με

$$\ln(1.1) = 0.0953101798043249...$$

και προσεγγίζεται από το ανάπτυγμα πρώτης τάξεως

$$f(1.1) \approx P_1 = 1.1 - 1 = 0.1$$

ή το ανάπτυγμα δεύτερης τάξεως

$$f(1.1) \approx P_2 = -\frac{3}{2} + 2(1.1) - \frac{(1.1)^2}{2} = 0.095$$

- **Για παράδειγμα,** έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τον φυσικό λογάριθμο του 2.5 δηλαδή να υπολογίσουμε την τιμή $\ln(2.5)$. Θέτουμε $x_0 = e$, **(i)** λόγω εγγύτητας στο 2.5 και **(ii)** επειδή η συγκεκριμένη επιλογή προσφέρει υπολογιστική ευκολία: $\ln e = 1$. Τότε, μέσω της τετραγωνικής προσέγγισης έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx P_2 = \ln x_0 + \frac{2x}{x_0} - \frac{x^2}{2x_0^2} - \frac{3}{2} \\
&= \underbrace{\ln e}_{\text{υπολογίζεται εύκολα}} + \frac{2x}{e} - \frac{x^2}{2e^2} - \frac{3}{2} \Rightarrow \\
f(2.5) &\approx \ln e + \frac{5}{e} - \frac{6.25}{2e^2} - \frac{3}{2} \\
&= 1 + \frac{5}{e} - \frac{6.25}{2e^2} - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{5}{e} - \frac{6.25}{2e^2} \\
&= 0.9164744457...
\end{aligned}$$

ενώ η τιμή του φυσικού λογαρίθμου του 2.5 είναι ίση με

$$\ln(2.5) = 0.9162907319...$$

1.7 Υπόλοιπο Lagrange

- Είναι εμφανές ότι καθώς η τιμή του x απομακρύνεται από το x_0, η προσέγγιση γίνεται ολοένα και **λιγότερο ακριβής**
- Επίσης, φαίνεται ότι καθώς αυξάνουμε την τάξη προσέγγισης n, η πολυωνυμική προσέγγιση P_n γίνεται ολοένα και **περισσότερο ακριβής**

Για να χρησιμοποιήσουμε *"έξυπνα"* τη μέθοδο προσέγγισης πρέπει να ξέρουμε πόσο *"καλή"* είναι η προσέγγισή μας χρησιμοποιώντας το υπόλοιπο R_n.

Υπάρχει ένας συγκεκριμένος ορισμός του υπολοίπου (δεν είναι ο μόνος!!!) που ονομάζεται **υπόλοιπο Lagrange** και δίνεται από τον τύπο

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

όπου το p βρίσκεται **μεταξύ** του x και x_0 δηλαδή $x_0 < p < x$ ή $x < p < x_0$. Ο τύπος του υπολοίπου δίνει ένα **εύρος** για το μέγεθος του προσεγγιστικού σφάλματος.

Το **θεώρημα Taylor**[1] **για $f \in C^{n+1}$ λαμβάνει τη μορφή**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Αν η συνάρτηση έχει όλες τις παραγώγους συνεχείς και $\left|f^{(n+1)}(p)\right| < \infty$, $\forall n$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

[1] Προσοχή, το υπόλοιπο Lagrange απαιτεί $n+1$ συνεχείς παραγώγους.

1.7.1 Παράδειγμα. Θεώρημα μέσης τιμής (διαφορικού λογισμού), ΘΜΤ

- Θεωρείστε τη μικρότερη δυνατή προσέγγιση της $f(x)$ γύρω από ένα σημείο x_0, δηλαδή $n = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{(0+1)}(p)}{(0+1)!}(x - x_0)^{0+1} \\ &= f(x_0) + f'(p)(x - x_0) \end{aligned}$$

  ή

$$f'(p) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

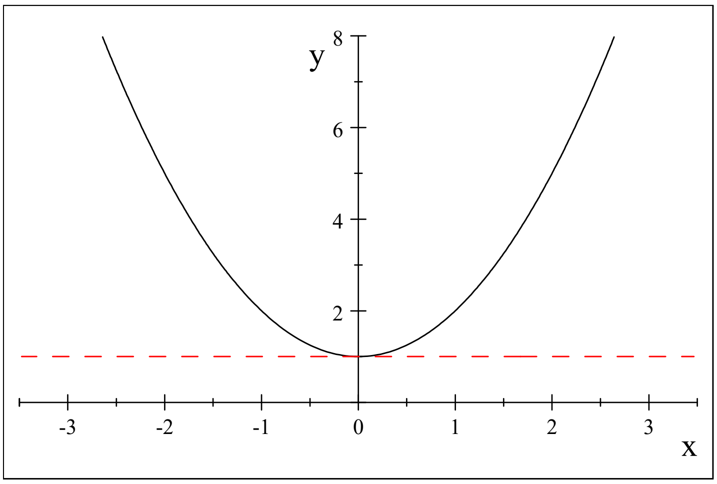
  για κάθε (πραγματική) συνάρτηση που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $p \in (x_0, x)$ ή $p \in (x, x_0)$.

