Περίγραμμα διάλεξης 9

1 Οιονεί κοίλες (quasiconcave) και Οιονεί κυρτές (quasiconvex) συναρτήσεις

Θεώρημα γιά χαρακτηρισμό βέλτιστου σημείου ως **ολικό μέγιστο (ελάχιστο)** με βάση την οιονεί-κοιλότητα (κυρτότητα) άρα **χωρίς χρήση Σ.Δ.Τ.**

1.1 Θεώρημα

1. Έστω ότι A είναι ένα ανοιχτό **κυρτό** υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$
2. Έστω ότι $f(\mathbf{x}) : A \to \mathbb{R}$ είναι μία **οιονεί κοίλη (οιονεί κυρτή)** συνάρτηση
3. Έστω ότι οι περιορισμοί $g_1(\mathbf{x}) = b_1, ..., g_k(\mathbf{x}) = b_k$ είναι **οιονεί κυρτές (οιονεί κοίλες)** συναρτήσεις και η πιστοποίηση περιορισμού ισχύει
4. Έστω ότι
$$\mathcal{L} = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [b_i - g_i(\mathbf{x})]$$
η συνάρτηση **Lagrange**

Αποτέλεσμα 1: Αν υπάρχει $\mathbf{x}^*, \lambda^*$ τέτοιο ώστε οι **Σ.Π.Τ** να ικανοποιούνται
$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \lambda=\lambda^*} = \mathbf{0} \ , \ \lambda^* > 0 \ , \ g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{b}$$
τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι **ολικό μέγιστο (ελάχιστο)** της $f(\mathbf{x})$ στο εφικτό σύνολο που ορίζεται από τους περιορισμούς

Αποτέλεσμα 2: Αντίστοιχα, **αυστηρή οιονεί κοιλότητα** της $f(\mathbf{x})$ και **οιονεί κυρτότητα** των $g_i(\mathbf{x})$ υπονοεί **ολικό και μοναδικό μέγιστο**

1.2 Πρόταση

- Αυστηρή κοιλότητα ⇒ κοιλότητα ⇒ οιονεί κοιλότητα
- Αυστηρή κυρτότητα ⇒ κυρτότητα ⇒ οιονεί κυρτότητα

Η συγκεκριμένη πρόταση διευκολύνει σημαντικά το χαρακτηρισμό του στάσιμου σημείου.

- Για παράδειγμα, σε προβλήματα **μεγιστοποίησης** όλοι οι **γραμμικοί περιορισμοί** μπορούν να θεωρηθούν **κυρτοί** (άρα και **οιονεί κυρτοί**)
- Σε προβλήματα **ελαχιστοποίησης** οι γραμμικοί **περιορισμοί** θεωρούνται **κοίλες** άρα και **οιονεί κοίλες** συναρτήσεις και η αντικειμενική συνάρτηση πρέπει να είναι οιονεί κυρτή για να έχουμε ολικό ελάχιστο

1.3 Συνθήκες οιονεί κοιλότητας, οιονεί κυρτότητας

Έστω η πλαισιωμένη Εσσιανή μήτρα H^B της πολυμεταβλητής συνάρτησης[1] $y = f(x_1, ..., x_n)$ με $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$:

$$H^B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

Έστω οι n **πρώτιστες κύριες ελάσσονες** της πλαισιωμένης Εσσιανής H^B (δίνονται παρακάτω)

$$H_1^B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{pmatrix}$$

$$H_2^B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_1 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

$$H_n^B = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

Τότε, (σημαντικό!!!)

- Αν $|H_1^B| < 0, |H_2^B| > 0, |H_3^B| < 0, |H_4^B| > 0, ...$, η συνάρτηση $y = f(x_1, ..., x_n)$ είναι **οιονεί κοίλη**
- Αν $|H_1^B| < 0, |H_2^B| < 0, |H_3^B| < 0, |H_4^B| < 0, ...$, η συνάρτηση $y = f(x_1, ..., x_n)$ είναι **οιονεί κυρτή**

Μία απαραίτητη (αλλά όχι ικανή) συνθήκη για **οιονεί κοιλότητα (κυρτότητα)** είναι

[1] **Προσοχή**, πρόκειται για την φραγμένη Εσσιανή της **αντικειμενικής συνάρτησης** (και την ξεχωρίζω λίγο καλώντας την «πλαισιωμένη») **και όχι** για την φραγμένη Εσσιανή της συνάρτησης Lagrange.

