

Μαθηματικά για Οικονομολόγους II. Διδάσκων: Ιωάννης Βενέτης  
Τμήμα Α. ΟΜΑΔΑ 1. 25 Ιουνίου 2024, 09:00-11:00  
Επιστρέψτε τα θέματα. Έχετε 30 λεπτά για κάθε ερώτηση

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΑΜ:.....

1. (25 μονάδες.) Υπολογίστε την αντίστροφη μήτρα  $(X'X)^{-1}$  όταν η μήτρα  $X$  δίνεται όπως παρακάτω:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (25 μονάδες.) Μία επενδυτής θέλει να επενδύσει το ποσό  $A > 0$  σε βραχυπρόθεσμα ομόλογα  $x$  που αποδίδουν 4% ετησίως, σε μεσοπρόθεσμα ομόλογα  $y$  που αποδίδουν 5% ετησίως και σε μακροπρόθεσμα ομόλογα  $z$  που αποδίδουν 6% ετησίως. Στόχος της είναι μία συνολική απόδοση 5% ετησίως ενώ υπάρχει η συμβουλή να επενδύσει ισόποσα σε βραχυπρόθεσμα και μεσοπρόθεσμα ομόλογα. **Ζητούμενο:** μέσω απαλοιφής **Gauss-Jordan** λύστε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = A \\ 4x + 5y + 6z = 5A \\ x - y = 0 \end{cases}$$

και απαντήστε σε συνάδελφο οικονομολόγο που ισχυρίζεται ότι θα πρέπει το μεγαλύτερο μέρος της επένδυσης να “τοποθετηθεί” σε μακροπρόθεσμα ομόλογα.

3. (25 μονάδες.) Προβείτε σε βελτιστοποίηση (χωρίς περιορισμούς) της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 - 6xy + y^2 + x + y$$

όπου  $x, y \in \mathbb{R}$ .

4. (25 μονάδες.) Ένας αντιπροσωπευτικός ορθολογικός καταναλωτής αντιμετωπίζει συνάρτηση χρησιμότητας:

$$u(c, l) = c - \frac{(1-l)^\epsilon}{\epsilon}, \quad x, y \in \mathbb{R}_{++}$$

όπου  $c > 0$  η πραγματική κατανάλωση,  $0 < l < 1$  το ποσοστό του χρόνου που διαθέτει ο εργαζόμενος γιασχόλη,  $\epsilon > 1$  μία παράμετρος προτιμήσεων. Το πραγματικό κόστος εργασίας (αμοιβή εργασίας) είναι  $w > 0$ . Ο εισοδηματικός περιορισμός του καταναλωτή/εργαζόμενου δίνεται από  $c + w \cdot l = w$  και δεν διαθέτει εισόδημα εκτός εργασίας.

- (i.) Προβείτε σε μεγιστοποίηση της συνάρτησης χρησιμότητας ως προς την κατανάλωση και τησχόλη  $c, l$ . Υπολογίστε την προσφορά εργασίας  $L_S^* = 1 - l^*$ .

**Υπόδειξη 1:** Είτε Σ.Π.Τ της Lagrangean και Σ.Δ.Τ που βασίζονται στην πλαισιωμένη (φραγμένη) Εσσιανή της Lagrangean. Συγκεκριμένα, για μέγιστο θα πρέπει η ορίζουσα της πλαισιωμένης (φραγμένης Εσσιανής) της Lagrangean  $|H^B|$  να είναι θετική, είτε παντού στο πεδίο ορισμού  $|H^B| > 0$  (ολικό μέγιστο) είτε μόνο στο στάσιμο σημείο  $|H^{B,*}| > 0$  (για να έχουμε τοπικό μέγιστο).

**Υπόδειξη 2:** Είτε Σ.Π.Τ Lagrangean και αντί Σ.Δ.Τ δείχνετε ότι η συνάρτηση  $u(c, l)$  είναι οιοει-κοίλη και ο περιορισμός είναι οιοει-κυρτή συνάρτηση. Η οιοει κοιλότητα βασίζεται στην πλαισιωμένη Εσσιανή της συνάρτησης  $u(c, l)$ . Για παράδειγμα, έστω  $H^B$  η πλαισιωμένη Εσσιανή μίας συνάρτησης δύο μεταβλητών  $f(x, y)$  και  $H_1^B, H_2^B$  η πρώτη και δεύτερη πρώτιστη κύρια ελάσσονα μήτρα της  $H^B$ . Τότε:

- Αν  $|H_1^B| < 0, |H_2^B| > 0$ , η συνάρτηση  $z = f(x, y)$  είναι **οιοει κοίλη**
- Αν  $|H_1^B| < 0, |H_2^B| < 0$ , η συνάρτηση  $z = f(x, y)$  είναι **οιοει κυρτή**

- (ii.) Πως μεταβάλλεται η βέλτιστη χρησιμότητα  $u^*(c^*, l^*)$ , όταν μεταβάλλεται η πραγματική αμοιβή της εργασίας  $w$ ;

Με βάση την παραπάνω απάντησή σας, ποιά από τις παρακάτω τρεις προτάσεις είναι σωστή; (α) Μεταβολές του  $w$  επηρεάζουν αναλόγως (θετικό πρόσημο μεταβολής) την βέλτιστη χρησιμότητα όμως δεν επηρεάζονται από την προσφορά εργασίας (β) Μεταβολές του  $w$  επηρεάζουν αντιστρόφως ανάλογα την βέλτιστη χρησιμότητα. Η μεταβολή της  $u^*$  εξαρτάται από το επίπεδο της προσφοράς εργασίας. Υψηλά επίπεδα προσφοράς εργασίας υποδηλώνουν μεγαλύτερη μεταβολή (μείωση) της βέλτιστης χρησιμότητας (γ) Μεταβολές του  $w$  επηρεάζουν ανάλογα την βέλτιστη χρησιμότητα. Η μεταβολή της  $u^*$  εξαρτάται από το επίπεδο της προσφοράς εργασίας. Υψηλά επίπεδα προσφοράς εργασίας υποδηλώνουν μεγαλύτερη μεταβολή (αύξηση) της βέλτιστης χρησιμότητας

**Υπόδειξη:** Θα πρέπει να απαντήσετε υιοθετώντας το **θεώρημα της περιβάλλουσας**. Δεν γίνονται δεκτές απαντήσεις που βασίζονται σε επανεπίλυση του προβλήματος.