- Άρα υπάρχει **τουλάχιστον ένα** p στο διάστημα (x_0, x) ή (x, x_0) τέτοιο ώστε η παραπάνω ισότητα ισχύει

- **Παράδειγμα**: $f(x) = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 4]$

- Υποπερίπτωση του ΘΜΤ είναι το **θεώρημα Rolle** όπου επιπλέον υποθέτουμε ότι στα άκρα του διαστήματος η συνάρτηση $f(x) = f(x_0)$.

- **Παράδειγμα**: $f(x) = x^2 + 1$ στο διάστημα $[-2, 2]$



1.7.2 Παράδειγμα

Για $n = 0$, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ **προσεγγίζεται γραμμικά** μέσω της

$$\begin{aligned} f(x) &= a^{x_0} + [(\ln a)(a^p)](x - x_0) \\ &= [a^{x_0} - (\ln a)(a^p)x_0] + (\ln a)(a^p)x \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $x_0 = 0$ και για κάποιο $p \in (0, x)$ τότε

$$f(x) = 1 + (\ln a)(a^p)x = 1 + \beta x$$

όπου $\beta = (\ln a)(a^p)$

1.7.3 Παράδειγμα γραμμικού αναπτύγματος

- Για $n = 0$, αναπτύξτε γραμμικά τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x^2)$
- Έχουμε ότι
$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$
άρα
$$f(x) = f(x_0) + f'(p)(x - x_0) = \ln(1 + x_0^2) + \frac{2p}{1 + p^2}(x - x_0)$$
Αν θέσουμε $x_0 = 0$ τότε για κάποιο $p \in (0, x)$ έχουμε
$$f(x) = \left(\frac{2p}{1 + p^2}\right)x$$

1.8 Υπόλοιπο Lagrange ως μέτρο της προσέγγισης Taylor

Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το υπόλοιπο Lagrange για να βρούμε την εγγύτητα της προσέγγισης Taylor; Θα λύσουμε δύο παραδείγματα.

1.8.1 Παράδειγμα

Βρείτε την μικρότερη τάξη προσέγγισης n για την συνάρτηση $f(x) = e^x$ με $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ή $|x| < 0.5$ ώστε το σφάλμα της προσέγγισης Taylor να είναι μικρότερο του 0.0001 ή 10^{-4}.

Απάντηση

Ζητούμενο είναι να βρούμε το μικρότερο δυνατό n έτσι ώστε

$$\left| \left(e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \right) = R_n(x) \right| \leq 10^{-4}$$

Για αλγεβρική ευκολία και επειδή $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ επιλέγουμε $x_0 = 0$ και έχουμε ότι

$$R_n(x) = \frac{e^p}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \quad -0.5 < p < 0.5$$

Άρα

$$|R_n(x)| = \frac{e^p}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Επειδή $p \in (-0.5, 0)$ ή $p \in (0, 0.5)$ ισχύει ότι $e^p < e^{0.5}$ και έχουμε

$$|R_n(x)| = \frac{e^p}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

Επίσης, επειδή το $|x| < 0.5$ έχουμε ότι $|x|^{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$. Άρα,

$$|R_n(x)| < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{\sqrt{e}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}$$

Θέλουμε το υπόλοιπο να ικανοποιεί $|R_n(x)| \leq 10^{-4}$ οπότε

$$\frac{\sqrt{e}}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \leq 10^{-4} \Rightarrow (n+1)! \cdot 2^{n+1} \geq \frac{\sqrt{e}}{10^{-4}} = \sqrt{e} \cdot 10^4 \approx 16487.21271$$

Δεν μπορούμε να επιλύσουμε αναλυτικά παρακάτω. Δοκιμάζουμε τιμές του n

$$\begin{aligned}
(1+1)!\cdot 2^{1+1} &= 8\\
(2+1)!\cdot 2^{2+1} &= 48\\
(3+1)!\cdot 2^{3+1} &= 384\\
(4+1)!\cdot 2^{4+1} &= 3840\\
(5+1)!\cdot 2^{5+1} &= 46080
\end{aligned}$$

Άρα το μικρότερο n τέτοιο ώστε $(n+1)!\cdot 2^{n+1} \geq 16487.21271$ είναι το $n=5$. Δηλαδή

$$\left|e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right| \leq 10^{-4} \quad \text{όταν} \quad |x| < 0.5$$

1.8.2 Παράδειγμα

Βρείτε για ποιές τιμές του x η προσέγγιση πρώτης τάξης της $f(x) = \frac{1}{1+x}$ γύρω από το $x_0 = 0$ δίνει σφάλμα μικρότερο από 10^{-3}.