- Αν $\left|H_1^B\right| \leq 0, \left|H_2^B\right| \geq 0, \left|H_3^B\right| \leq 0, \left|H_4^B\right| \geq 0, ...$, η συνάρτηση $y = f\left(x_1, ..., x_n\right)$ είναι **οιονεί κοίλη**
- Αν $\left|H_1^B\right| \leq 0, \left|H_2^B\right| \leq 0, \left|H_3^B\right| \leq 0, \left|H_4^B\right| \leq 0, ...$, η συνάρτηση $y = f\left(x_1, ..., x_n\right)$ είναι **οιονεί κυρτή**

Παράδειγμα

Είναι η συνάρτηση

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 x_2 \quad , \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{++}$$

οιονεί κοίλη;

2 Παράδειγμα. Συνάρτηση Cobb-Douglas

Έστω η συνάρτηση τύπου Cobb-Douglas $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^a x_2^\beta : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ με πρώτες μερικές παραγώγους

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

και δεύτερες μερικές παραγώγους

$$f_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Για παράδειγμα μία συνάρτηση χρησιμότητας $u\left(x_1, x_2\right) = x_1^a x_2^\beta$ ή μία συνάρτηση παραγωγής $f\left(K, L\right) = K^a L^\beta$.

Η **Εσσιανή** μήτρα δεύτερων μερικών παραγώγων H δίνεται από την

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\left(a-1\right) x_1^{a-2} x_2^\beta & a\beta x_1^{a-1} x_2^{\beta-1} \\ a\beta x_1^{a-1} x_2^{\beta-1} & \beta\left(\beta-1\right) x_1^a x_2^{\beta-2} \end{bmatrix}$$

ενώ η **φραγμένη Εσσιανή** μήτρα H^B της συνάρτησης Cobb-Douglas από

$$\begin{aligned} H^B &= \begin{pmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a x_1^{a-1} x_2^\beta & \beta x_1^a x_2^{\beta-1} \\ a x_1^{a-1} x_2^\beta & a\left(a-1\right) x_1^{a-2} x_2^\beta & a\beta x_1^{a-1} x_2^{\beta-1} \\ \beta x_1^a x_2^{\beta-1} & a\beta x_1^{a-1} x_2^{\beta-1} & \beta\left(\beta-1\right) x_1^a x_2^{\beta-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■ Η συνάρτηση $f\left(x_1, x_2\right) = x_1^a x_2^\beta : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ είναι:

- **Αυστηρώς κοίλη** (Περίγραμμα διάλεξης 7) όταν

$$0 < a < 1\ ,\ 0 < b < 1 \text{ και } 0 < a + b < 1$$

  (αρκετά περιοριστική υπόθεση η $0 < a + b < 1$)

- **Κοίλη** (Περίγραμμα διάλεξης 7) όταν

$$0 < a \leq 1\ ,\ 0 < b \leq 1 \text{ και } 0 < a + b \leq 1$$

  (λιγότερο περιοριστική υπόθεση η $0 < a + b \leq 1$)

- **Οιονεί κοίλη** όταν

$$\left|H_1^B\right| < 0 \quad , \quad \left|H_2^B\right| > 0$$

  δηλαδή όταν (δείτε το Σύνολο Ασκήσεων 9 στο eclass)

$$a > 0\ ,\ b > 0$$

  (ακόμα λιγότερο περιοριστική υπόθεση)

3 Παράδειγμα (s.o.s).

