

# Μαθηματικά για Οικονομολόγους Ι

## 3ο Σύνολο Ασκήσεων

Όρια-Απροσδιόριστες Μορφές και ο κανόνας L'Hospital, Διαφορικά και Ρυθμός

Μεγέθυνσης

Διδάσκων Εργαστηρίου: **Παρασκευή (Εύη) Σαλαμαλίκη**-Υποψήφια Διδάκτωρ,

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Επιβλέπων-Υπεύθυνος Εργαστηρίου: **Ιωάννης Α. Βενέτης**, Επίκουρος Καθηγητής

Προσοχή: Η πλειοψηφία των ασκήσεων του τρέχοντος σετ έχει αντληθεί από το

"Σύνολο Ασκήσεων 4" του Διδάσκοντα, διαθέσιμο στην διεύθυνση:

<http://application.econ.upatras.gr/node/171>

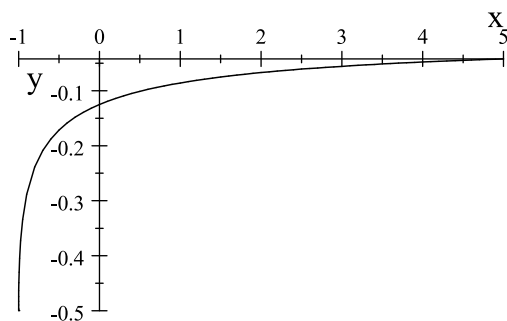
**Άσκηση 1.**

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

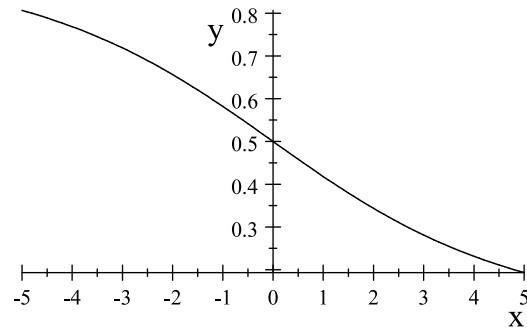
1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$ ,  $(\frac{0}{0})$  Απ:  $\frac{-1}{8}$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha \ln(\beta x + \gamma)}{x}$ ,  $(\frac{\infty}{\infty})$  όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  θετικές σταθερές, Απ: 0
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ ,  $(\frac{\infty}{\infty})$  Σημείωση:  $n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  Απ: 0
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$ ,  $(\infty - \infty)$  Απ:  $\frac{1}{2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\ln x}$ ,  $(0^0)$  Απ: 1

**Σημείωση 1:** Όλα τα παραπάνω όρια εμφανίζουν απροσδιόριστες μορφές. Για να προσδιοριστούν τα όρια θα πρέπει να εφαρμόσετε κανόνα L'Hospital (πιθανώς περισσότερες από μία φορές!)

**Σημείωση 2:** Δείτε παρακάτω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\frac{\sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2}$ , το όριο της οποίας σας ζητείται στην Άσκηση 1, (1). Ποια τιμή προσεγγίζει η συνάρτηση όταν το  $x$  προσεγγίζει την τιμή 0???



**Σημείωση 3:** Δείτε παρακάτω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$ , το όριο της οποίας σας ζητείται στην Άσκηση 1, (4). Ποια τιμή προσεγγίζει η συνάρτηση όταν το  $x$  προσεγγίζει την τιμή 0???



