Σύνολο ασκήσεων 7.

1 Άσκηση

Όταν το υπόλοιπο Lagrange $R_n(x, x_0)$ τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται η τάξη προσέγγισης n τότε μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση $f(x)$ ως ένα άθροισμα από το 0 μέχρι το άπειρο (ως μία "σειρά")

$$f\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!} \left(x - x_0\right)^n$$

αρκεί η $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη συνεχώς n φορές για κάθε x στο πεδίο ορισμού της ή τουλάχιστον για κάθε x_0.

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right) = \cos x : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$. Δείξτε ότι μπορεί να γραφεί ως "σειρά" γύρω από το $x_0 = 0$ και δώστε την αναλυτική μορφή του αθροίσματος. **Υπόδειξη:** Θα βρείτε ότι

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots \\
&\text{ή} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

2 Άσκηση

Έστω ότι

$$\ln y = \frac{1}{\gamma} \ln\left(x^a + \beta\right)$$

με $0 < \alpha < 1, \beta > 0, \gamma > 0$. Προσεγγίστε γραμμικά την $\ln y$ ως προς την x χρησιμοποιώντας $x_0 = 1$.

Υπόδειξη:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \frac{1}{\gamma} \ln\left(1 + \beta\right) + \frac{a}{\gamma\left(1 + \beta\right)} x + R_1 \Rightarrow \\
\ln y &= a_0 + a_1 x + R_1
\end{aligned}$$

για τιμές του x κοντά στο 1.