4 Προσφορά και Ζήτηση εργασίας

■ **Προσφορά εργασίας**. Έστω δύο αγαθά, η κατανάλωση $c > 0$ (consumption) και η σχόλη $l > 0$ (leisure)

▷ Έστω ότι w ο μισθός (ωρομίσθιο) που αντιπροσωπεύει το κόστος ευκαιρίας της σχόλης

▷ p είναι το επίπεδο τιμών της οικονομίας (τιμή της κατανάλωσης σε ένα αντιπροσωπευτικό καλάθι αγορών)

▷ ενώ T συμβολίζει το συνολικό διαθέσιμο χρόνο του καταναλωτή (π.χ. ημερήσιος χρόνος = 24 ώρες, $T = 24$). Οπότε $T = l + h$ όπου h οι ώρες εργασίας που διατίθεται να εργαστεί (να προσφέρει εργασία άρα **προσφορά εργασίας**) ο καταναλωτής

▷ Επίσης, έστω ότι M_0 συμβολίζει το εισόδημα από πηγές εκτός εργασίας, προσεγγιστικά συμβολίζει τον «πλούτο» (non-income wealth) του καταναλωτή, π.χ. κέρδη από περιουσιακά στοιχεία (financial wealth), αξία πάγιων περιουσιακών στοιχείων όπως η κατοικία, (housing wealth) κ.τ.λ.

Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο **ορθολογικός** καταναλωτής είναι η μεγιστοποίηση της χρησιμότητάς του

$$U(c, l) : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}_{++}$$

με τον περιορισμό ότι η **αξία της κατανάλωσής** του $p \cdot c$ θα πρέπει να είναι ίση με το άθροισμα του **εισοδήματός του από εργασία** $wh = w(T - l)$ και του υπάρχοντα **πλούτου** M_0.

Δηλαδή το προς επίλυση **πρόβλημα βελτιστοποίησης** δίνεται από

$$\max_{c,l} U(c, l)$$

με

$$pc = w(T - l) + M_0$$

Η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από δύο αγαθά, την κατανάλωση c και τη σχόλη ή ελεύθερο χρόνο l. **Στο παρακάτω παράδειγμα, θα θεωρήσουμε ότι η αναλυτική συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης χρησιμότητας $U(c, l)$ μας είναι άγνωστη και θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1.1 για να αποφασίσουμε πότε το στάσιμο σημείο είναι ολικό μέγιστο.**

- Για αναλυτική ευκολία θέτουμε το επίπεδο τιμών p ίσο με 1, οπότε ο μισθός πλέον αντιπροσωπεύει πραγματικό μισθό και ο πλούτος είναι πραγματικός πλούτος αφού

$$\begin{aligned} c &= \frac{w}{p}(T - l) + \frac{M_0}{p} \\ &= w(T - l) + M_0 \end{aligned}$$

όταν $p = 1$. Επιπλέον, θα αποτελέσει αλγεβρική ευκολία (τυποποίηση) να θέσουμε το συνολικό διαθέσιμο χρόνο ίσο με τη μονάδα, $T = 1$, οπότε

$$0 \leq l \leq 1 \ , \ 0 \leq h \leq 1 \ , \ h + l = 1$$

με l, h να αντιπροσωπεύουν τώρα το **ποσοστό του χρόνου** που διατίθεται στη σχόλη και στην εργασία αντίστοιχα. Άρα ο περιορισμός γράφεται απλοποιημένα στη μορφή

$$c + wl = w + M_0$$

όπου w το πραγματικό ωρομίσθιο και M_0 ο πραγματικός πλούτος.

- Η **προσφορά εργασίας** μπορεί να συμβολισθεί από τις ώρες εργασίας ή το ποσοστό του συνολικού διαθέσιμου χρόνου εργασίας $L_S = T - l$.

Η συνάρτηση ***Lagrange*** λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{L} = U(c, l) + \lambda \left[w + M_0 - c - wl \right]$$

με **ΣΠΤ**

$$\left. \begin{array}{r} \mathcal{L}_c = U_c - \lambda = 0 \\ \\ \mathcal{L}_l = U_l - \lambda w = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_c}{U_l} = \frac{\lambda}{\lambda w} \Rightarrow \frac{U_l}{U_c} = w$$

και

$$\mathcal{L}_\lambda = w + M_0 - c - wl = 0 \Rightarrow w(1 - l) + M_0 - c = 0$$

Άρα, στο στάσιμο σημείο c^*, l^* το οποίο λύνει το σύστημα εξισώσεων

$$\mathcal{L}_c = 0, \mathcal{L}_l = 0, \mathcal{L}_\lambda = 0$$

έχουμε μία συνθήκη ισορροπίας: ο πραγματικός μισθός w θα πρέπει να είναι ίσος με τον **οριακό λόγο υποκατάστασης** σχόλης-κατανάλωσης $\frac{U_l}{U_c}$.