**Άσκηση 2.** (ή Άσκηση 7 συνόλου ασκήσεων 4)

Για τη γραμμική συνάρτηση κατανάλωσης

$$C = a + bY$$

όπου  $C$  κατανάλωση και  $Y$  διαθέσιμο εισόδημα, με οριακή ροπή προς κατανάλωση ίση με  $b$  και  $0 < b < 1$

1. 1. Τι εκφράζει η παράμετρος  $a$  και ποιο το αναμενόμενο πρόσημό της;
2. βρείτε την οριακή συνάρτηση (πρώτη παράγωγο)  $\frac{dC}{dY}$
3. βρείτε τη μέση συνάρτηση (δηλαδή  $\frac{C}{Y}$ ) κατανάλωσης ή τη μέση κατανάλωση ανά μονάδα διαθέσιμου εισοδήματος
4. βρείτε την ελαστικότητα της κατανάλωσης ως προς το διαθέσιμο εισόδημα και δείξτε ότι η κατανάλωση είναι ανελαστική για κάθε  $Y > 0$

**Απαντήσεις:** (συνοπτικά)

1. Η παράμετρος  $a$  εκφράζει την αυτόνομη κατανάλωση, δηλαδή το επίπεδο κατανάλωσης που αντιστοιχεί σε μηδενικό επίπεδο εισοδήματος,  $Y = 0$ . Το αναμενόμενο πρόσημο του  $a$  είναι  $a > 0$ .
2.  $MPC = \frac{dC}{dY} = b$

$$3. APC = \frac{C}{Y} = \frac{a+bY}{Y} = \frac{a}{Y} + b$$

4.  $\varepsilon_C = \frac{dC}{dY} \frac{Y}{C}$  (οριακή συνάρτηση κατανάλωσης επί την αντίστροφη μέση συνάρτηση κατανάλωσης),

$$\varepsilon_C = \frac{dC}{dY} \frac{Y}{C} = \dots = \frac{\beta Y}{\alpha + \beta Y} < 1$$

**Άσκηση 3.** (ή Άσκηση 8 συνόλου ασκήσεων 4)

1. Υποθέστε ότι  $Y(t) = \alpha X(t)$  όπου  $\alpha$  μία σταθερά (ως προς τον χρόνο). Βρείτε το ρυθμό μεγέθυνσης της  $Y$  και σχολιάστε.
2. Υποθέστε ότι  $Y(t) = (X(t))^\alpha$  όπου  $\alpha$  μία σταθερά (ως προς τον χρόνο). Βρείτε το ρυθμό μεγέθυνσης της  $Y$  και σχολιάστε.
3. Υποθέστε ότι το πραγματικό ΑΕΠ μεγενθύνεται με 4% το έτος και ο πληθυσμός με 1.5%. Ποιός ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν πραγματικού Α.Ε.Π;
4. (s.o.s) Έστω ότι το κεφαλαιακό απόθεμα μεγενθύνεται σταθερά στο χρόνο με ετήσιο ρυθμό 5%. Σε πόσα έτη θα διπλασιαστεί το κεφαλαιακό απόθεμα;

**Απαντήσεις:** (συνοπτικά)

1.  $\ln Y = \ln \alpha + \ln X \Rightarrow \frac{d \ln Y}{dt} = \frac{d \ln X}{dt} \Rightarrow g_Y = g_X$ . Σχολιάστε!
2.  $\ln Y = \alpha \ln X \Rightarrow \frac{d \ln Y}{dt} = \alpha \frac{d \ln X}{dt} \Rightarrow g_Y = \alpha g_X$ . Σχολιάστε!
3. Έστω  $Y$  = πραγματικό ΑΕΠ,  $N$  = πληθυσμός,  $Y_N$  = κατα κεφαλήν πραγματικό ΑΕΠ. Γνωρίζουμε ότι το κατα κεφαλήν πραγματικό ΑΕΠ=πραγματικό ΑΕΠ διά τον πληθυσμό.

$$\text{Συνεπώς, } Y_N = \frac{Y}{N},$$

$$\ln Y_N = \ln Y - \ln N$$

$$\frac{d \ln Y_N}{dt} = \frac{d \ln Y}{dt} - \frac{d \ln N}{dt} \Rightarrow g_{Y_n} = g_Y - g_N = 4\% - 1.5\% = 2.5\%.$$

Παρατηρείστε ότι  $g_{Y_n} < g_Y$ .

4. Η απάντηση βρίσκεται στο σύνολο ασκήσεων 4