Απάντηση

Βρίσκουμε τις δύο πρώτες παραγώγους για να υπολογίσουμε την προσέγγιση πρώτης τάξης και το υπόλοιπο που θα βοηθήσει στην απάντηση του προβλήματος

$$f(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\ ,\ f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Η προσέγγιση Taylor πρώτης τάξης γύρω από το $x_0 = 0$ δίνει

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(p)}{2}(x-x_0)^2 \quad ,\ p \in (-x, x)\\
&= \frac{1}{1+x_0} - \frac{1}{(1+x_0)^2}(x-x_0) + \frac{1}{(1+p)^3}(x-x_0)^2\\
&= 1 - x + \frac{x^2}{(1+p)^3} \quad ,\ p \in (-x, x)
\end{aligned}$$

Το ζητούμενο είναι να βρούμε για ποιές τιμές του x σε ένα διάστημα $|x| < M$ το μέγεθος του υπολοίπου είναι μικρότερο από 10^{-3}.

Έχουμε

$$\left|\frac{x^2}{(1+p)^3}\right| < \frac{|x|^2}{(1+|p|)^3} < |x|^2$$

και

$$|x|^2 < 10^{-3} \Rightarrow |x| < 10^{-3/2} = 0.031622777$$

Άρα όταν το $x \in (-0.031622777, 0.031622777)$ το σφάλμα της προσέγγισης

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

είναι μικρότερο από $10^{-3} = 0.001$.

Για παράδειγμα,

x	$f(x)$	$1-x$	$f(x)-(1-x)$
0.01	0.9900990099	0.99	0.0000990099
0.02	0.9803921569	0.98	0.0003921569
0.025	0.9756097561	0.975	0.0006097561
0.030	0.9708737864	0.97	0.0008737864
0.031	0.9699321048	0.969	0.0009321048
0.05	0.9523809524	0.95	**0.0023809524**

1.8.3 Παράδειγμα. Προσέγγιση τετραγωνικής ρίζας

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την τιμή της τετραγωνικής ρίζας

$$\sqrt{125}$$

χωρίς τη χρήση υπολογιστή. Γνωρίζουμε τις τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών με τέλεια τετράγωνα, δηλαδή

$$..., \sqrt{81} = 9, \sqrt{100} = 10, \sqrt{121} = 11, \sqrt{144} = 12, ...$$

Παρατηρούμε ότι πιο κοντά στον αριθμό 125 είναι ο 121 με ρίζα

$$\sqrt{121} = 11$$

Άρα μία πρώτη προσέγγιση του $\sqrt{125}$ δίνεται από το $x_0 = 121$, δηλαδή

$$\sqrt{125} \approx \sqrt{121} = 11$$

Μία δεύτερη προσέγγιση γίνεται χρησιμοποιώντας **το θεώρημα μέσης τιμής ή το ανάπτυγμα Taylor μηδενικής τάξης** $n = 0$ στο σημείο $x_0 = 121$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Επειδή

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= P_0 + R_0 = f(x_0) + f'(p)(x - x_0) \\ &= f(121) + f'(p)(x - 121) \\ &= \sqrt{121} + \frac{1}{2\sqrt{p}}(x - 121) \end{aligned}$$

Θέτωντας $x = 125$ και θεωρώντας ότι $p \in (121, 125)$ έχουμε

$$f(125) = \sqrt{125} = \sqrt{121} + \frac{2}{\sqrt{p}} = 11 + \frac{2}{\sqrt{p}}$$

Παρατηρείστε ότι το p πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα

$$121 < p < 125$$

άρα

$$11 < \sqrt{p} < \sqrt{125}$$

και

$$\frac{2}{11} < \frac{2}{\sqrt{p}} < \frac{2}{\sqrt{125}}$$

Οπότε το μικρότερο δυνατό σφάλμα επιτυγχάνεται με κάποια επιλογή του p κοντά στο 121. Για πρακτικούς λόγους (υπολογιστικούς) επιλέγουμε το μέγιστο κάτω όριο του διαστήματος (το $p = 121$) και

$$\sqrt{125} \approx 11 + \frac{2}{11}$$

Για την ακρίβεια

$$\begin{aligned} \sqrt{125} &= 11.1803398875 \\ 11 + \frac{2}{11} &= 11.1818181818 \end{aligned}$$

1.9 «Σειρά» Taylor (μόνο αν οι σειρές διδαχθούν)

Όταν αναφερθούμε μελλοντικά στην έννοια των **σειρών** θα δούμε αναλυτικότερα το παρακάτω αποτέλεσμα.

Για τις ανάγκες της διάλεξης:

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη για κάθε ακέραιο $n > 0$ τουλάχιστον σε μία γειτνίαση του σημείου x_0 και αν το υπόλοιπο $R_n(x)$ στο ανάπτυγμα Taylor

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ικανοποιεί

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

τότε *για ακτίνα σύγκλισης $|x - x_0| < r$ το άθροισμα*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n < \infty$$

και η συνάρτηση μπορεί να δοθεί από το άθροισμα

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

Τότε η f καλείται αναλυτική στο x_0.