ΣΔΤ

Η φραγμένη (πλαισιωμένη) εσσιανή μήτρα του προβλήματος δίνεται από την

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & w \\ 1 & U_{cc} & U_{cl} \\ w & U_{lc} & U_{ll} \end{bmatrix}$$

με ορίζουσα (υπολογισμένη στο στάσιμο σημείο)

$$\begin{aligned} \left| H^{*B} \right| &= -\begin{vmatrix} 1 & U_{cl}^* \\ w & U_{ll}^* \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} 1 & U_{cc}^* \\ w & U_{lc}^* \end{vmatrix} \\ &= -U_{ll}^* + wU_{cl}^* - w^2 U_{cc}^* + wU_{lc}^* \\ &= -w^2 U_{cc}^* + 2wU_{cl}^* - U_{ll}^* \end{aligned}$$

Η ικανή συνθήκη για **τοπικό μέγιστο** θέλει την ορίζουσα $\left|H^{*B}\right| > 0$.

Παρατηρήστε ότι ικανοποιείται όταν η συνάρτηση χρησιμότητας $U(c,l)$ είναι **αυστηρώς κοίλη**.

Γιατί; Διότι όταν η συνάρτηση χρησιμότητας είναι αυστηρώς κοίλη ως προς τα c, l τότε ισχύει

$$U_{cc} < 0, \ (U_{ll} < 0)$$

και

$$U_{cc}U_{ll} - U_{cl}^2 > 0$$

Η ορίζουσα της φραγμένης Εσσιανής $\left|H^B\right|$ μπορεί να γραφεί[2] ως μία τετραγωνική μορφή

$$\left|H^B\right| = a'Ha = \begin{pmatrix} w & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -U_{cc} & -U_{cl} \\ -U_{cl} & -U_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ -1 \end{pmatrix}$$

που είναι θετική

$$\left|H^B\right| = a'Ha > 0$$

όταν η Εσσιανή μήτρα των δεύτερων μερικών παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης

$$H = \begin{pmatrix} -U_{cc} & -U_{cl} \\ -U_{cl} & -U_{ll} \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένη δηλαδή όταν

$$U_{cc}U_{ll} - U_{cl}^2 > 0 \text{ και } -U_{cc} > 0 \Rightarrow U_{cc} < 0 \text{ ή } -U_{ll} > 0 \Rightarrow U_{ll} < 0$$

Αν χαλαρώσουμε την υπόθεση της αυστηρής κοιλότητας και υιοθετήσουμε το θεώρημα 1.1 τότε

- ο περιορισμός είναι οιονεί κυρτός (γραμμική συνάρτηση των c, l)
- ενώ $\mathbb{R}^2_{++} = (0,\infty) \times (0,\infty)$ είναι ένα ανοιχτό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$
- άρα μένει να δούμε αν η αντικειμενική συνάρτηση είναι οιονεί κοίλη. Σχηματίζουμε την φραγμένη Εσσιανή της συνάρτησης

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & U_c & U_l \\ U_c & U_{cc} & U_{cl} \\ U_l & U_{lc} & U_{ll} \end{bmatrix}$$

[2] Η ορίζουσα μιας μήτρας

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & C & E \\ b & E & D \end{bmatrix}$$

δίνεται από

$$-Da^2 + 2Eab - Cb^2$$

η οποία είναι αλγεβρικά ίση με την τετραγωνική μορφή

$$\begin{pmatrix} b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -C & -E \\ -E & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = -Da^2 + 2Eab - Cb^2$$

Οιονεί-κοιλότητα έχουμε όταν

$$\left|H_1^B\right| < 0 \quad , \quad \left|H_2^B\right| > 0$$

δηλαδή όταν

$$\left|H_1^B\right| = -\left(U_c\right)^2 < 0 \;\; ή \;\; \left|H_1^B\right| = -\left(U_l\right)^2 < 0$$

και

$$\left|H_2^B\right| = -\left(U_l\right)^2 U_{cc} + 2U_lU_cU_{cl} - \left(U_c\right)^2 U_{ll} > 0$$

Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται για κάθε $c, l \in \mathbb{R}_{++}$ ειδικά για συναρτήσεις χρησιμότητας ή παραγωγής όπου υποθέτουμε θετικές οριακές χρησιμότητες $U_c, U_l > 0$ (ή παραγωγικότητες) ενώ η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται όπως και παραπάνω όταν

$$U_{cc}U_{ll} - U_{cl}^2 > 0$$

5 Άσκηση 1 (s.o.s) προσφορά εργασίας

Έστω η ημι-γραμμική (quasi-linear) συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(c, l) = c - \frac{(T-l)^{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

όπου $c > 0$: πραγματική κατανάλωση, $l > 0$: σχόλη, $T = 1$: συνολικός διαθέσιμος χρόνος ενώ έστω ότι M_0 το πραγματικό εισόδημα από πηγές εκτός εργασίας και w ο πραγματικός μισθός.

1. Για ποιές τιμές της παραμέτρου ε είναι το πρόβλημα

$$\max_{c,l} U(c, l)$$
$$\text{μ.τ.π}$$
$$c + wl = w + M_0$$

   καλά ορισμένο; **Υπόδειξη:** ελέγξτε τις Σ.Π.Τ και κυρίως τις Σ.Δ.Τ για τοπικό μέγιστο και δείτε για ποιές τιμές της παραμέτρου ε ικανοποιούνται οι Σ.Δ.Τ για τουλάχιστον τοπικό μέγιστο. **Εναλλακτικά**, ελέγξτε για **οιονεί-κοιλότητα** την αντικειμενική συνάρτηση $U(c, l)$.

2. Βρείτε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης προσφοράς εργασίας

$$L_S = T - l = 1 - l$$

   στο βέλτιστο σημείο, δηλαδή την προσφορά εργασίας $L_S^* = T - l^* = 1 - l^*$

3. Βρείτε την ελαστικότητα της προσφοράς εργασίας L_S ως προς το μισθό, $\eta_{L_S,w}$ (στο βέλτιστο σημείο)

6 Απάντηση 1

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση **Lagrange**

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= U(c,l)+\lambda\left[w+M_0-c-wl\right]\\ &= c-\frac{(1-l)^{\varepsilon}}{\varepsilon}+\lambda\left[w+M_0-c-wl\right]\end{aligned}$$

Από τις **Σ.Π.Τ** έχουμε

$$\begin{aligned}(1) &: \mathcal{L}_c=0\Rightarrow 1-\lambda=0\\ (2) &: \mathcal{L}_l=0\Rightarrow (1-l)^{\varepsilon-1}-\lambda w=0\\ (3) &: \mathcal{L}_\lambda=0\Rightarrow w+M_0-c-wl=0\end{aligned}$$

άρα (1)/(2) δίνει

$$\begin{gathered}\frac{U_l}{U_c}=w\Rightarrow\frac{(1-l)^{\varepsilon-1}}{1}=w\Rightarrow\\ (1-l)^{\varepsilon-1}=w\Rightarrow\\ 1-l=w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}\Rightarrow\\ l^*=1-w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}\end{gathered}$$

άρα από την (3)

$$\begin{gathered}w+M_0-c^*-wl^*=0\Rightarrow\\ c^*=w+M_0-w+w^{1+\frac{1}{\varepsilon-1}}\Rightarrow\\ c^*=w^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}+M_0\end{gathered}$$

ενώ από την (1)

$$\lambda^*=1$$

Η ζητούμενη προσφορά εργασίας δίνεται από

$$L_S^*=1-l^*=w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

Η **Σ.Δ.Τ** δίνει

$$\begin{aligned}\left|H^{*B}\right| &= -w^2U_{cc}^*+2wU_{cl}^*-U_{ll}^*\\ &= -w^2\times 0+2w\times 0-\left(-\left(\varepsilon-1\right)\left(1-l^*\right)^{\varepsilon-2}\right)\\ &= \left(\varepsilon-1\right)\left(1-l^*\right)^{\varepsilon-2}>0\\ \text{όταν }\ \varepsilon &> 1\end{aligned}$$

Άρα το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο για τιμές της παραμέτρου ε μεγαλύτερες της μονάδας $\varepsilon>1$.

Η **ελαστικότητα της προσφοράς εργασίας** δίνεται από

$$\begin{aligned}
\eta_{L_S^*,w} &= \frac{\partial L_S^*}{\partial w}\frac{w}{L_S^*} \\
&= \frac{1}{\varepsilon-1}w^{\frac{1}{\varepsilon-1}-1}\frac{w}{L_S^*} \\
&= \frac{1}{\varepsilon-1}w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}\frac{1}{L_S^*} \\
&= \frac{1}{\varepsilon-1}w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}w^{-\frac{1}{\varepsilon-1}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon-1}
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, διακρίνοντας την εκθετική σχέση προσφοράς εργασίας και μισθού, $L_S^* = w^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$, λογαριθμίζουμε και

$$\ln(L_S^*) = \frac{1}{\varepsilon-1}\ln(w) \Rightarrow \eta_{L_S^*,w} = \frac{d\ln(L_S^*)}{d\ln(w)} = \frac{1}{\varepsilon-1}$$

- Άρα η ελαστικότητα της προσφοράς εργασίας είναι **ισοελαστική** (δεν εξαρτάται από το επίπεδο του μισθού)
- Μεγάλες τιμές της παραμέτρου ε, π.χ. $\varepsilon > 2$, υποδηλώνουν **ανελαστική προσφορά εργασίας**, $\varepsilon = 2$ **μοναδιαία ελαστικότητα** και $1 < \varepsilon < 2$ **ελαστική προσφορά εργασίας**

7 Άσκηση 2 (s.o.s) ζήτηση εργασίας

(και συνδυασμός με προσφορά εργασίας από την άσκηση 1)

Έστω η συνάρτηση παραγωγής

$$Q = AL^{\sigma}$$

για μία επιχείρηση που λειτουργεί σε μία ανταγωνιστική αγορά όπου

- Q : το επίπεδο παραγωγής
- $L > 0$: η εργασία και
- $A > 0$: μία εξωγενής παράμετρος που μεταβάλλει τη παραγωγικότητα της εργασίας
- ενώ $p > 0$ θα συμβολίζει την τιμή πώλησης των αγαθών

1. Βρείτε και πάλι το διάστημα τιμών της παραμέτρου σ σύμφωνα με το οποίο το **πρόβλημα μεγιστοποίησης κερδών** της επιχείρησης είναι καλά ορισμένο

2. Βρείτε τη συνάρτηση ζήτησης εργασίας L_D^* (μέσω βελτιστοποίησης, δηλαδή μεγιστοποιήστε τα κέρδη της εταιρείας ως προς την εργασία)

3. Συνδυάζοντας την άσκηση 1 και άσκηση 2 βρείτε **τους μισθούς ισορροπίας και την εργασία ισορροπίας** w^*, L^* - δηλαδή βρείτε πως διαμοφώνεται το επίπεδο ισορροπίας της εργασίας και του μισθού στην συγκεκριμένη ορθολογική οικονομία

4. Βρείτε την ελαστικότητα $\eta_{w^*,A}$ του μισθού ισορροπίας w^* ως προς την παραγωγικότητα A και την ελαστικότητα $\eta_{L^*,A}$ της εργασίας ισορροπίας L^* ως προς την παραγωγικότητα A

5. Συγκρίνετε τις δύο ελαστικότητες εκφράζοντας τον λόγο τους

$$\frac{\eta_{w^*,A}}{\eta_{L^*,A}}$$

ως συνάρτηση της ελαστικότητας της προσφοράς εργασίας $\eta_{L_S^*,w}$

- Σύμφωνα με εμπειρικές οικονομετρικές εκτιμήσεις στις Η.Π.Α, η ελαστικότητα της προσφοράς εργασίας $\eta_{L_S^*,w}$ (των ανδρών) είναι πολύ χαμηλή περίπου $0.1 - 0.3$ ενώ των γυναικών εμφανίζεται μεγαλύτερη με εκτιμήσεις που κυμαίνονται από 0 μέχρι 1. Επίσης, εμπειρικές μελέτες δείχνουν ότι η μεταβλητότητα της προφοράς εργασίας εξηγείται κυρίως από κινήσεις στο «όριο» δηλαδή από άτομα τα οποία είτε φεύγουν είτε μπαίνουν στην αγορά εργασίας.
  - Σχολιάστε το αποτέλεσμα του ανταγωνιστικού υποδείγματος με βάση το εμπειρικό δεδομένο ότι η εργασία φαίνεται να μεταβάλλεται έντονα σύμφωνα με τον επιχειρηματικό κύκλο ενώ οι πραγματικοί μισθοί παραμένουν σχετικά σταθεροί. Θεωρείστε ότι ο επιχειρηματικός κύκλος εκφράζεται μέσα από διακυμάνσεις της «τεχνολογίας» ή της παραγωγικότητας A.

8 Απάντηση 2

Η συνάρτηση (πραγματικών) κερδών λαμβάνει τη μορφή

$$\Pi = pAL^{\sigma} - wL = AL^{\sigma} - wL$$

ΣΠΤ

$$\frac{d\Pi}{dL} = \Pi' = \sigma AL^{\sigma-1} - w = 0 \Rightarrow L_D^* = (\sigma A)^{\frac{1}{1-\sigma}} w^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

ΣΔΤ

$$\left.\frac{d^2\Pi}{dL^2}\right|_{L=L_D^*} = A\sigma(\sigma-1)L_D^{*\sigma-2} < 0 \quad \text{όταν} \quad \sigma < 1$$

- Άρα η παράμετρος σ θα πρέπει να είναι $\sigma < 1$ για **τοπικό μέγιστο**.
- Επειδή υποθέτουμε $L > 0$ το μέγιστο είναι ολικό και μοναδικό στο πεδίο ορισμού $L > 0$.

Η αγορά εργασίας ισορροπεί όταν η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση εργασίας δηλαδή όταν $L_S^* = L_D^*$.

Οπότε,

$$L_S^* = L_D^* \Rightarrow$$
$$w^{\frac{1}{\varepsilon-1}} = (A\sigma)^{\frac{1}{1-\sigma}} w^{\frac{1}{\sigma-1}} \Leftrightarrow w^* = (A\sigma)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\sigma}}$$

άρα η εργασία ισορροπίας δίνεται από

$$L^* = (A\sigma)^{\frac{1}{\varepsilon-\sigma}}$$

Από την εκθετική μορφή των συναρτήσεων βγαίνει άμεσα το συμπέρασμα ότι

$$\eta_{w^*,A} = \frac{\partial w^*}{\partial A}\frac{A}{w^*} = ... = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon-\sigma}$$

και

$$\eta_{L^*,A} = \frac{\partial L^*}{\partial A}\frac{A}{L^*} = ... = \frac{1}{\varepsilon-\sigma}$$

άρα ο λόγος των ελαστικοτήτων είναι ίσος με

$$\frac{\eta_{w^*,A}}{\eta_{L^*,A}} = \varepsilon - 1$$

δηλαδή είναι αντιστρόφα ανάλογος της ελαστικότητας της προσφοράς εργασίας,

$$\frac{\eta_{w^*,A}}{\eta_{L^*,A}} = \frac{1}{\eta_{L_S^*,w}}$$

Όταν η ελαστικότητα της προσφοράς εργασίας είναι πολύ χαμηλή (π.χ. κοντά στο $\eta_{L_S^*,w} = 0.1$) τότε το ανταγωνιστικό υπόδειγμα προβλέπει ότι οι πραγματικοί μισθοί είναι εξαιρετικά ευαίσθητοι σε μεταβολές της παραγωγικότητας ή του επιχειρηματικού κύκλου π.χ. ότι η $\eta_{w^*,A}$ είναι δεκαπλάσια της $\eta_{L^*,A}$. Αυτό το συμπέρασμα αντιβαίνει την εμπειρική παρατήρηση ότι οι μισθοί ελάχιστα επηρεάζονται από τον επιχειρηματικό κύκλο σε αντίθεση με την εργασία.